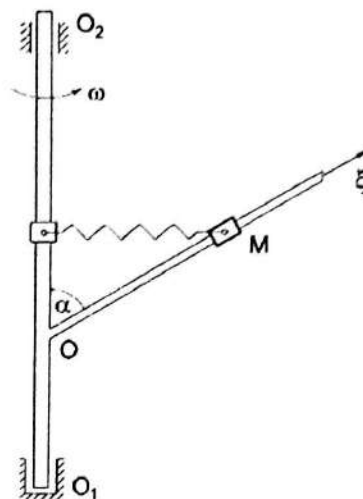
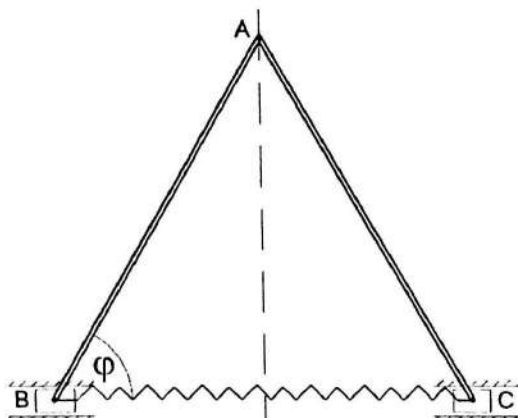


1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva homogena štapa AB i AC, od kojih je svaki mase m i dužine l . Štapovi su međusobno zglobovno vezani u tački A. Krajevi štapa B i C zglobovno su vezani za lake klizalice koji mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi, i koji su povezani oprugom nepoznate krutosti c . U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapi su mirovali i bili u položaju koji je određen uglom $\varphi_0 = 60^\circ$.

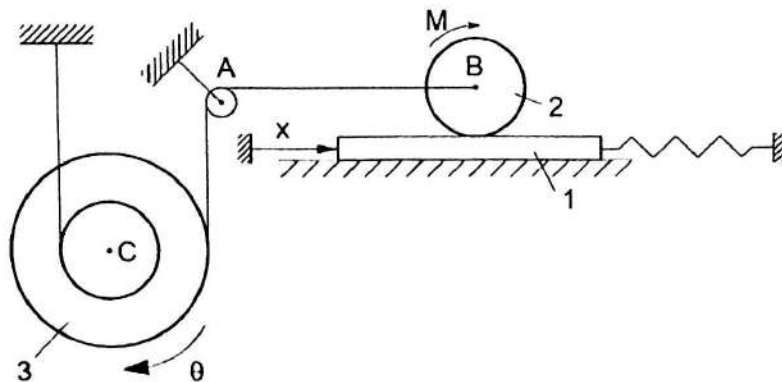
- a) Odrediti krutost opruge c tako da ugaona brzina štapa u trenutku t_1 , kada je $\varphi_1 = 30^\circ$, bude jednaka nuli.
b) Za tako određenu vrednost opruge c , odrediti ubrzanje tačke A u trenutku t_1 .



2. Klizač M mase m može da klizi po glatkoj cevi koja je zavarena pod uglom $\alpha = 60^\circ$ za osovину O_1O_2 . Osovina se obrće oko svoje vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω . Za klizač M vezana je opruga krutosti $c = 4m\omega^2$, čiji se drugi kraj kreće po osovini O_1O_2 . Pri kretanju klizača opruga ima uvek horizontalan pravac. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\ell_0 = \sqrt{3}$. Položaj klizača M meri se duž pokretne ose $O\xi$, kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = \frac{8}{3}$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.

- a) Odrediti jednačinu relativnog kretanja klizača $\xi(t)$. b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t) = ?$.

3. Mehanički sistem nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od platforme 1 mase $2m$, homogenog diska 2 mase m i poluprečnika R , i koaksijalnog cilindra 3 mase m i poluprečnika R i $2R$. Poluprečnik inercije cilindra za osu upravnu na ravan crteža, a koja prolazi kroz središte mase C, iznosi $i_C = \sqrt{2}R$. Tačka C za sve vreme kretanja zadržava vertikalni pravac. Disk 2 može da se kotrlja bez klizanja po platformi 1, koja može da klizi bez trenja po horizontalnoj podlozi. Platforma je vezana oprugom krutosti c , čiji je drugi kraj vezan za nepokretni zid. Sistem je spojen neistegljivim užadima zanemarljive mase kao što je prikazano na slici. Masu kotura A zanemariti. Na disk 2 deluje spreg sila momenta intenziteta M u naznačenom smeru. Za date generalisane koordinate (θ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$.



septembar 21

③ vertikalni ravni

1: $2m$

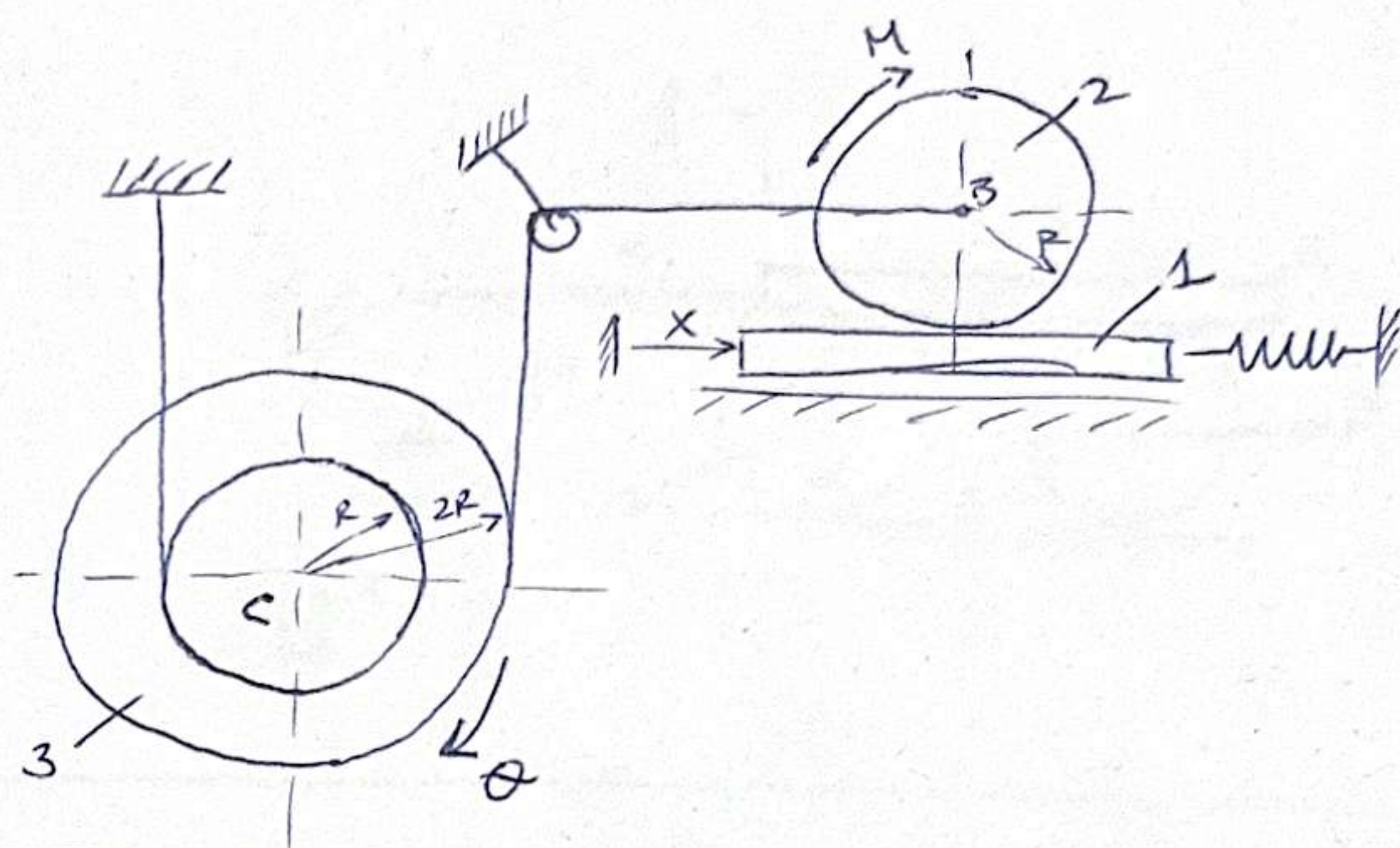
2: m, R

3: $m, R, 2R, I_c = \sqrt{2} R$

opruga: c , za $x=0$ je neopregnuta

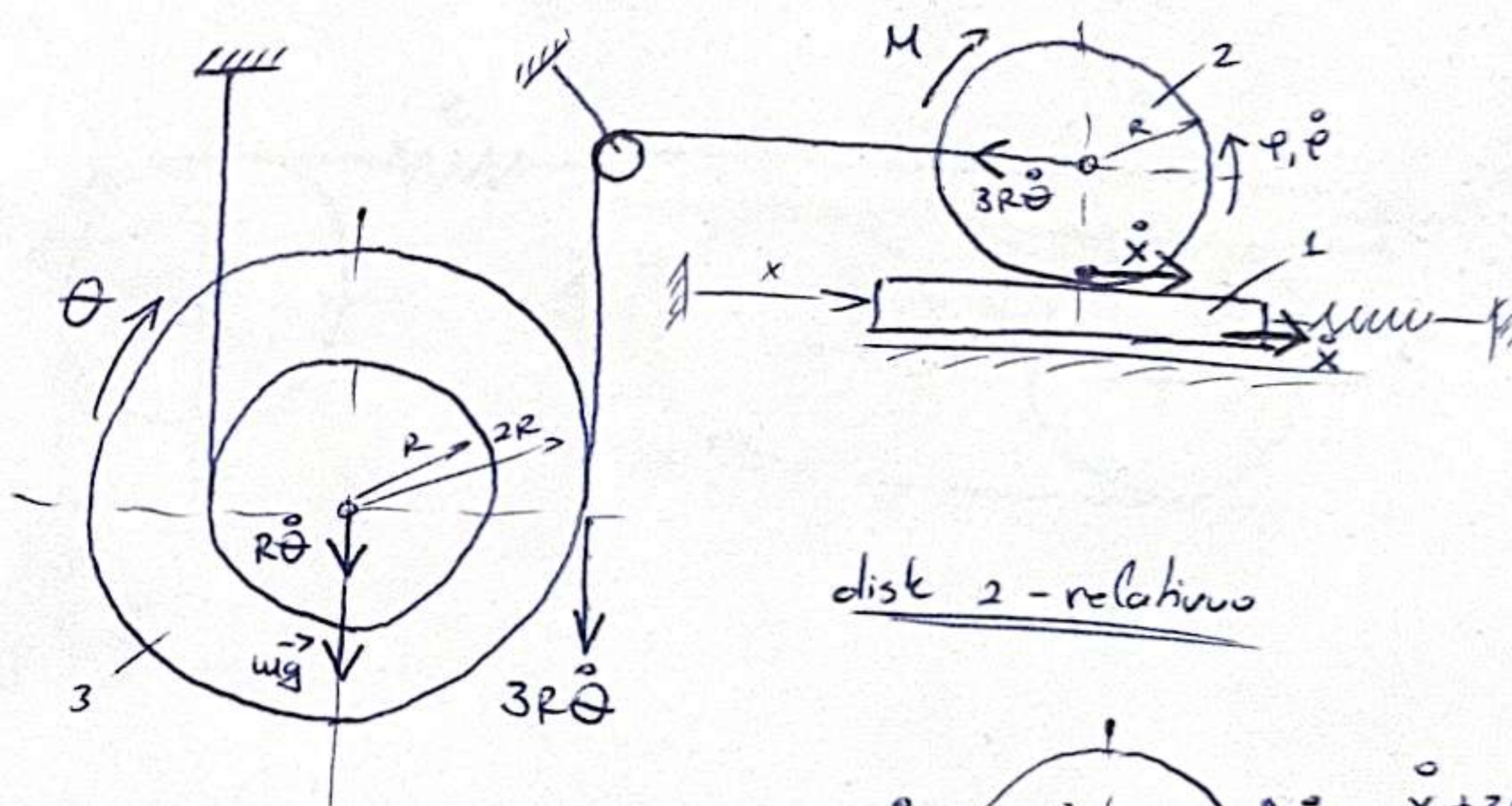
moment M

def. i-ke kotanja za θ, x ?

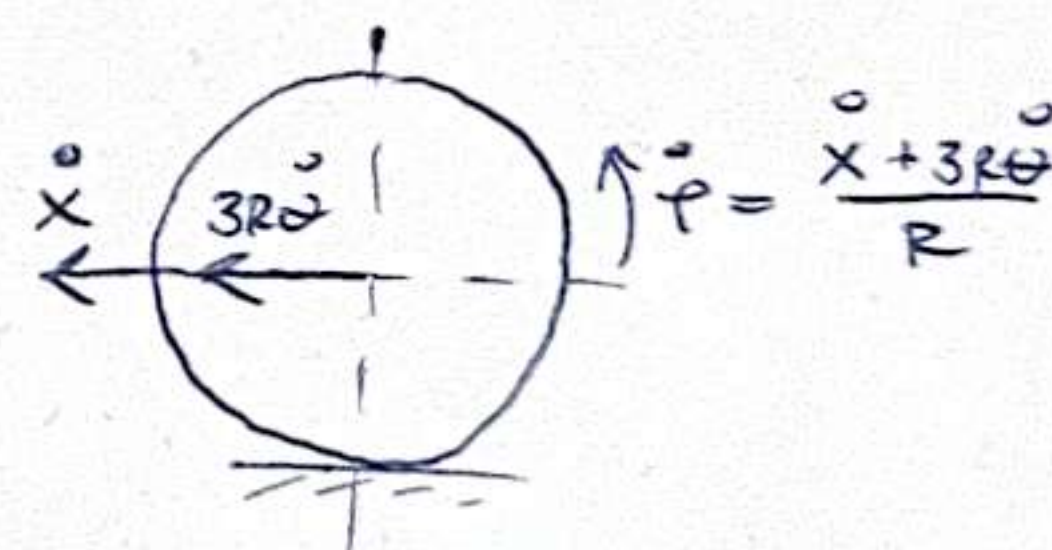


$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x}$$



disk 2 - relativno



$$T_1 = \frac{1}{2} 2m \dot{x}^2 = m \dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m (3R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \left(\frac{\dot{x} + 3R\dot{\theta}}{R} \right)^2 =$$

$$= \frac{9}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} mR^2 \frac{\dot{x}^2 + 6R\dot{\theta}\dot{x} + 9R^2 \dot{\theta}^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{4} m \dot{x}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x} R \dot{\theta} + \frac{27}{4} mR^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m (R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m I_c^2 \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} 2mR^2 \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2} mR^2 \dot{\theta}^2$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{5}{4} m \dot{x}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x} R \dot{\theta} + \frac{33}{4} mR^2 \dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{3}{2} m \dot{x} R + \frac{33}{2} mR^2 \dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{x} R + \frac{33}{2} mR^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{5}{2} m \ddot{x} + \frac{3}{2} mR \ddot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{5}{2} m \ddot{x} + \frac{3}{2} mR \ddot{\theta}$$

$$(V_y) \partial A = -cx dx - M d\varphi + mg dy_c$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot{x} + 3R\dot{\theta}}{R} = \frac{dx}{dt} + 3R \frac{d\theta}{dt} \rightarrow d\varphi = \frac{dx}{R} + 3R d\theta$$

$$\frac{dy_c}{dt} = R\dot{\theta} = R \frac{d\theta}{dt} \rightarrow dy_c = R d\theta$$

$$\partial A = -cx dx - \frac{M}{R} dx - 3M d\theta + mgR d\theta$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{x} R + \frac{33}{2} mR^2 \ddot{\theta} = -3M + mgR$$

$$\frac{5}{2} m \ddot{x} + \frac{3}{2} mR \ddot{\theta} = -cx - \frac{M}{R}$$

МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799

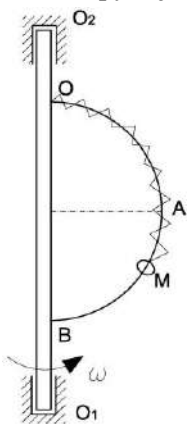
29. август 2019.

Прва група

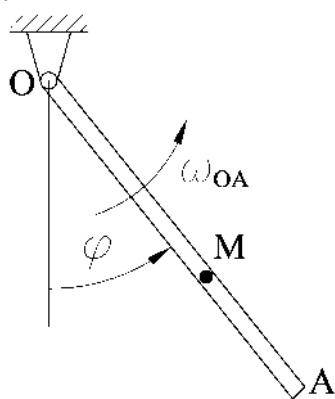
1. По глаткој жици OAB савијеној тако да има облик полукруга полупречника R , може да клизи прстен M масе $2m$ (слика 1). Жица је крајевима O и B заварена за вертикалну осовину O_1O_2 и може да се обрће око вертикалне осе. Маса жице је m , а полупречник инерције у односу на осу обртања је $i_{Oz} = R$. Прстен је опругом крутости $c = mg/(R\pi^2)$ везан за тачку O . У почетном тренутку прстен је био у положају B у релативном мировању, а угаона брзина жице била је ω_0 . Ако је дужина ненапегнуте опруге $l_0 = \frac{1}{2}R\pi$, одредити угаону брзину жице у тренутку када прстен стигне у положај A и релативну брзину прстена у том тренутку. Који услов, у том случају, мора испунити угаона брзина ω_0 ?

2. Глатка цев OA обрће се константном угаоном брзином $\omega_{OA} = 4\omega_0$ око хоризонталне осе Oz , управне на раван цртежа (слика 2). Унутар цеви може да се креће тачка M , масе m . Током кретања, на тачку M делује сила отпора средине пропорционална апсолутној брзини тачке, са коефицијентом пропорционалности $6m\omega_0$. У почетном тренутку ($t_0 = 0$), тачка је била у положају O у стању релативног мировања, а цев је заузимала вертикалан правац ($\varphi_0 = 0$). Одредити коначну једначину релативног кретања тачке у односу на цев и реакцију цеви у зависности од времена.

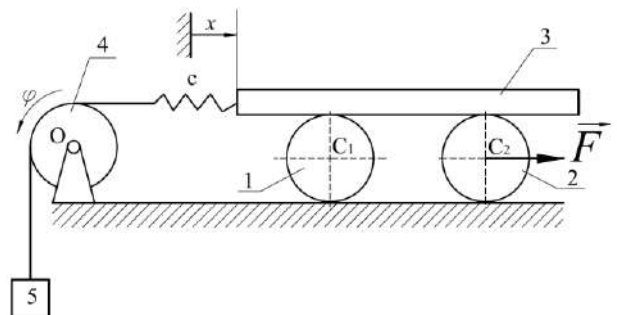
3. Систем приказан на слици састоји се од два хомогена диска, 1 и 2, маса m и полупречника R , који могу да се котрљају без клизања по хоризонталној подлози; зупчасте летве 3, масе m ; хомогеног диска 4, масе m и полупречника R и терета 5, масе m (слика 3). За зупчасту летву везана је опруга крутости c , која је другим крајем везана за лако неистегљиво уже. Уже је пребачено преко диска 4. Диск 4 обрће се око хоризонталне осе која пролази кроз тачку O . Други крај ужета везан је за терет 5 који може да се креће у вертикалној равни. На центар диска 2 делује сила хоризонталног правца, интензитета F . За задате генерализане координате (x, φ) одредити диференцијалне једначине кретања система. За $x = 0$ и $\varphi = 0$ опруга је ненапегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

sept 19

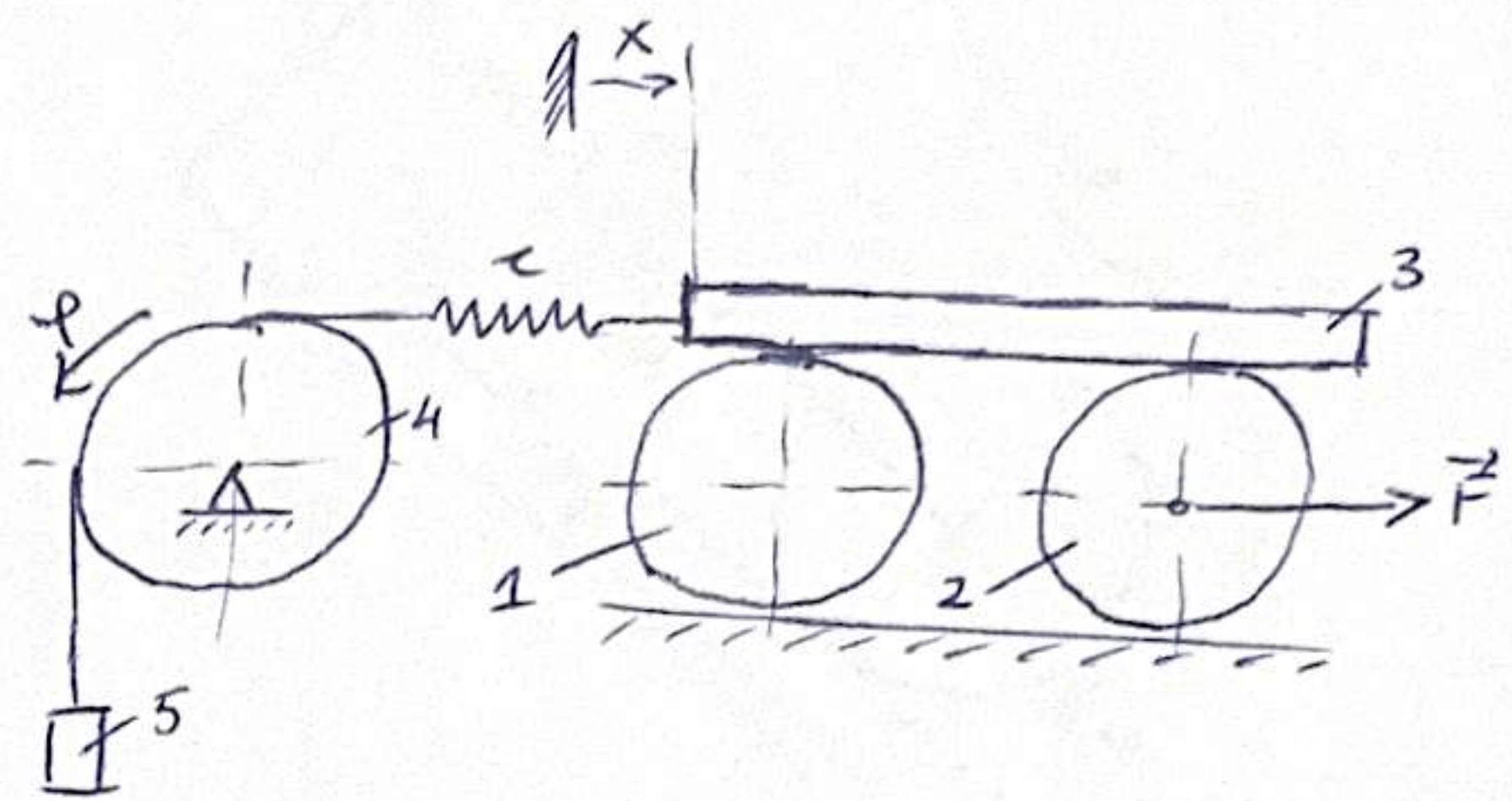
- ③ 1,2: m, R
 3: m
 4: m, R
 5: m

opruga: c , za $x=0, \varphi=0$ je neupregnuta

sila F

x, φ

dit. Γ -ne?



$$T = 2 \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{\dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{2R} \right)^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 0 \right] +$$

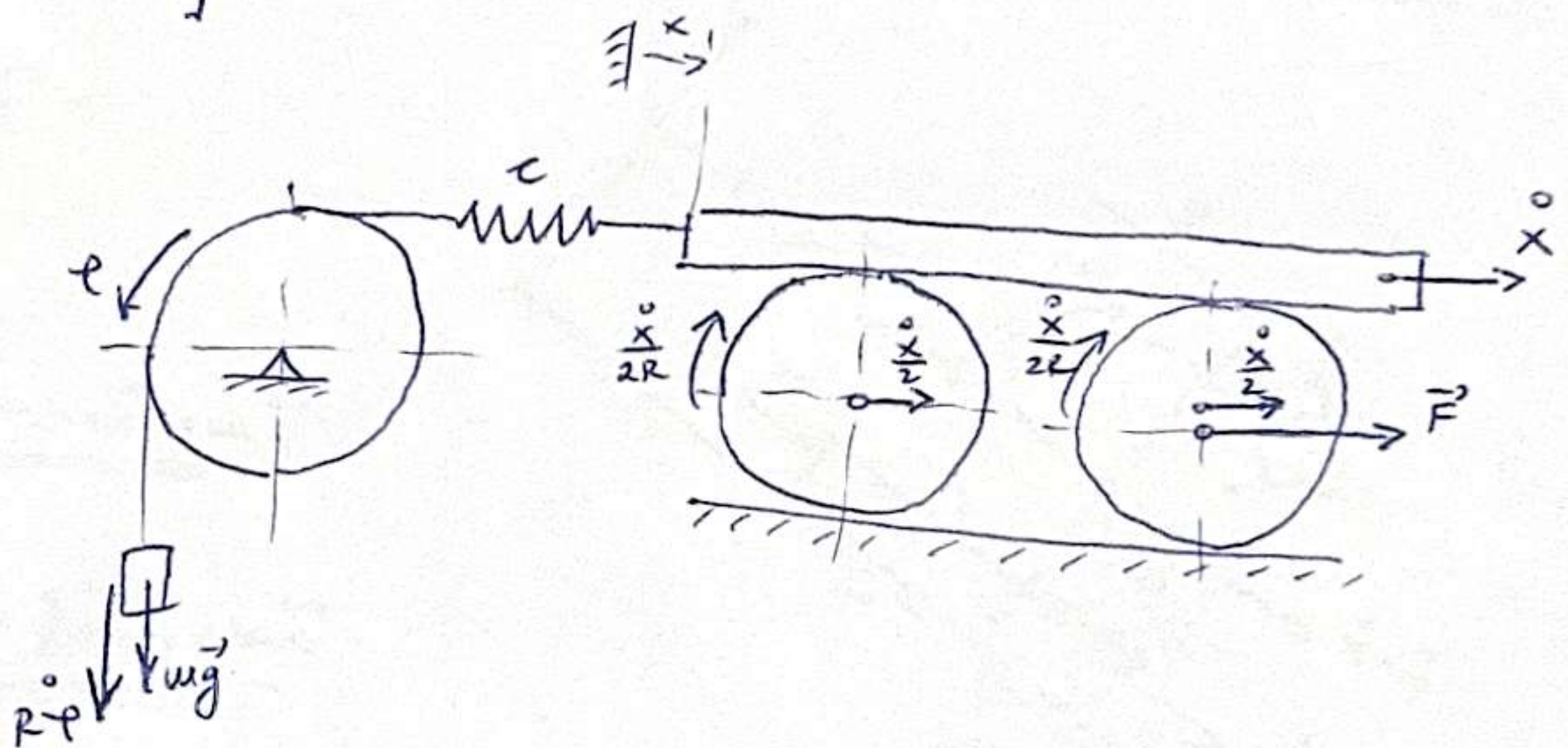
$$+ \left[0 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \dot{\varphi}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m (R \dot{\varphi})^2 + 0 \right] =$$

$$T = 2 \left[\frac{1}{8} m \dot{x}^2 + \frac{1}{16} m \dot{x}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 \right] =$$

$$T = \frac{7}{8} m \dot{x}^2 + \frac{3}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{7}{4} m \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{7}{4} m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi}$$



$$\partial A = -c \bar{z} d\bar{z} + F \cdot \frac{dx}{2} + m g R d\varphi$$

$$\bar{z} = \bar{x} + R \bar{\varphi} \quad \rightarrow \quad d\bar{z} = dx + R d\varphi \quad \rightarrow \quad \bar{z} = x + R \varphi$$

$$\partial A = -c (x + R \varphi) (dx + R d\varphi) + \frac{1}{2} F dx + m g R d\varphi =$$

$$\partial A = -c x dx - c R \varphi dx - c x R d\varphi - c R^2 \varphi d\varphi + \frac{1}{2} F dx + m g R d\varphi$$

$$\frac{7}{4} m \ddot{x} = -c x - c R \varphi + \frac{1}{2} F$$

$$\frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi} = -c x R - c R^2 \varphi + m g R$$

МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799

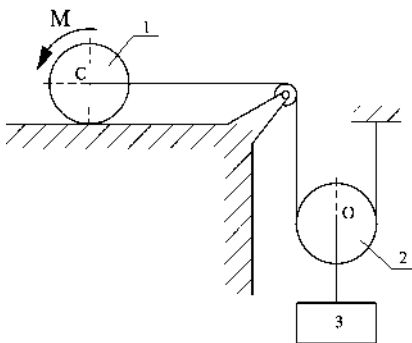
14. фебруар 2019.

Прва група

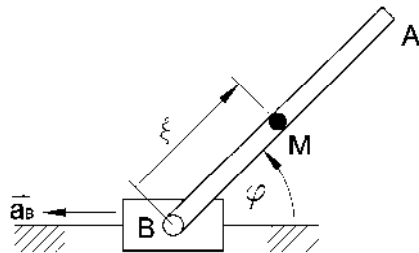
1. Хомогени диск 1, масе m и полупречника R , котрља се без клизања по хоризонталној подлози (слика 1). За центар диска 1 је везано неистегљиво уже које је пребачено преко хомогеног диска 2, масе m и полупречника R , а затим везано за непомићну тачку. За центар диска 2 неистегљивим ужетом везано је тело 3 масе m . Крак отпора котрљању диска 1 по подлози је $k = 0.1R$. Одредити интензитет момента M да би се тело 3 кретало константним убрзањем интензитета g , смера навише.

2. Цев AB , занемарљиве масе, креће се у вертикалној равни. Крајем B , цев је везана зглобно за клизач који се креће дуж хоризонталне праволинијске вођице константним убрзањем $a_B = 2g$ (слика 2). Закон промене угла је $\varphi = \omega t$. Кроз цев може да се креће куглица M масе m . У почетном тренутку куглица је била у положају B и имала почетну релативну брзину $V_{r0} = g/(2\omega)$. Одредити коначну једначину релативног кретања куглице у односу на цев ($\xi = \xi(t)$), као и укупну реакцију везе у функцији од времена.

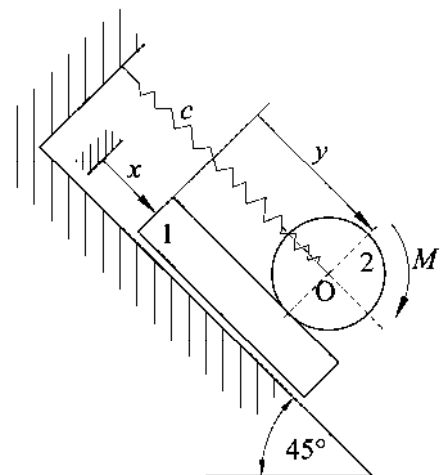
3. Материјални систем (слика 3) састоји се од тела 1, масе m и диска 2, масе m и полупречника R . На диск делује спрег момента интензитета M . Центар диска везан је опругом крутости c , чији је други крај везан за непокретну раван. Ако се диск по телу котрља без проклизавања, а систем креће по глаткој стрмој равни нагибног угла 45° , написати диференцијалне једначине кретања система за задате генерализане координате. У положају $x = y = 0$ опруга је ненапрегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

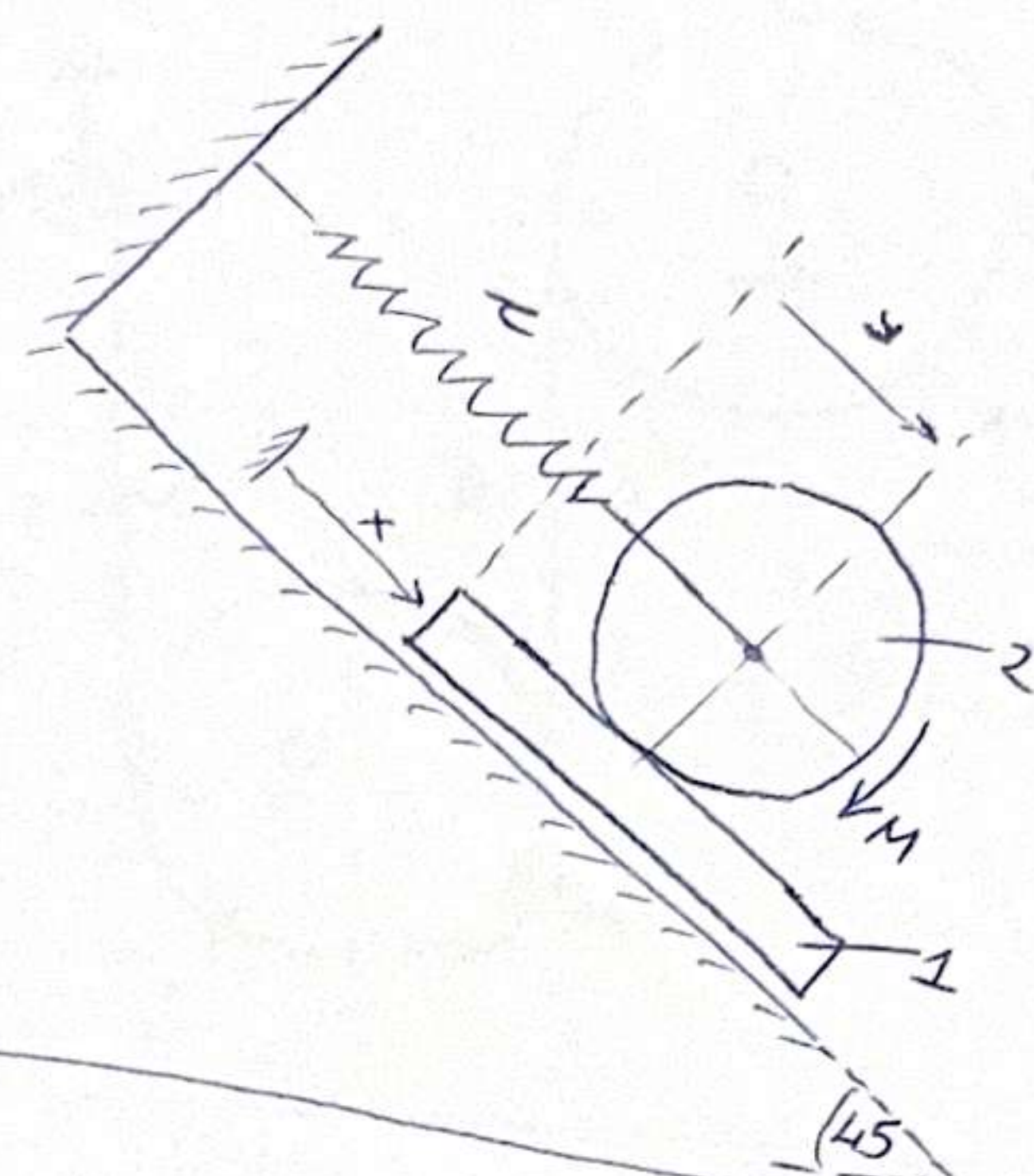
februar 19

- ③ 1: m
2: m, R

spring M

opruqa c , za $x=0, y=0$ je nenapregnuta

def. τ -ne za x, y ?



$$T = \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + 0 \right] + \left[\frac{1}{2} m (\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \left(\frac{\dot{y}}{R} \right)^2 \right] =$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{y} + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{4} m \dot{y}^2 =$$

$$T = m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{y} + \frac{3}{4} m \dot{y}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + m\dot{y}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 2m\ddot{x} + m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{3}{2} m \dot{y} + m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{y} + m\ddot{x}$$

$$\partial A = mg \frac{\sqrt{2}}{2} \partial x + mg \frac{\sqrt{2}}{2} (\partial x + \partial y) - c \partial \zeta + M \frac{\partial y}{R}$$

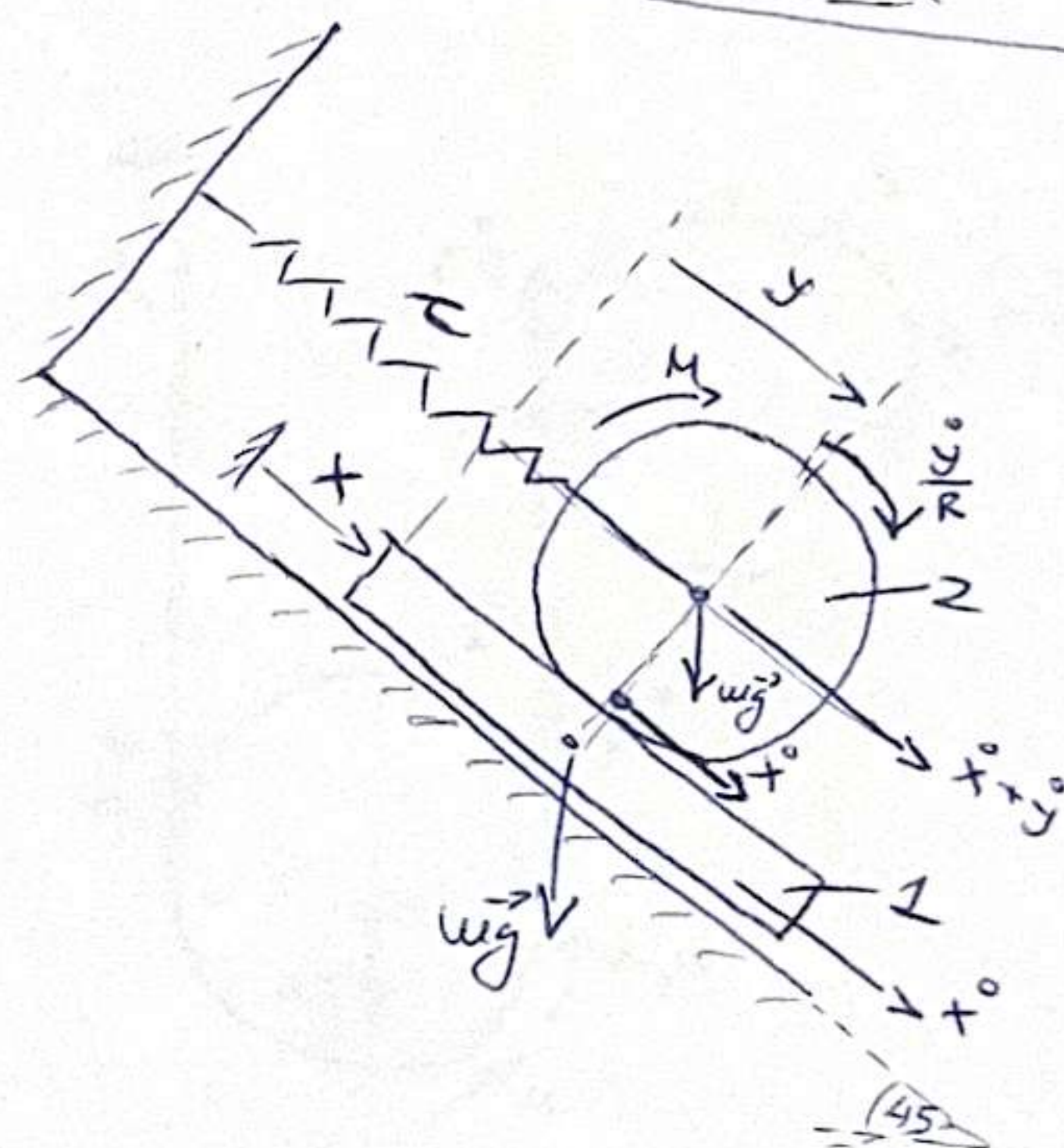
$$\zeta = x + y \rightarrow d\zeta = dx + dy \rightarrow \zeta = x + y$$

$$\partial A = mg \sqrt{2} \partial x + mg \frac{\sqrt{2}}{2} \partial y - c(x+y)(\partial x + \partial y) + \frac{M}{R} \partial y$$

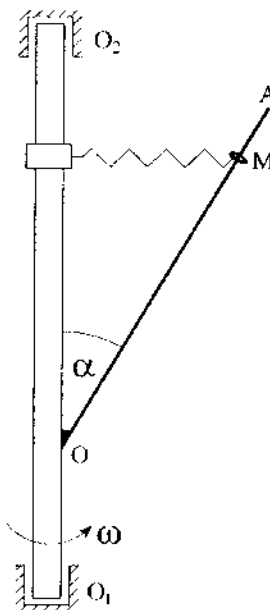
$$\partial A = mg \sqrt{2} \partial x + mg \frac{\sqrt{2}}{2} \partial y - cx \partial x - cy \partial y - cx \partial y - cy \partial x + \frac{M}{R} \partial y$$

$$2m\ddot{x} + m\ddot{y} = mg \sqrt{2} - cx - cy$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{y} + m\ddot{x} = mg \frac{\sqrt{2}}{2} - cx - cy + \frac{M}{R}$$

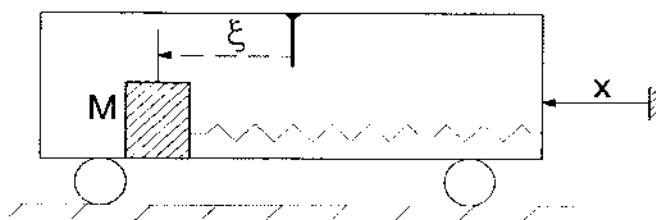


1. Po glatkoj cevi OA može da klizi prsten M mase m (slika 1). Cev je u tački O pod uglom $\alpha = 30^\circ$ zavarena za vertikalnu osovinu O_1O_2 koja može da se obrće oko vertikalne ose. Masa cevi je $2m$, a poluprečnik inercije u odnosu na osu obrtanja je $i_{O_2} = R$. Kretanje prstena ograničava horizontalna opruga krutosti $c = mg/R$. U početnom trenutku prsten je bio u položaju A u relativnom mirovanju, dužina opruge je iznosila $2R$, a ugaona brzina ω_0 . Dužina nenapregnute opruge je R . Odrediti ugaonu brzinu cevi u trenutku kada prsten stigne u položaj u kome je opruga nenapregnuta, kao i relativnu brzinu prstena u tom trenutku.



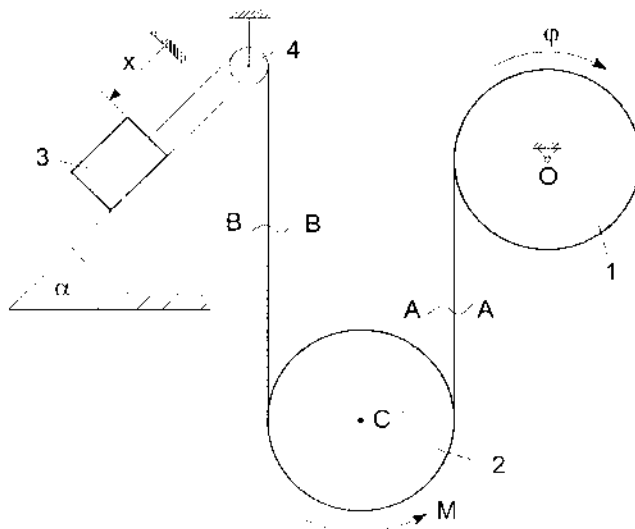
Slika 1.

2. Kolica se kreću po horizontalnoj podlozi (slika 2), zakon kretanja dat je sa $x = \sin(\omega t)$, gde je ω poznata konstanta. Unutar kolica nalazi se teret M mase m koji može da klizi po glatkoj unutrašnjoj horizontalnoj podlozi. Za teret je vezana opruga krutosti $c = 2m\omega^2$. Položaj tereta u odnosu na kolica određen je relativnom koordinatom ξ . U početnom trenutku, teret je bio u relativnom mirovanju u koordinatnom početku ($\xi = 0$), i opruga je tada bila nenapregnuta. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M .



Slika 2.

3. Sistem prikazan na slici ispod nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva homogena diska 1 i 2 mase m i poluprečnika R , i tereta 3 mase m koji može da klizi po glatkoj strmoj ravni nagiba $\alpha = 30^\circ$. Disk 1 obrće se oko horizontalne ose koja prolazi tačku O . Uže je prebačeno preko kotura 4 zanemarljive mase. Između užeta i diskova nema proklizavanja. Na disk 2 deluje spreg sila momenta $M = mgR/4$. Za zadate generalisane koordinate x i φ odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema, kao i sile u užetu u preseccima $A-A$ i $B-B$.



oktobar 2 19

③ 1, 2: m, R

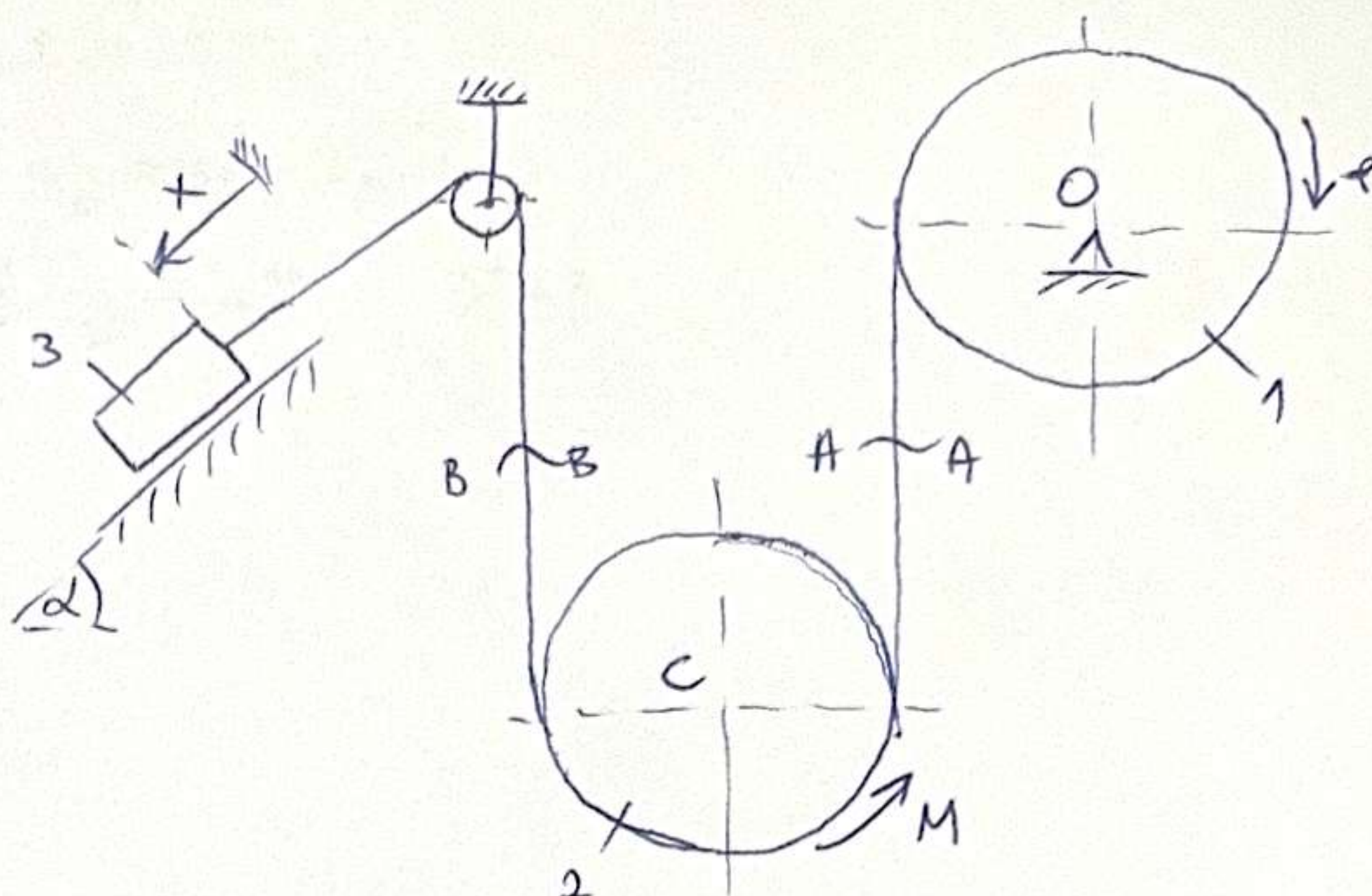
3: m

$\alpha = 30^\circ$

moment $M = \frac{mgR}{4}$

dd. T -ne za x, φ ?

$S_A = ?$, $S_B = ?$



$$T_1 = 0 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m (R\dot{\alpha} + \dot{x})^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\alpha}^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(R \frac{R\dot{\varphi} - \dot{x}}{2R} + \dot{x} \right)^2 + \frac{1}{4} mR^2 \left(\frac{R\dot{\varphi} - \dot{x}}{2R} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{R\dot{\varphi} + \dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} mR^2 \left(\frac{R\dot{\varphi} - \dot{x}}{2R} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x} + \dot{x}^2}{4} \right) + \frac{1}{4} m \left(\frac{R^2\dot{\varphi}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{x} + \dot{x}^2}{4} \right) = \\ &= \frac{3}{16} mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8} mR\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{3}{16} m\dot{x}^2 \end{aligned}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + 0$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{11}{16} m\dot{x}^2 + \frac{1}{8} mR\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{7}{16} mR^2\dot{\varphi}^2$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{11}{8} m\dot{x} + \frac{1}{8} mR\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{11}{8} m\ddot{x} + \frac{1}{8} mR\ddot{\varphi} \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{7}{8} mR^2\dot{\varphi} + \frac{1}{8} mR\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{7}{8} mR^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{8} mR\ddot{x} \end{aligned}$$

$$\partial A = mg \cos 60^\circ \partial x - mg \partial y_c + M \partial \alpha =$$

$$\partial A = \frac{1}{2} mg \partial x - mg (R \partial \alpha + \partial x) + \frac{1}{4} mgR \left(\frac{R \partial \alpha - \partial x}{2R} \right) =$$

$$\partial A = \frac{1}{2} mg \partial x - mgR \frac{R \partial \varphi - \partial x}{2R} - mg \partial x + \frac{1}{4} mg \cdot \frac{1}{2} R \partial \varphi - \frac{1}{4} mg \frac{1}{2} \partial x =$$

$$\partial A = mg \partial x \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{8} \right) + mgR \partial \varphi \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8} \right) =$$

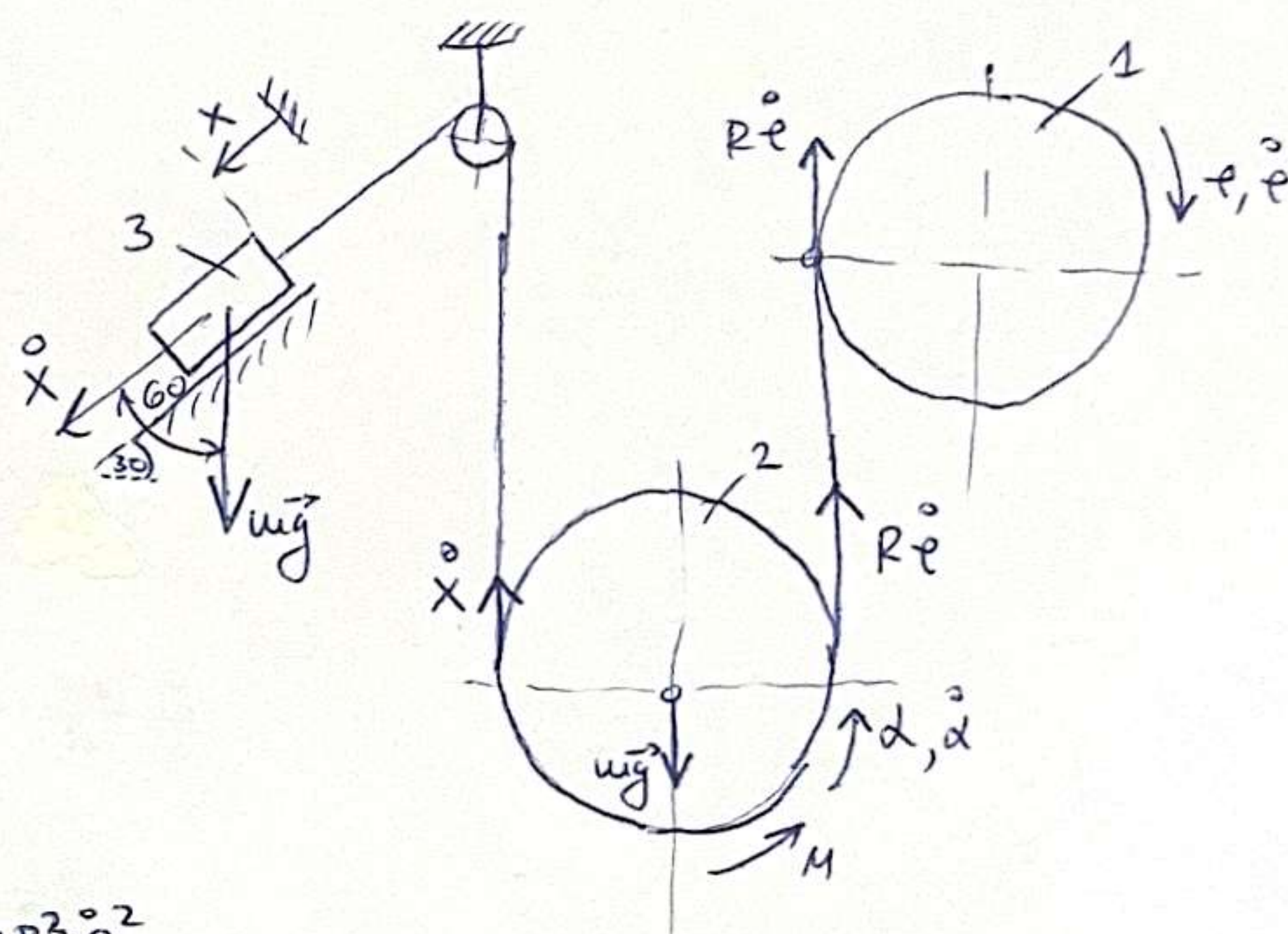
$$\partial A = -\frac{1}{8} mg \partial x - \frac{3}{8} mgR \partial \varphi$$

$$\frac{11}{8} m\ddot{x} + \frac{1}{8} mR\ddot{\varphi} = -\frac{1}{8} mg \quad / \cdot \frac{8}{m} \Rightarrow$$

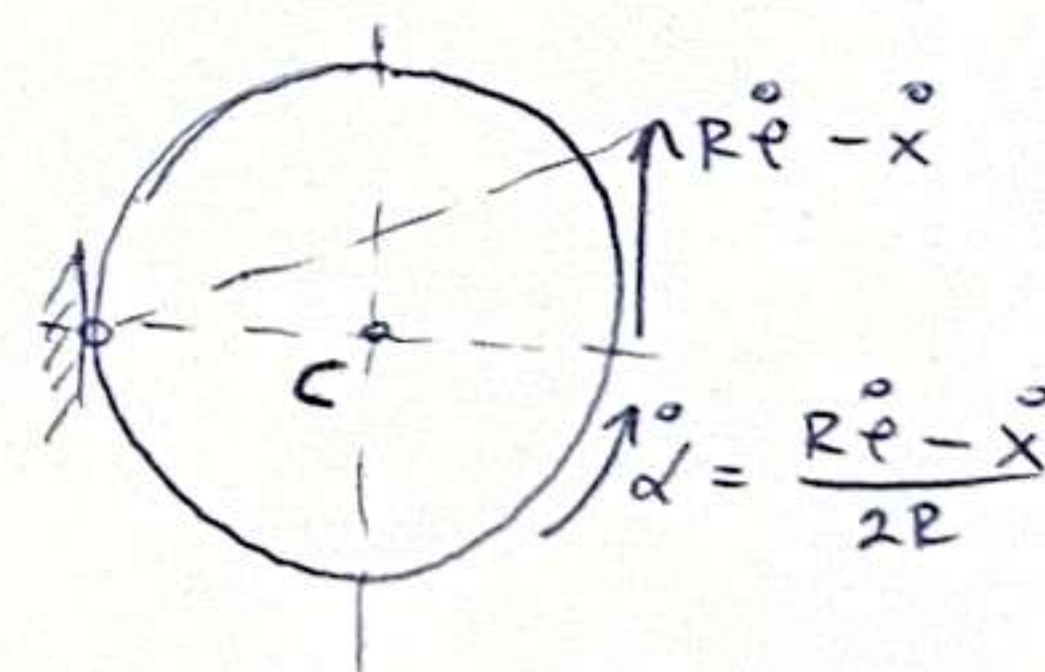
$$11\ddot{x} + R\ddot{\varphi} = -g \quad (1)$$

$$\frac{7}{8} mR^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{8} mR\ddot{x} = -\frac{3}{8} mgR \quad / \cdot \frac{8}{mR} \Rightarrow$$

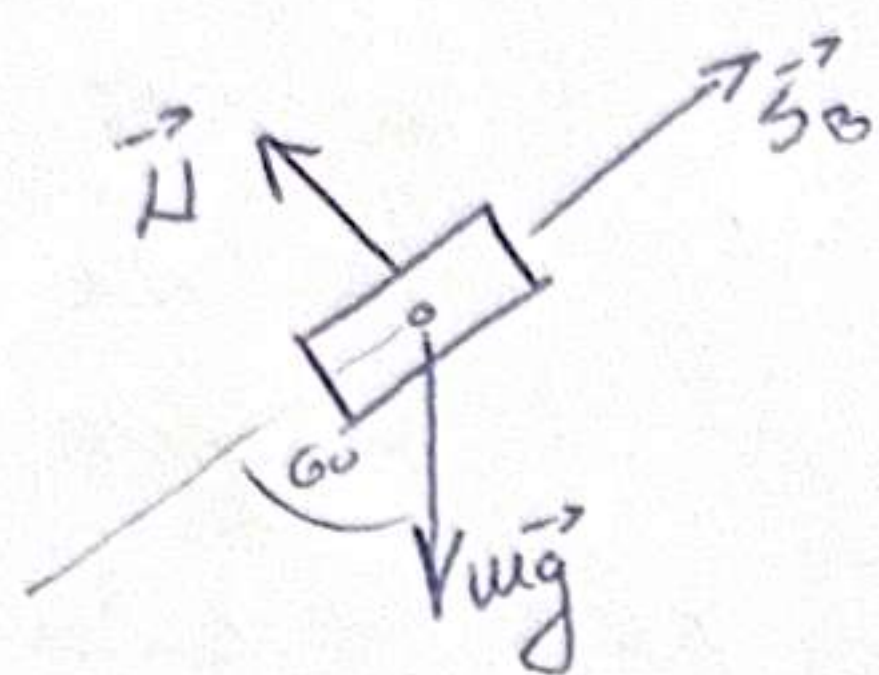
$$7R\ddot{\varphi} + \ddot{x} = -3g \quad (2)$$



disk 2 - relativno:



apsolutno: $v_c = R\dot{\alpha} + \dot{x}$



$$m \vec{a}_3 = m \vec{g} + \vec{S}_B + \vec{N}$$

$$x: m \ddot{x} = mg \cos 60 - S_B$$

$$S_B = \frac{1}{2} mg - m \ddot{x}, \quad \ddot{x} = ?$$

$$(1) \rightarrow R \ddot{\varphi} = -g - 11 \ddot{x}$$

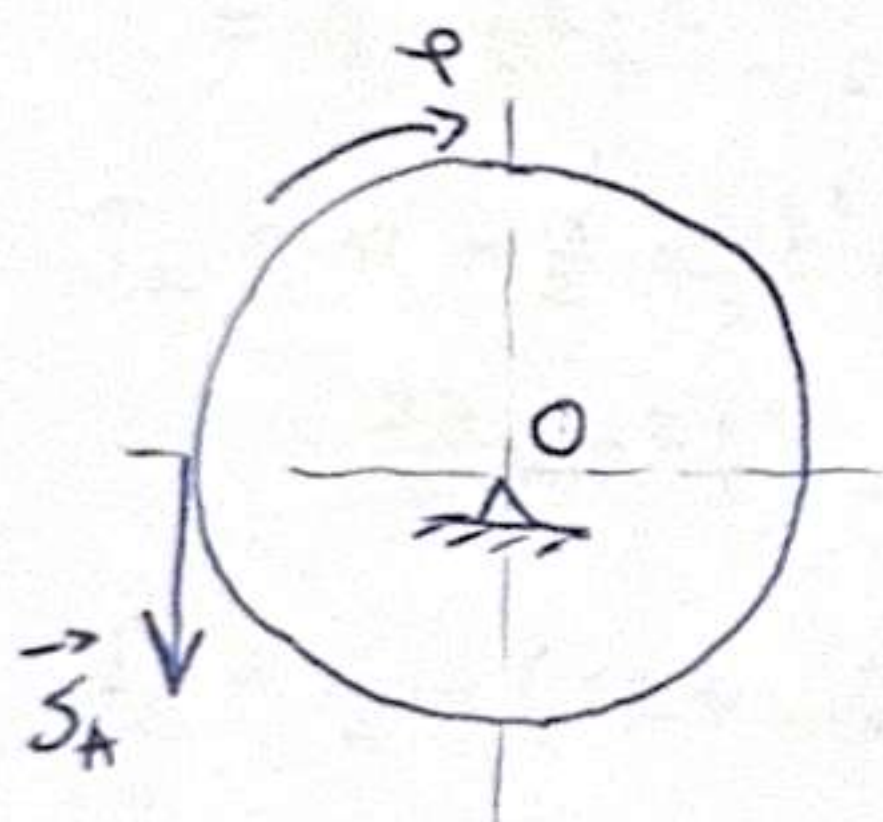
$$(2) \rightarrow -7g - 77 \ddot{x} + \ddot{x} = -3g$$

$$-76 \ddot{x} = 4g$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{19} g$$

$$S_B = \frac{1}{2} mg + \frac{1}{19} mg$$

$$\boxed{S_B = \frac{21}{38} mg}$$



$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum M_{Oz}$$

$$L_{Oz} = 0 + J_{Oz} \dot{\varphi} = \frac{m R^2}{2} \dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi} = -S_A \cdot R$$

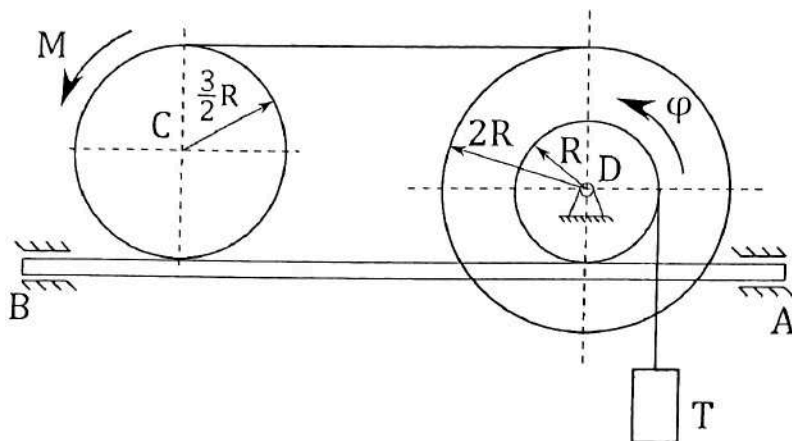
$$S_A = -\frac{1}{2} m R \ddot{\varphi}, \quad \ddot{\varphi} = ?$$

$$(1) \rightarrow R \ddot{\varphi} = -g - 11 \ddot{x} = -g + 11 \cdot \frac{1}{19} g = -\frac{8}{19} g$$

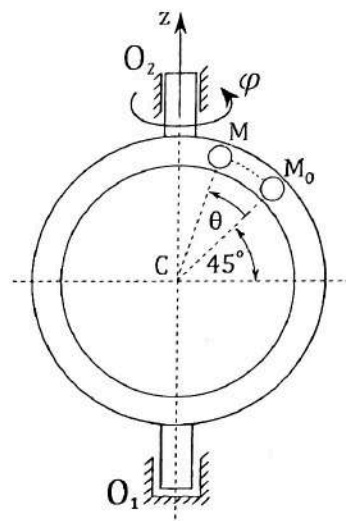
$$S_A = -\frac{1}{2} m \left(-\frac{8}{19} g\right)$$

$$\boxed{S_A = \frac{4}{19} mg}$$

1. Диск полупречника $\frac{3}{2}R$ може да се котрља без клизања по штапу AB масе $2m$. На диск делује спрег сила интензитета момента спрега $M = 3mgR$. Штап AB доводи у кретање коаксијални цилиндар масе $4m$, полупречника R и $2R$ и полупречника инерције $i_0 = \sqrt{2}R$, при чему између њих нема проклизавања. Коаксијални цилиндар може да се обрће око хоризонталне осе која пролази кроз тачку D . На мањи цилиндар намотано је лако неистегљиво уже о које је обешен терет T масе m . На већи цилиндар намотано је лако неистегљиво уже, чији је други крај намотан на диск. Одредити угаоно убрзање коаксијалног цилиндра.

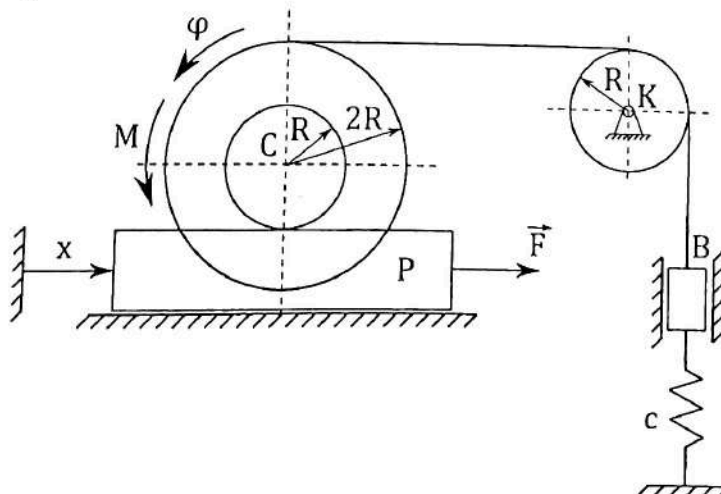


Слика 1



Слика 2

2. На Сл. 2 приказан је танак кружни прстен полупречника R , који може да се обрће око вертикалне осе z по закону $\varphi = \sqrt{\frac{g}{R}}t$. Унутар прстена може да се креће тачка M масе $m = 1 \text{ kg}$, под дејством привлачне централне силе интензитета $F = 2\sqrt{3}mg$, са центром у тачки C . Тачка је започела кретање из положаја приказаног на слици, одређеним углом од 45° , а интензитет почетне брзине тачке је $V_0 = \sqrt{4gR}$. Одредити укупну реакцију жљеба на тачку M када она заузме положај одређен углом $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.
3. Кућиште P масе m , које се налази под дејством силе интензитета F правца и смера приказаног на слици, може да клизи по глаткој хоризонталној подлози. По кућишту може да се котрља без клизања коаксијални цилиндар полупречника R и $2R$, масе $2m$ и полупречника инерције $i_0 = \sqrt{2}R$, на који делује спрег сила интензитета момента спрега M . На коаксијални цилиндар је намотано лако неистегљиво уже које је пребачено преко диска K полупречника R и масе $3m$. За други крај ужета везан је клизач B масе m који се креће по вертикалној вођици. Терет је такође везан за опругу крутости c . Написати диференцијалне једначине кретања система. За генерализане координате усвојити $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$. У почетном тренутку, када су вредности генерализаних координата $x(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$, опруга је била ненапрегнута.



Слика 3

januar 22

③ P: m

sila F

spreg M

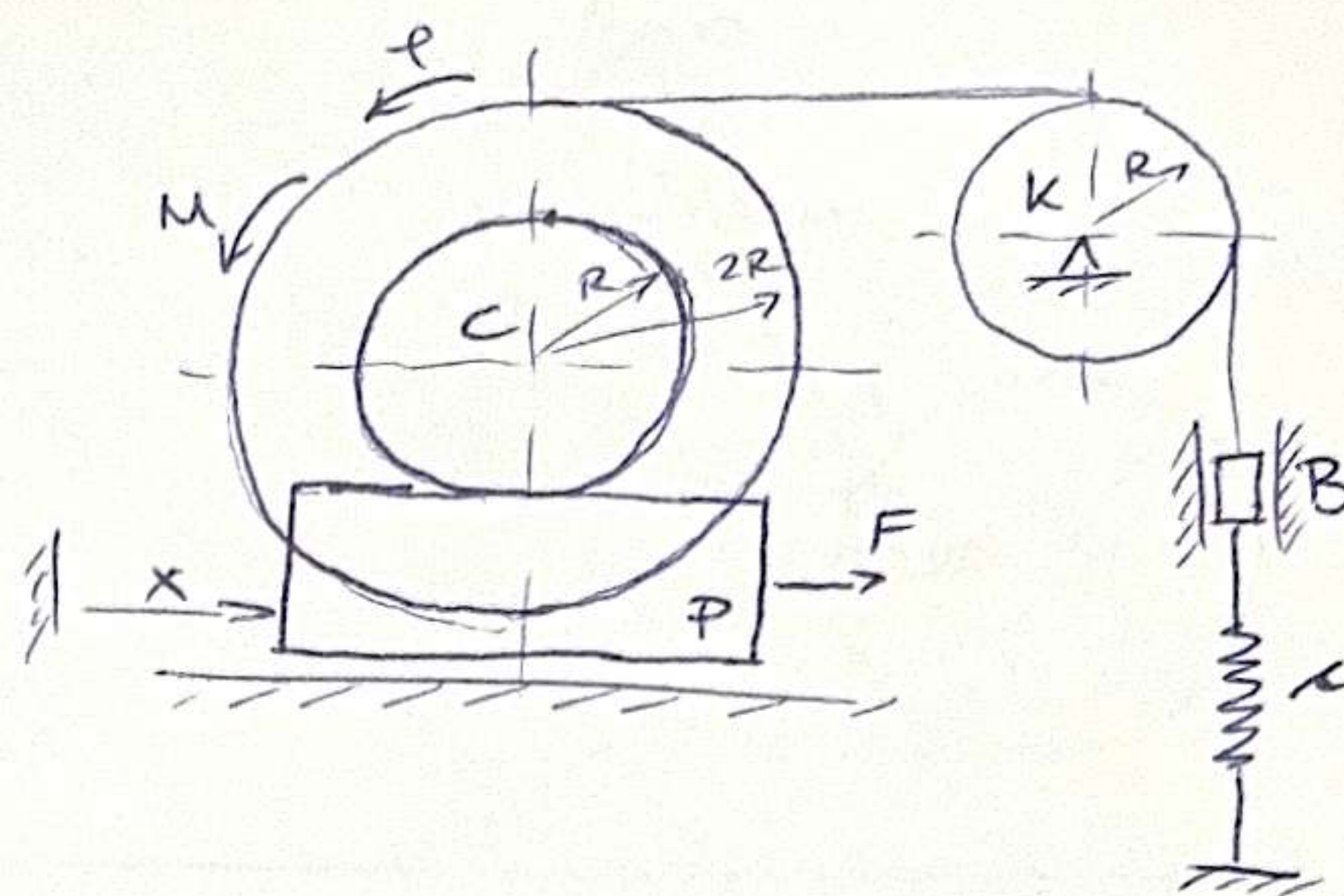
cilindar: R, 2R, 2m, $z_0 = \sqrt{2}R$

disk K: R, 3m

B: m

opruga: c, za $x=0, t=0$ je neupreguta

dlf. i-ne kretanja?



$$T = T_P + T_C + T_K + T_B$$

$$T_P = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

$$T_C = \frac{1}{2} 2m (\dot{R}\dot{\varphi} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2} 2m \cdot 2R^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= mR^2 \dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x} + m\dot{x}^2 + 2mR^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= 3mR^2 \dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x} + m\dot{x}^2$$

$$T_K = 0 + \frac{1}{2} \frac{3mR^2}{2} \left(\frac{3R\ddot{\varphi} - \ddot{x}}{R} \right)^2 = \frac{3}{4} mR^2 \frac{9R^2 \ddot{\varphi}^2 - 6R\ddot{\varphi}\ddot{x} + \ddot{x}^2}{R^2} =$$

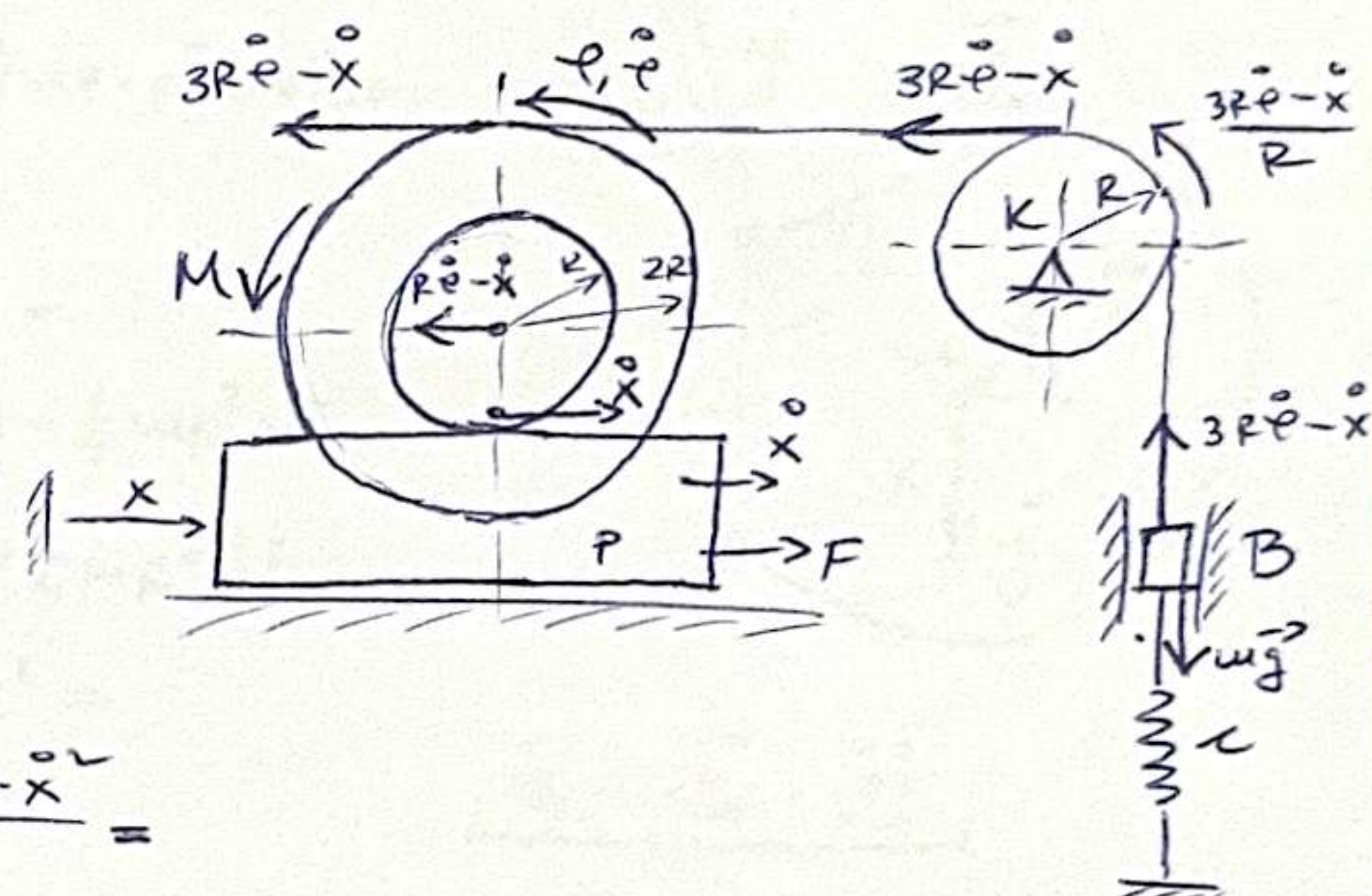
$$= \frac{27}{4} mR^2 \ddot{\varphi}^2 - \frac{9}{2} mR\ddot{\varphi}\ddot{x} + \frac{3}{4} m\ddot{x}^2$$

$$T_B = \frac{1}{2} m (3R\ddot{\varphi} - \ddot{x})^2 = \frac{9}{2} mR^2 \ddot{\varphi}^2 - 3mR\ddot{\varphi}\ddot{x} + \frac{1}{2} m\ddot{x}^2$$

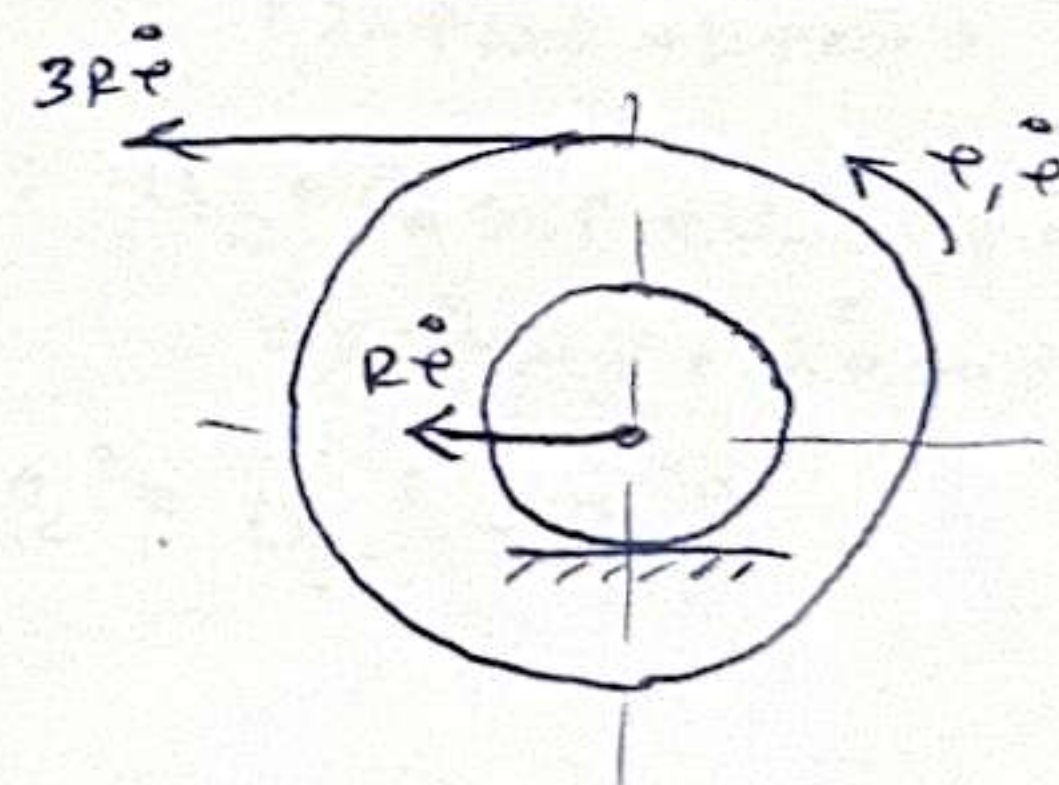
$$T = \frac{11}{4} m\ddot{x}^2 - \frac{19}{2} mR\ddot{\varphi}\ddot{x} + \frac{57}{4} mR^2 \ddot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \ddot{x}} = \frac{11}{2} m\ddot{x} - \frac{19}{2} mR\ddot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{x}} \right) = \frac{11}{2} m\ddot{\dot{x}} - \frac{19}{2} mR\ddot{\dot{\varphi}}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \ddot{\varphi}} = \frac{57}{2} mR^2 \ddot{\varphi} - \frac{19}{2} mR\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \ddot{\varphi}} \right) = \frac{57}{2} mR^2 \ddot{\dot{\varphi}} - \frac{19}{2} mR\ddot{\dot{x}}$$



cilinder - relativno:



$$(\uparrow y) \quad \partial A = F\partial x + M\partial \varphi - c \int d\zeta - mg\partial y_B,$$

$$\zeta = 3R\ddot{\varphi} - \ddot{x} \rightarrow d\zeta = 3R\ddot{\varphi} - \ddot{x} \rightarrow \zeta = 3R\ddot{\varphi} - \ddot{x}$$

$$\ddot{y}_B = 3R\ddot{\varphi} - \ddot{x} \rightarrow \partial y_B = 3R\ddot{\varphi} - \ddot{x}$$

$$\partial A = F\partial x + M\partial \varphi - c(3R\ddot{\varphi} - \ddot{x})(3R\ddot{\varphi} - \ddot{x}) - mg(3R\ddot{\varphi} - \ddot{x}) =$$

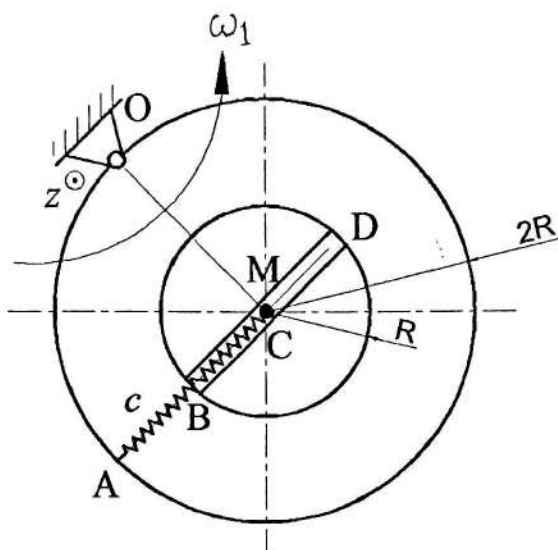
$$\partial A = F\partial x + M\partial \varphi - c \cdot 9R^2 \ddot{\varphi}^2 + c \cdot 3R \cdot \ddot{x} \ddot{\varphi} + c \cdot 3R \ddot{\varphi} \ddot{x} - c \ddot{x} \ddot{x} - 3mgR\ddot{\varphi} + mg\ddot{x}$$

$$\frac{11}{2} m\ddot{\dot{x}} - \frac{19}{2} mR\ddot{\dot{\varphi}} = F + 3cR\ddot{\varphi} - c\ddot{x} + mg$$

$$\frac{57}{2} mR^2 \ddot{\dot{\varphi}} - \frac{19}{2} mR\ddot{\dot{x}} = M - 9cR^2 \ddot{\varphi} + 3cR\ddot{x} - 3mgR$$

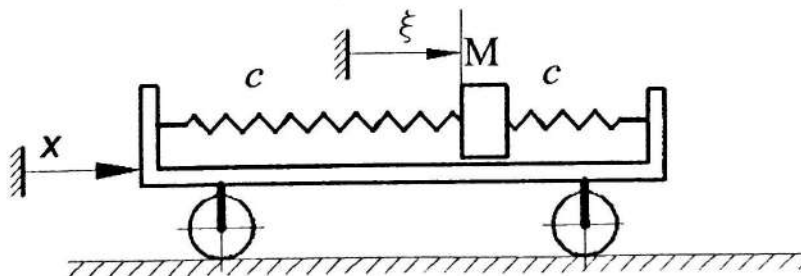
5/17 2021.

1. Horizontalna ploča oblika koakcijalnog diska poluprečnika R i $2R$, mase m i poluprečnika inercije $i_0=3R$ može da se obrće oko vertikalne ose Oz . Po kanalu BD kreće se tačka M mase m koja je oprugom krutosti c vezana za tačku A ploče. U početnom trenutku, kada se tačka M nalazila u položaju D sistem je mirovao. Odrediti ugaonu brzinu ploče (ω_1) u trenutku t_1 kada tačka M stigne u tačku C (položaj prikazan na slici). Veze su idealne. Dužina nenapregnute opruge je R .



Slika uz zadatak 1

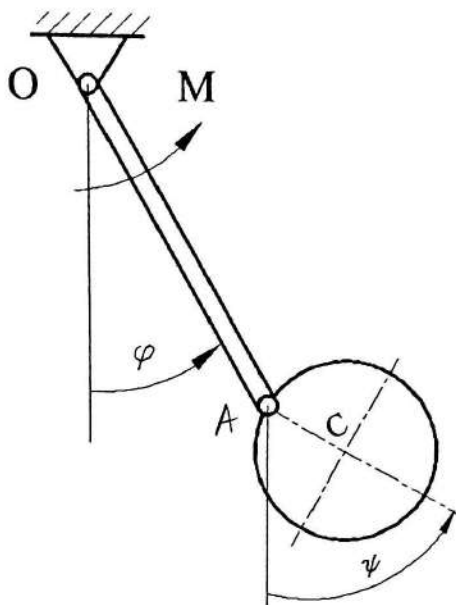
2. Teret M mase $m=1$ koji je oprugama krutosti $c=1$ vezan za kućište kreće se po idealno glatkoj površini istog kućišta. Opruga je nenapregnuta u položaju $\xi=0$ (koordinatna osa ξ vezana je za kućište). Homogeni diskovi kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Kućište se kreće po zakonu $x=\sin(t)$. U početnom trenutku sistem je mirovao i relativna koordinata tačke M bila je $\xi(0)=0$. Mase diskova i kućišta zanemariti. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M , $\xi=\xi(t)$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.



Slika uz zadatak 2

JY17 2021.

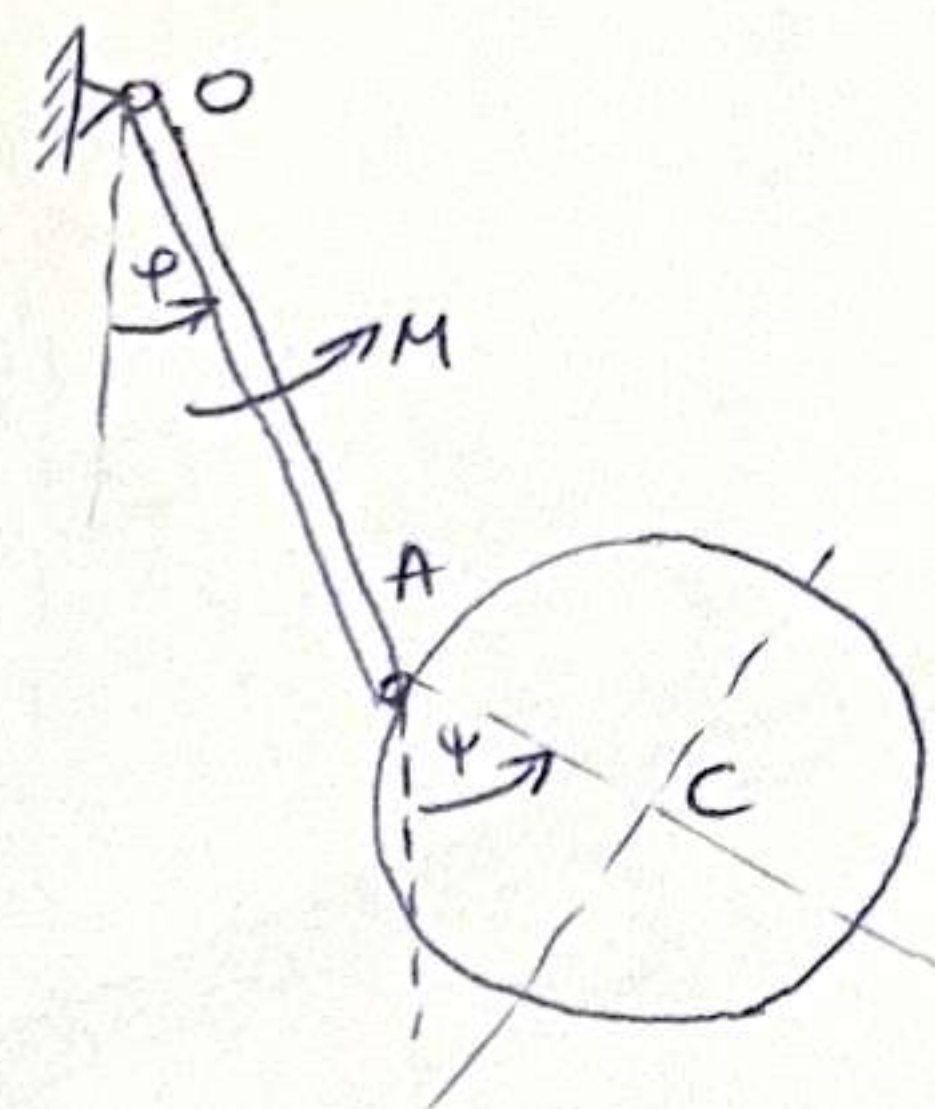
3. Štap OA dužine $2R$, mase m zglogno je vezan za nepomičnu tačku O i disk kao na slici. Homogeni disk je mase m i poluprečnika R . Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Na štap djeluje spreg sila momenta intenziteta M , pravca i smjera kao na slici. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema u odnosu na generalisane coordinate φ i ψ .



Slika uz zadatak 3

jun 21

- ③ OA: $2R, m$
 disk: R, m
 spring M
 d.t. i-ve za φ, ψ ?



$$T = T_{OA} + T_C$$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} m (\dot{R}\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m (2R)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} m R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_C = \frac{1}{2} m \dot{U}_C^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} m ((2R\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\psi}\cos\psi)^2 + (2R\dot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\psi}\sin\psi)^2) + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (4R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + R^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\varphi\cos\psi + 4R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + R^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\psi) + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (4R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi)) + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (4R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)) + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$$

$$= 2mR^2\dot{\varphi}^2 + 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{3}{4}mR^2\dot{\psi}^2$$

$$T = \frac{8}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2 + 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{3}{4}mR^2\dot{\psi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{16}{3} m R^2 \dot{\varphi} + 2mR^2\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\psi} + 2mR^2\dot{\varphi}\cos(\varphi - \psi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{16}{3} m R^2 \ddot{\varphi} + 2mR^2\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)(\dot{\varphi} - \dot{\psi})$$

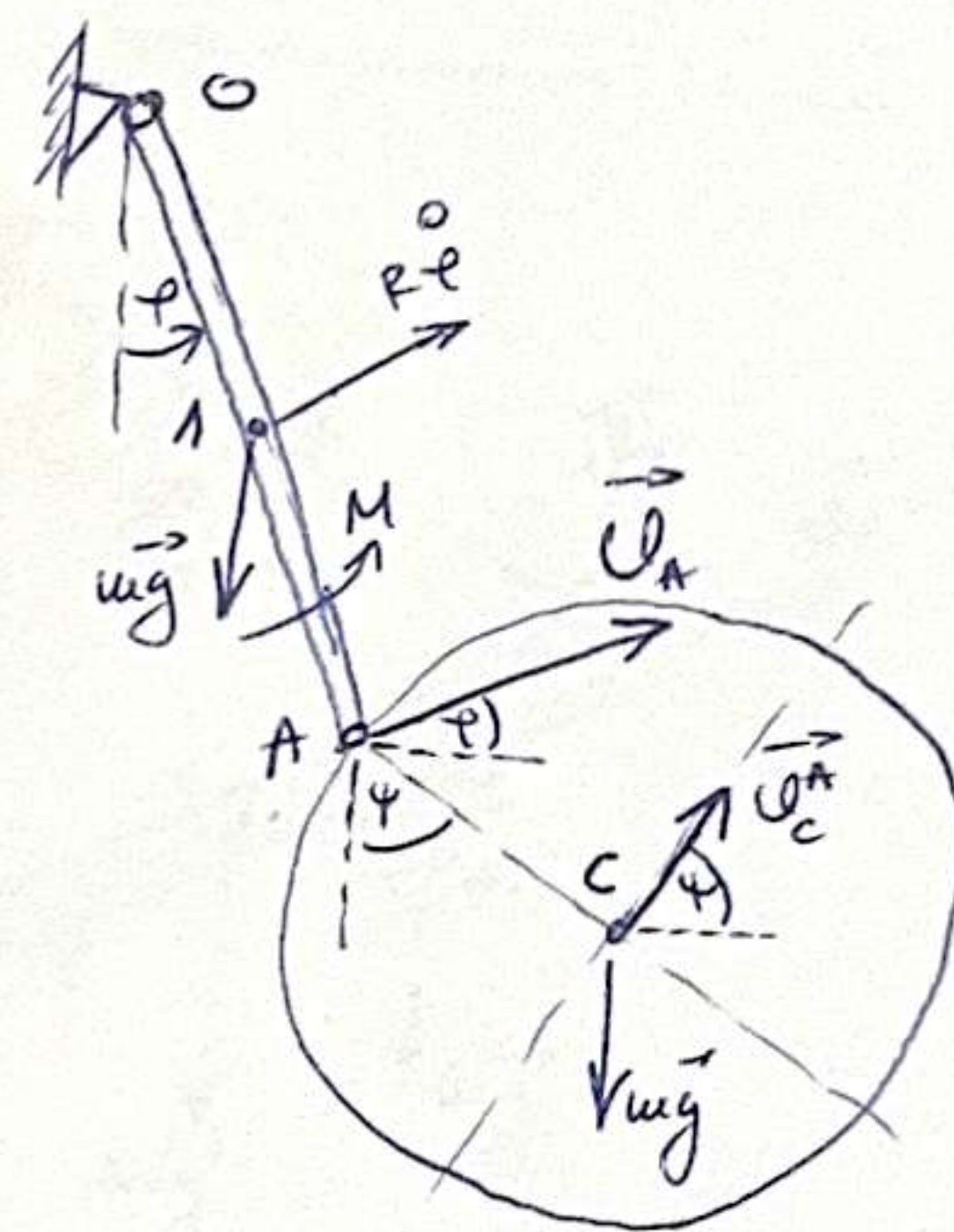
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\psi} + 2mR^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\varphi}\sin(\varphi - \psi)(\dot{\varphi} - \dot{\psi})$$

(↑) $\partial A = -mg\partial y, -mg\partial y_C + M\partial \varphi$, $\dot{y}_1 = 2R\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\dot{y}_C = 2R\dot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\psi}\sin\psi$

$$\partial A = -mgR\sin\varphi\partial\varphi - mg \cdot 2R\sin\varphi\partial\varphi - mgR\sin\psi\partial\psi + M\partial\varphi$$

$$\frac{16}{3} m R^2 \ddot{\varphi} + 2mR^2\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) = -3mgR\sin\varphi + M$$

$$\frac{3}{2} m R^2 \ddot{\psi} + 2mR^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\varphi}\sin(\varphi - \psi)(\dot{\varphi} - \dot{\psi}) = -mgR\sin\psi$$



$$\vec{U}_C = \vec{U}_A + \vec{U}_C^A$$

$$x: U_{Cx} = U_A \cos\varphi + U_C^A \cos\psi = 2R\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\psi}\cos\psi$$

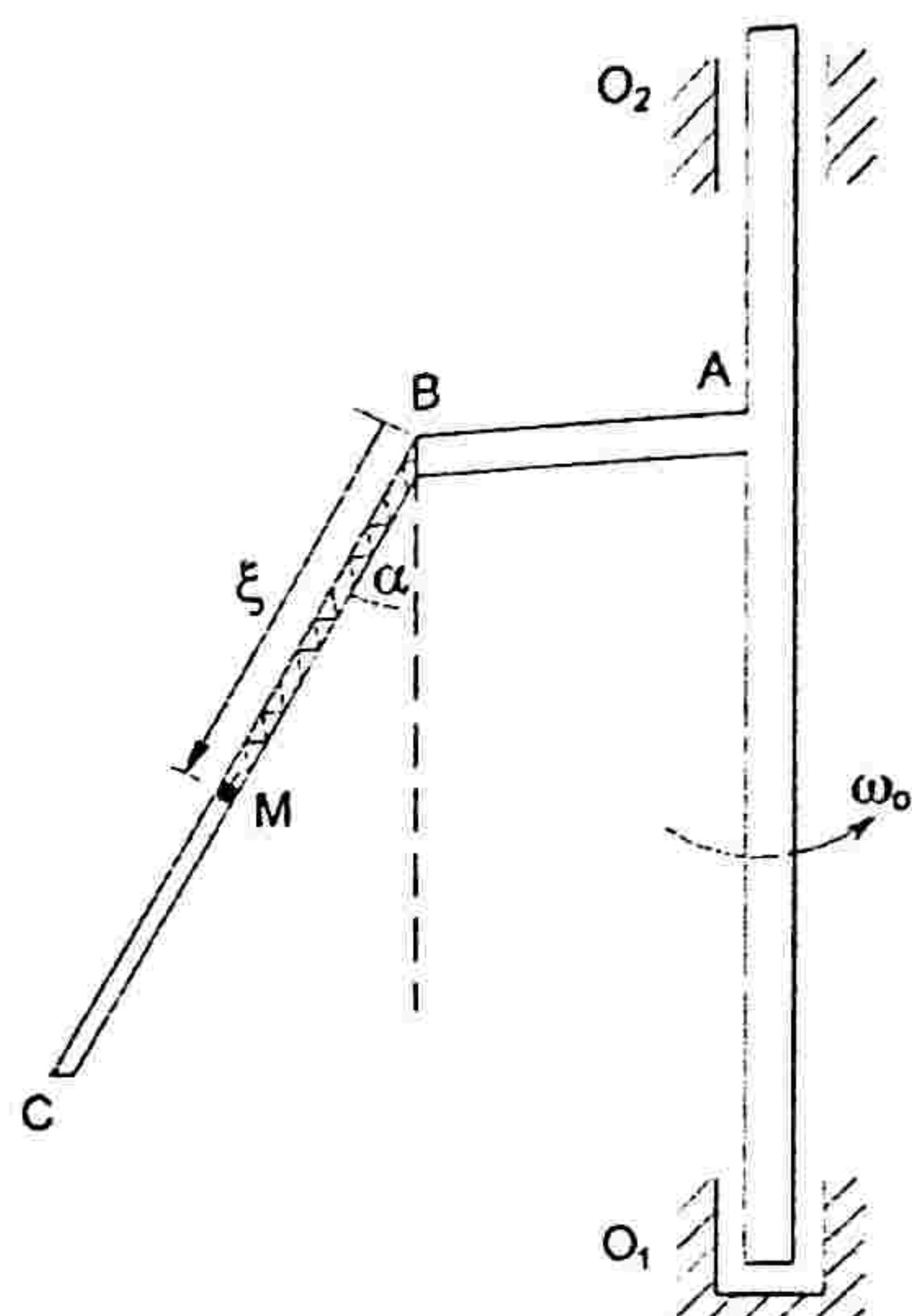
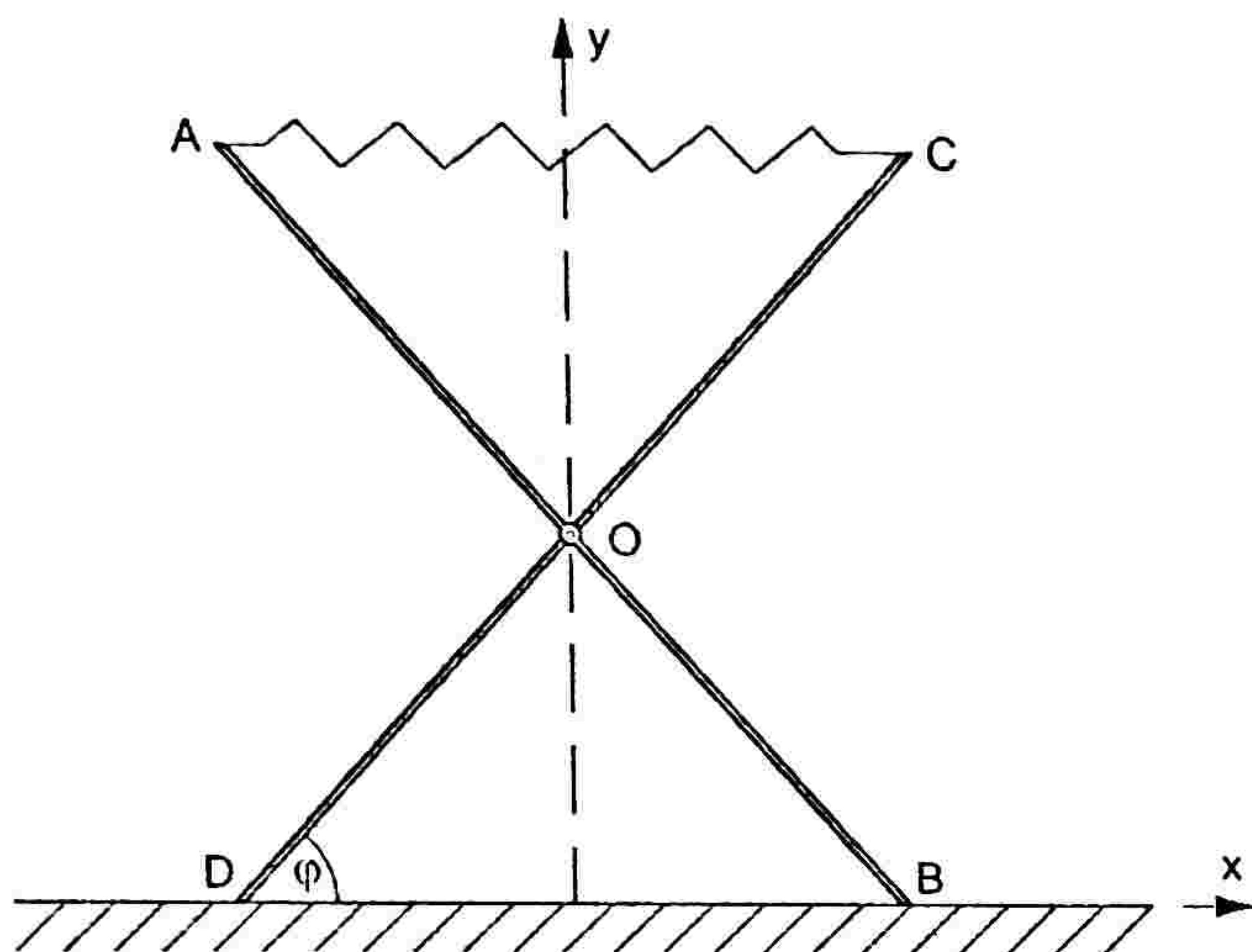
$$y: U_{Cy} = U_A \sin\varphi + U_C^A \sin\psi = 2R\dot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\psi}\sin\psi$$

$$U_C^2 = U_{Cx}^2 + U_{Cy}^2$$

1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva identična homogena štapa AB i CD, od kojih je svaki mase m i dužine $2l$. Štapovi su međusobno zglobovno vezani u tački O (središte masa oba štapa). Krajevi štapa B i D mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi. Slobodni krajevi štapa A i C povezani su oprugom krutosti $c = \frac{mg}{l}$. U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapovi su mirovali i bili u položaju koji je određen uglom φ_0 ($\sin \varphi_0 = 0,8$).

a) Odrediti ugaonu brzinu štapa u trenutku t_1 kada štapovi zauzimaju ugao φ_1 u odnosu na horizontalu ($\sin \varphi_1 = 0,6$).

b) Odrediti ubrzanje tačke O u početnom trenutku t_0 .

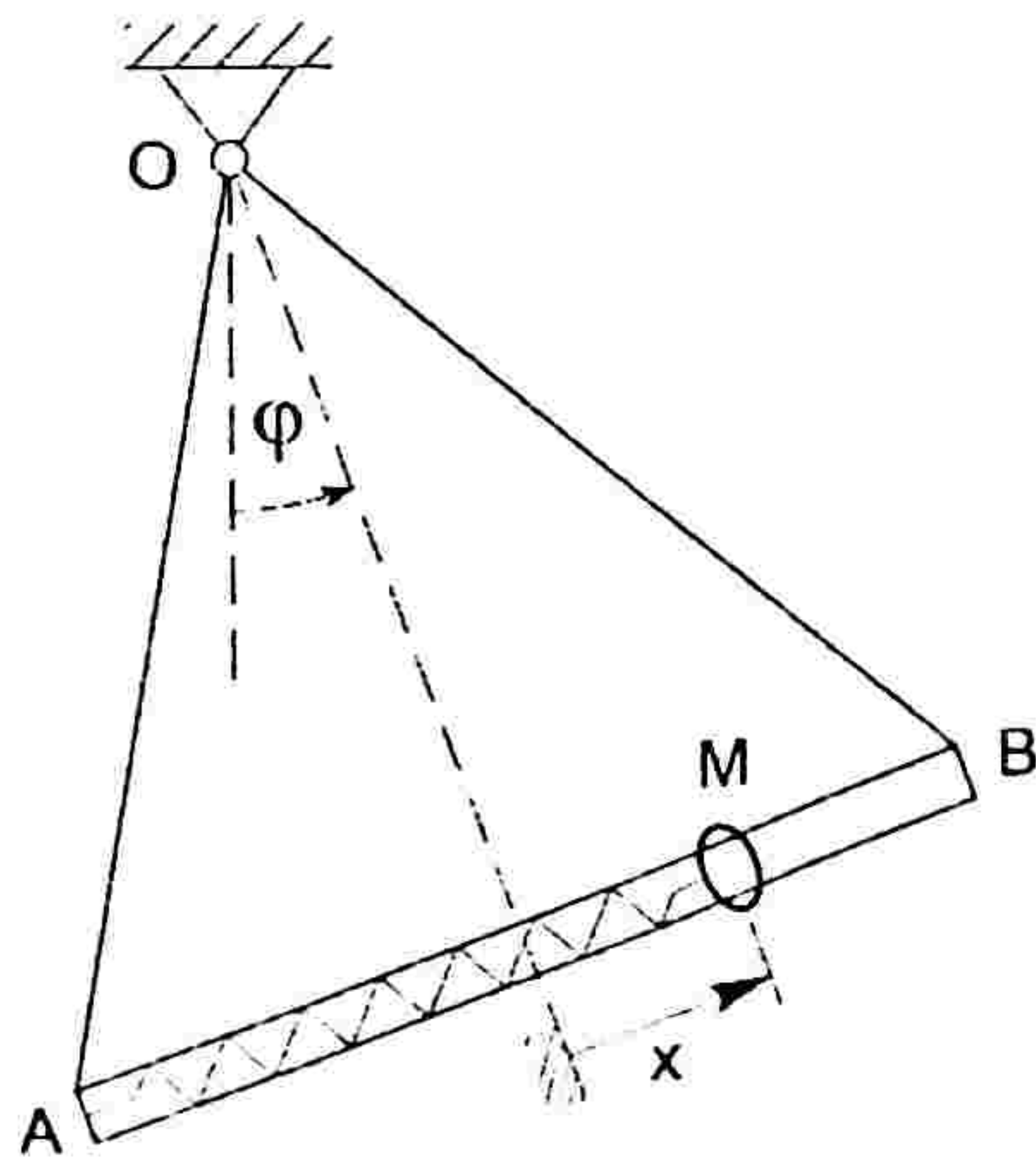


2. Kruta savijena cev ABC obrće se oko nepokretne vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω_0 u naznačenom smeru. Unutar cevi (po delu BC) može da se kreće bez trenja tačka M mase m . Tačka je vezana oprugom krutosti $c = m\omega_0^2$, drugi kraj opruge vezan je za tačku B. Dužina nenapregnute opruge iznosi l . Položaj tačke M određen je relativnom koordinatom ξ , kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = l$.

a) Ako je $\overline{AB} = l$ i $\alpha = 30^\circ$, odrediti jednačinu relativnog kretanja tačke $\xi(t)$.

b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t) = ?$

3. Homogeni štap AB mase $2m$ i dužine $2l$ vezan je pomoću dva neistegljiva kanapa za nepokretnu tačku O. Položaj štapa u odnosu na vertikalnu određuje ugao φ , kao što je prikazano na slici. Duž štapa može da klizi bez trenja prsten M mase m . Prsten je vezan oprugom krutosti c , drugi kraj opruge vezan je u tački A. Položaj prstena u odnosu na štap određuje relativna koordinata x . Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$ (prsten je tada na sredini štapa). Za date generalisane koordinate (φ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Dato je: $\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB}$.



januar 21

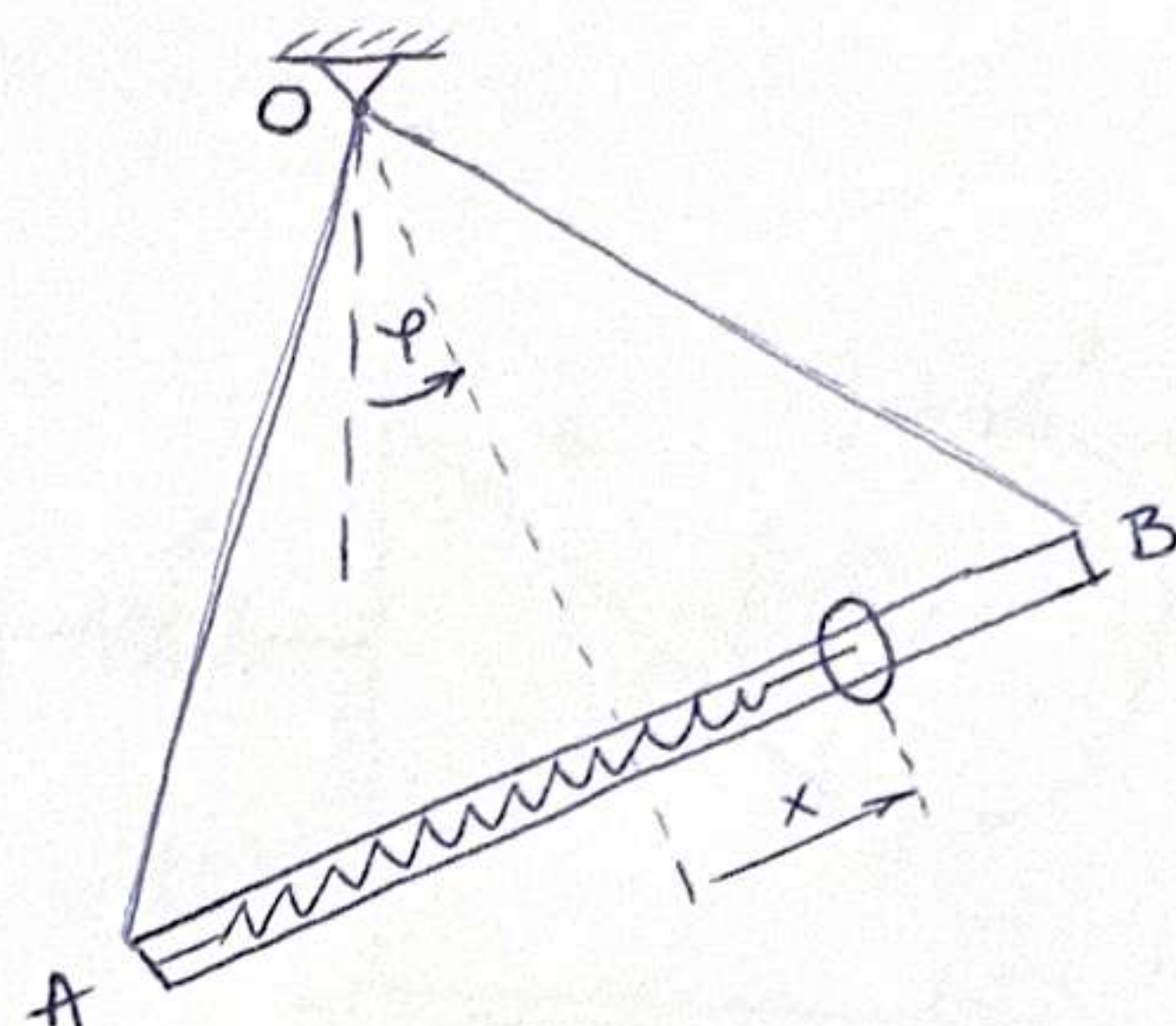
③ AB: $2m, 2l$

M: m

opraga: c , za $x=0$ neupregujeta

clif. i-ve kretanja za x, φ ?

$$\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = 2l$$



$$T = T_{AB} + T_M$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} 2m (l\sqrt{3}\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} 2m (2l)^2 \dot{\varphi}^2 = 3ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}ml^2\dot{\varphi}^2 = \frac{10}{3}ml^2\dot{\varphi}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2}m\dot{U}_M^2 = \frac{1}{2}m((\dot{x} + l\sqrt{3}\dot{\varphi})^2 + (\dot{x}\dot{\varphi})^2) =$$

$$= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 3l^2\dot{\varphi}^2 + 2\sqrt{3}l\dot{\varphi}\dot{x} + x^2\dot{\varphi}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \sqrt{3}ml\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{1}{2}mx^2\dot{\varphi}^2 =$$

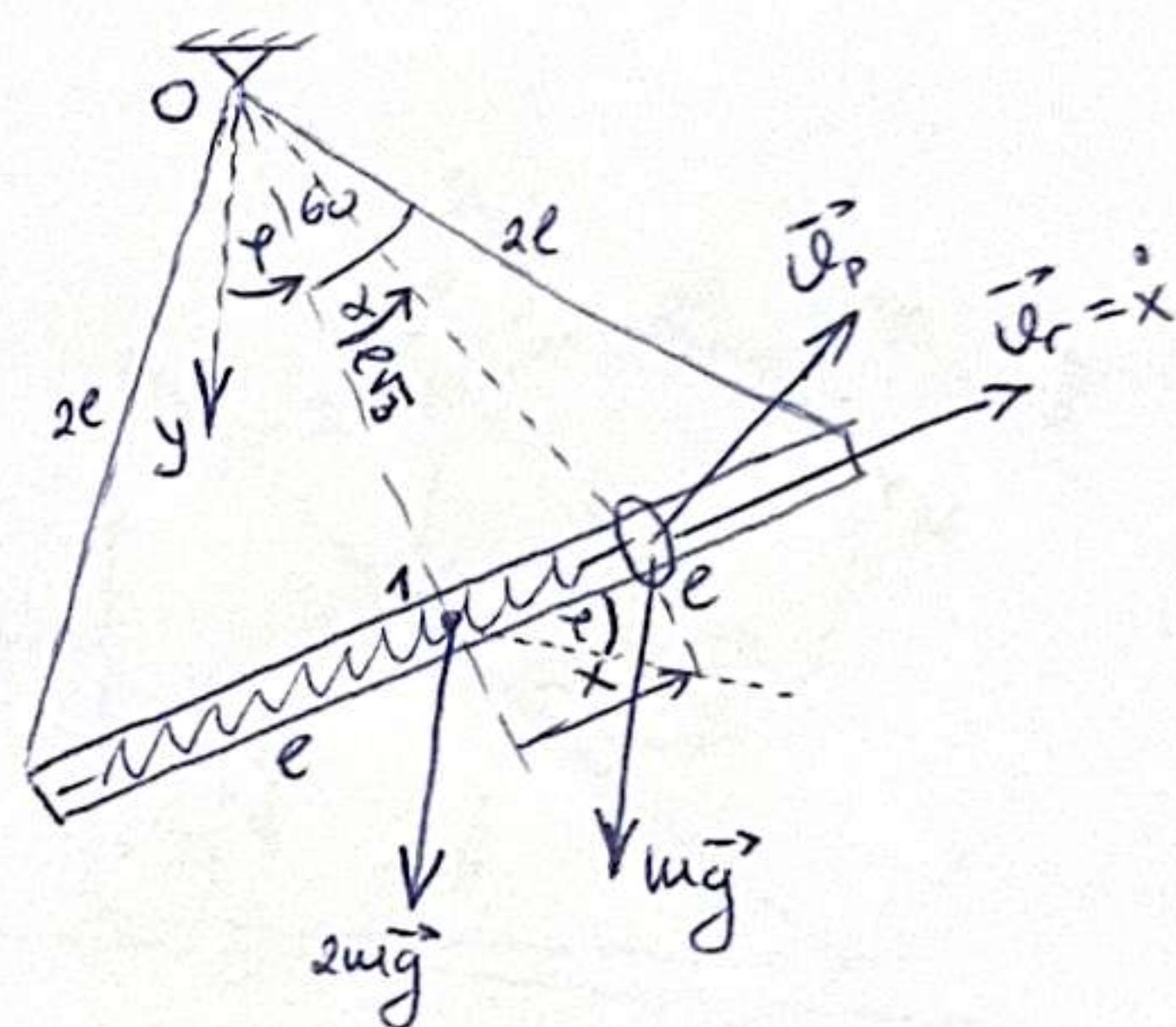
$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{29}{6}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mx^2\dot{\varphi}^2 + \sqrt{3}ml\dot{\varphi}\dot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{29}{3}ml^2\dot{\varphi} + mx^2\dot{\varphi} + \sqrt{3}ml\dot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{\varphi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \sqrt{3}ml\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{29}{3}ml\ddot{\varphi} + x^2\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + \sqrt{3}ml\ddot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + \sqrt{3}ml\ddot{\varphi}$$



$$\vec{U}_M = \vec{U}_P + \vec{U}_r$$

$$U_{Px} = l\sqrt{3}\dot{\varphi}$$

$$U_{Py} = x\dot{\varphi}$$

$$U_r = \dot{x}$$

$$U_M^2 = (\dot{x} + l\sqrt{3}\dot{\varphi})^2 + (x\dot{\varphi})^2$$

$$(\downarrow y) \quad \partial A = 2mg\partial y_1 + mg\partial y_M - c\partial z$$

$$y_1 = l\sqrt{3}\cos\varphi \rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial \varphi} = -l\sqrt{3}\sin\varphi$$

$$y_M = l\sqrt{3}\cos\varphi - x\sin\varphi \rightarrow \frac{\partial y_M}{\partial \varphi} = -l\sqrt{3}\sin\varphi - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\sin\varphi - x\cos\varphi$$

$$z = x \rightarrow \partial z = \partial x$$

$$\partial A = -2mg l\sqrt{3}\sin\varphi \partial \varphi - mg l\sqrt{3}\sin\varphi \partial \varphi - mg \sin\varphi \partial x - mg x \cos\varphi \partial \varphi - cx \partial x$$

$$\frac{29}{3}ml\ddot{\varphi} + mx^2\ddot{\varphi} + 2mx\dot{x}\dot{\varphi} + \sqrt{3}ml\ddot{x} = -3mg l\sqrt{3}\sin\varphi - mg x \cos\varphi$$

$$m\ddot{x} + \sqrt{3}ml\ddot{\varphi} - m\dot{x}\dot{\varphi}^2 = -mg \sin\varphi - cx$$

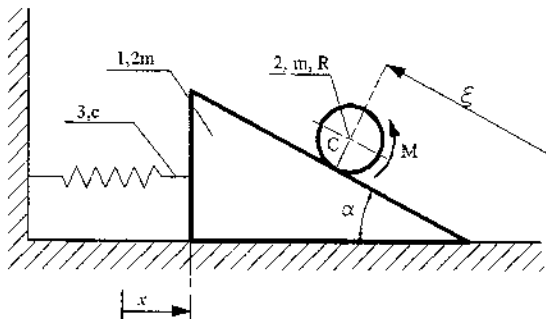
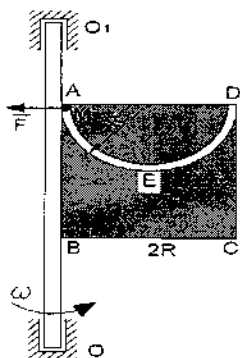
писмени део испита, 11.09.2014.

Задатак бр. 1: Хомогена квадратна плоча $ABCD$ масе $3m$ и стране $2R$ обрће се угаоном брзином ω_0 око вертикалне осе OO_1 . У неком тренутку у глатки кружни канал AED пуштена је куглица M , масе m без почетне брзине. У истом тренутку на куглицу почиње да делује константна сила интензитета $F = mg/2$, која је све време кретања хоризонтална и усмерена према осе обртања. Одредити апсолутну брзину куглице и угаону брзину плоче у тренутку када се куглица налази у положају E . Колики треба да буде интензитет силе F да би релативна брзина куглице у положају E била једнака нули?

Задатак бр. 2: Материјална тачка масе m креће се под дејством централне силе $F_r = -m a V_0^2 \frac{\cos \varphi}{r^2}$ тако да је интензитет почетне брзине V_0 , $r_0 = a$, а почетна

брзина управна је на почетни потег. Одредити $r = r(\varphi)$.

Задатак бр. 3: По глаткој стрмој равни призме 1 (нагиб α) масе $2m$ може да се котрља без клизања хомогени диск 2 , масе m , полупречника R , на кога дејствује спрег сила момента M . Призма је везана опругом 3 , крутости c , за непомићну вертикалну раван, и при кретању призме опруга остаје стално хоризонтална. Опруга је недеформисана када је $x=0$. Ако се призма креће по глаткој хоризонталној подлози, написати диференцијалне једначине кретања. Генералисане координате, x и ξ , приказане су на слици.

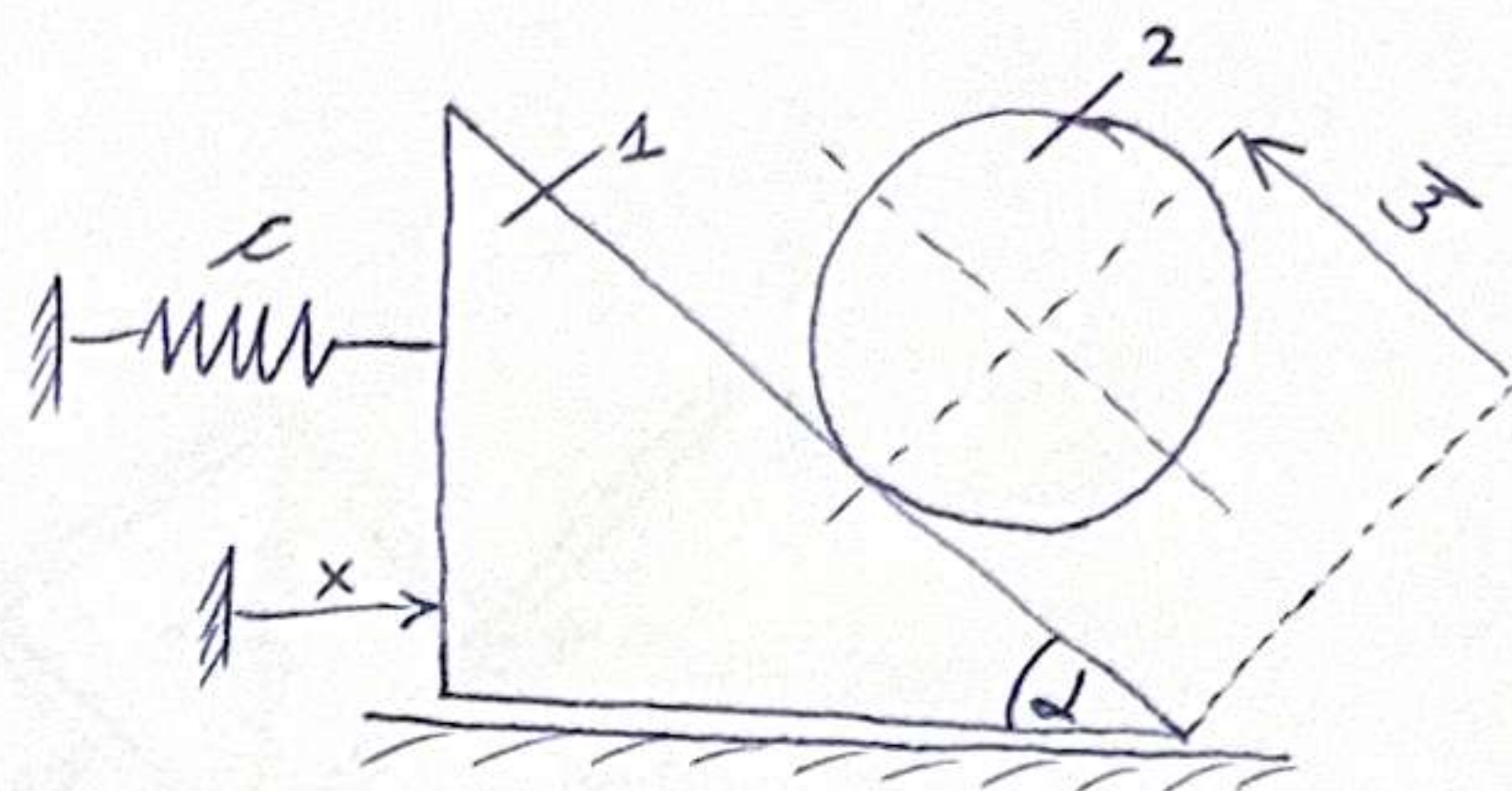


- Употреба литературе није дозвољена.
- Овај формулар са задацима предати заједно са испитном свеском.
- Сва евентуална питања у вези текста задатака постављати дежурним наставницима и асистентима.
- На насловној страни испитне свеске обавезно уписати све податке, а у рубрици *Напомене* име предметног наставника.

septembar 14

- ③ 1: $2m$
2: m, R
moment M

pruga: c , za $x=0$ je nedeformisana
dif. i-ne kretanja za $x, \bar{z}$?
($\bar{z}$ je rel. koord. u odnosu na prugu)



$$T = T_1 + T_2$$

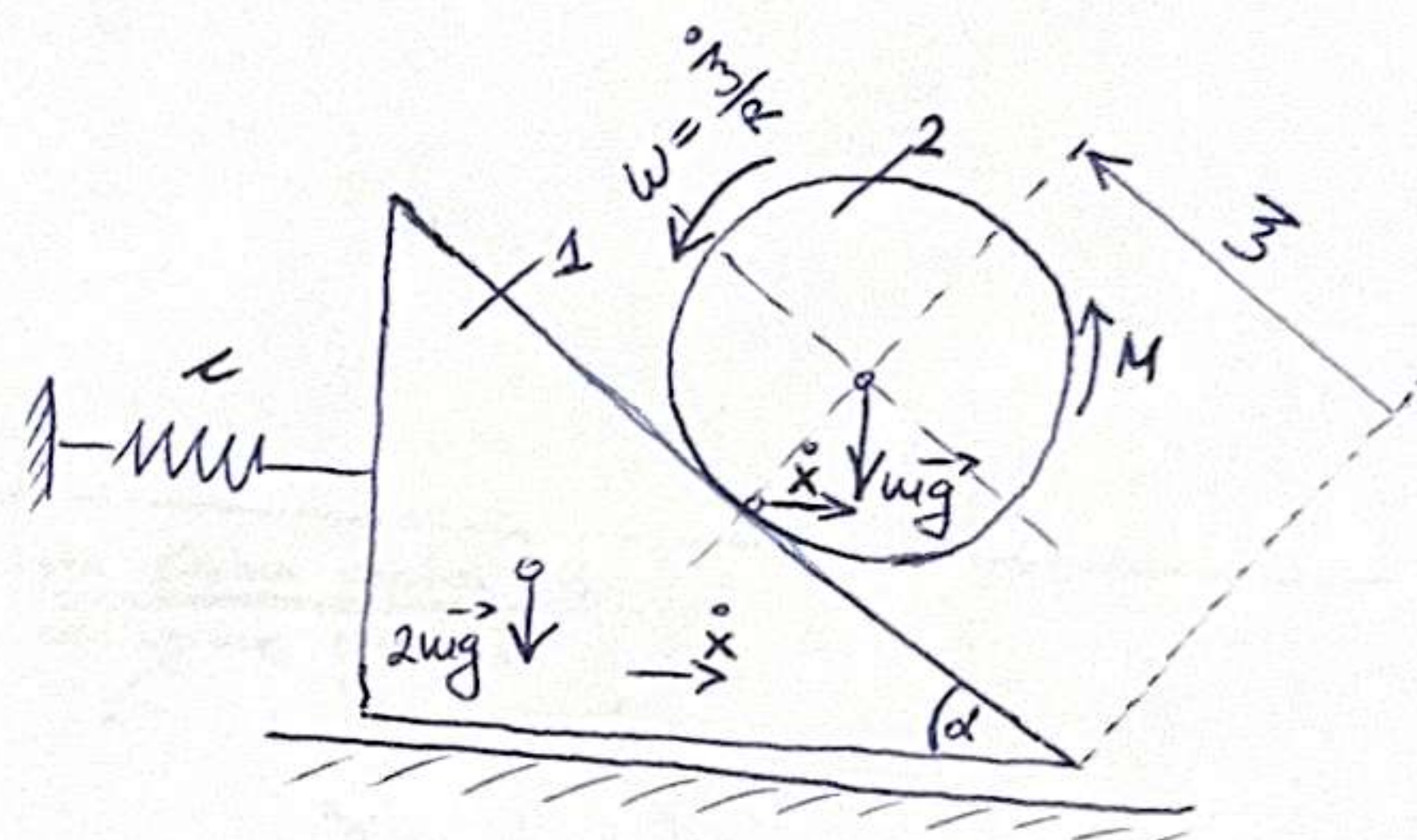
$$T_1 = \frac{1}{2} 2m \dot{x}^2 + 0 = m \dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \omega^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - 2 \dot{x} \dot{\bar{z}} \cos \alpha + \dot{\bar{z}}^2) + \frac{1}{4} m R^2 \frac{\dot{\bar{z}}^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - m \dot{x} \dot{\bar{z}} \cos \alpha + \frac{3}{4} m \dot{\bar{z}}^2$$

$$T = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 - m \dot{x} \dot{\bar{z}} \cos \alpha + \frac{3}{4} m \dot{\bar{z}}^2$$



$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m \dot{x} - m \dot{\bar{z}} \cos \alpha, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 3m \ddot{x} - m \ddot{\bar{z}} \cos \alpha$$

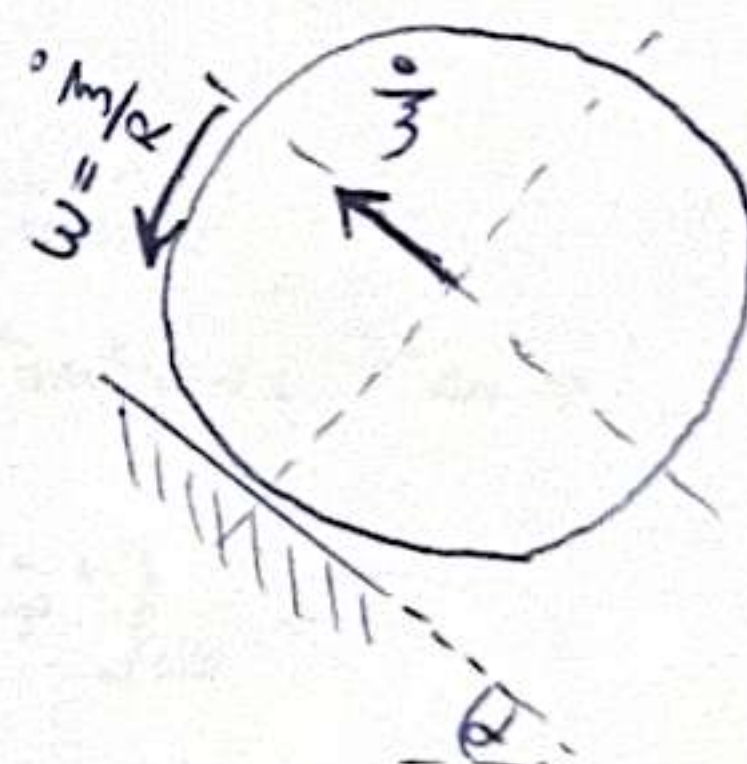
$$\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{z}}} = \frac{3}{2} m \dot{\bar{z}} - m \dot{x} \cos \alpha, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\bar{z}}} \right) = \frac{3}{2} m \ddot{\bar{z}} - m \ddot{x} \cos \alpha$$

$$\partial A = -c x \partial x + M \partial \phi - m g \partial y_c = -c x \partial x + M \frac{\partial \bar{z}}{R} - m g d \bar{z} \sin \alpha$$

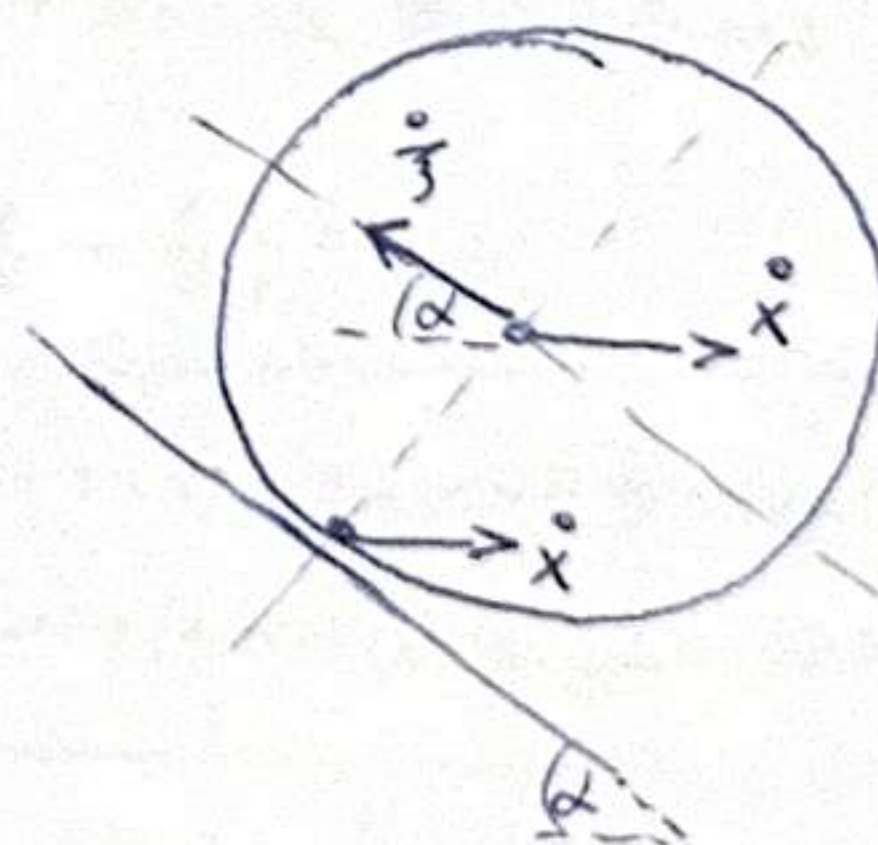
$$3m \ddot{x} - m \ddot{\bar{z}} \cos \alpha = -c x$$

$$\frac{3}{2} m \ddot{\bar{z}} - m \ddot{x} \cos \alpha = \frac{M}{R} - m g \sin \alpha$$

disk 2 - relativno



disk 2 - apsolutno



$$v_{cx} = \dot{x} - \dot{\bar{z}} \cos \alpha$$

$$v_{cy} = \dot{\bar{z}} \sin \alpha$$

$$v_c^2 = \dot{x}^2 - 2 \dot{x} \dot{\bar{z}} \cos \alpha + \dot{\bar{z}}^2 \cos^2 \alpha + \dot{\bar{z}}^2 \sin^2 \alpha$$

februar 22

③ K: 3m

sila F

moment M

AK: m, 2L

BK: m, 2L

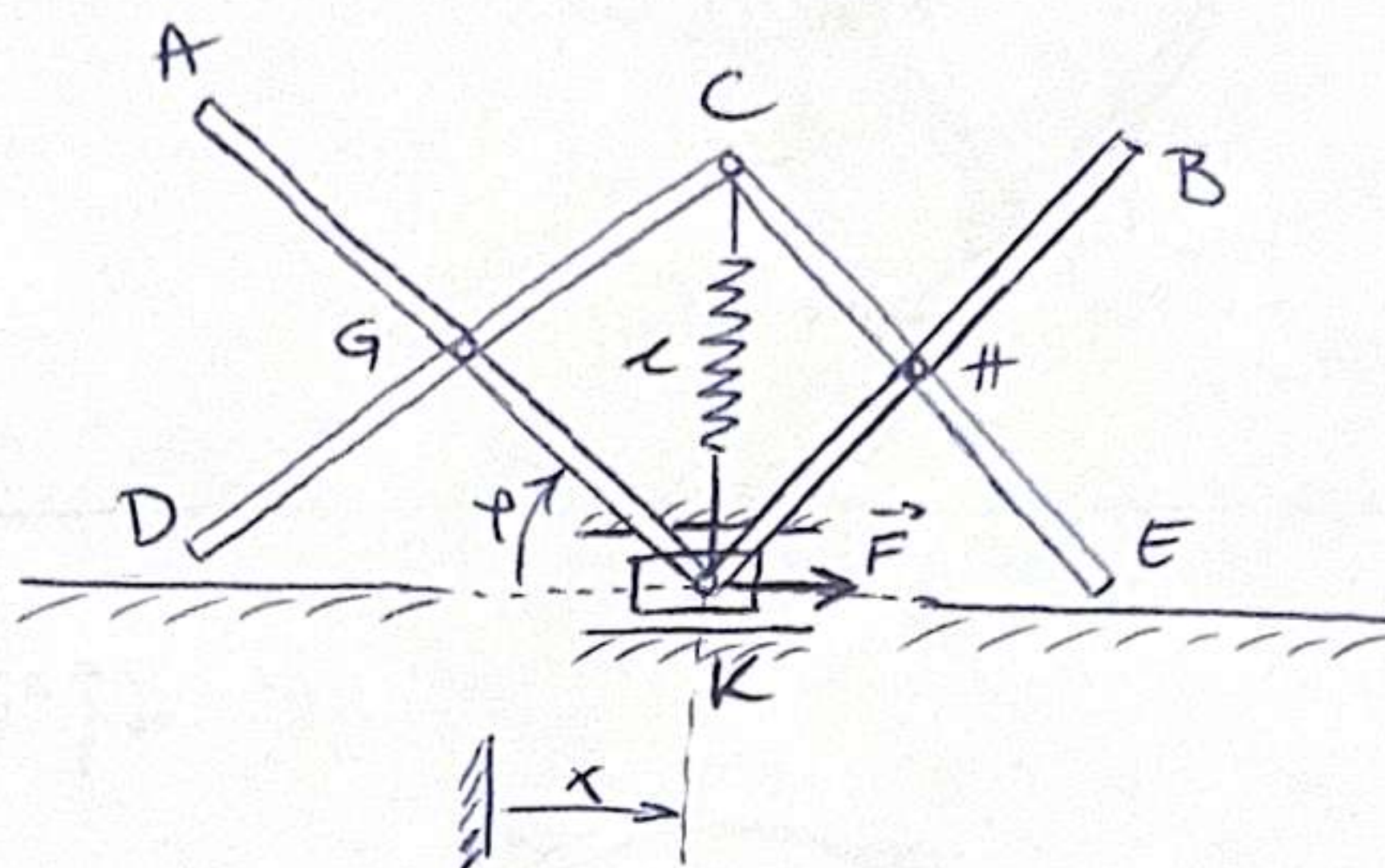
CD: 2m, 2L

CE: 2m, 2L

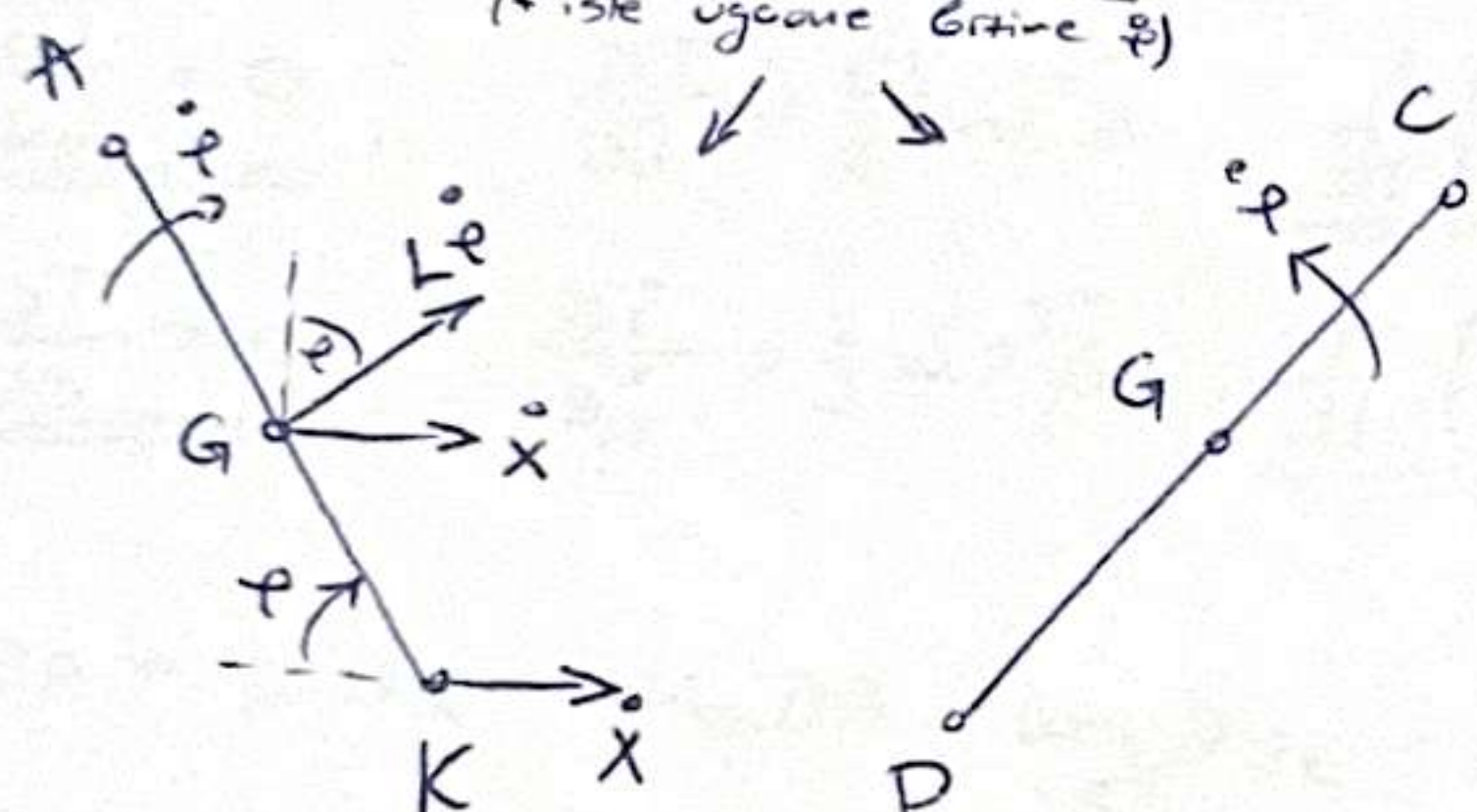
opruga: c

def. i-ne koordinate za x, φ

t=0: sistem miruje
štapovi su vertikalni
opruga je neopregnuta



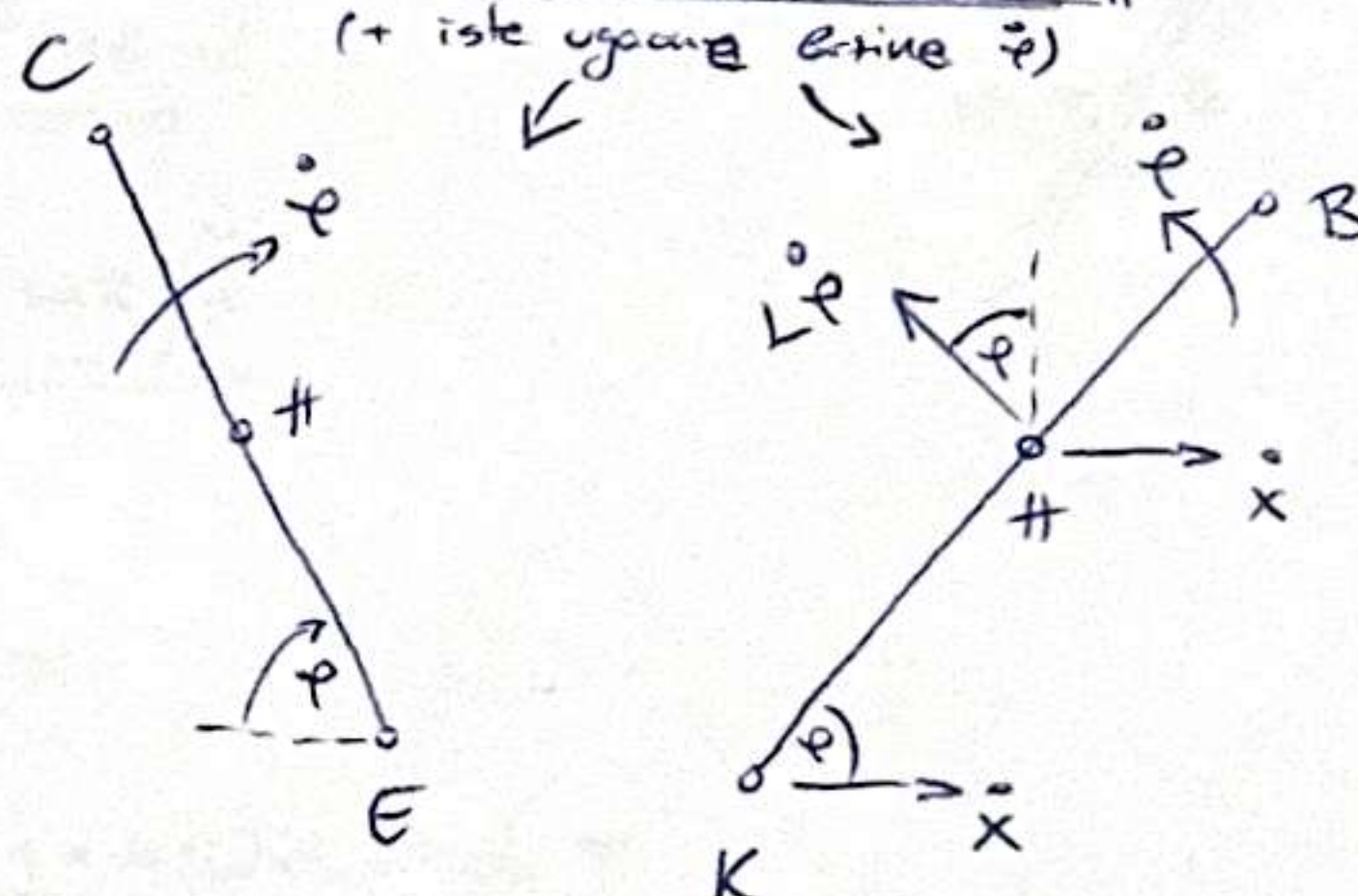
ista Grina centra G_A
(+ iste ugane brtine $\dot{\varphi}$)



$$v_{G_Ax} = \dot{x} + L\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad v_{G_Ay} = L\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$v_{G_A}^2 = \dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + L^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + L^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

ista Grina centra G_H
(+ iste ugane brtine $\dot{\varphi}$)



$$v_{G_Hx} = \dot{x} - L\dot{\varphi}\sin\varphi, \quad v_{G_Hy} = L\dot{\varphi}\cos\varphi,$$

$$v_{G_H}^2 = \dot{x}^2 - 2L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + L^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + L^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$$

$$T = \left[\frac{1}{2} 3m \dot{x}^2 + 0 \right]_K + \left[\frac{1}{2} m v_{G_A}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m (2L)^2 \dot{\varphi}^2 \right]_{AK} + \left[\frac{1}{2} 2m v_{G_H}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} 2m (2L)^2 \dot{\varphi}^2 \right]_{CD} +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} 2m v_{G_H}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} 2m (2L)^2 \dot{\varphi}^2 \right]_{CE} + \left[\frac{1}{2} m v_{G_H}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m (2L)^2 \dot{\varphi}^2 \right]_{KB} =$$

$$T = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + L^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{6} m L^2 \dot{\varphi}^2 \right] + \left[m (\dot{x}^2 + 2L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + L^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{3} m L^2 \dot{\varphi}^2 \right] +$$

$$+ \left[m (\dot{x}^2 - 2L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + L^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{3} m L^2 \dot{\varphi}^2 \right] + \left[\frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - 2L\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + L^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{6} m L^2 \dot{\varphi}^2 \right] =$$

$$T = m \dot{x}^2 \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + \frac{1}{2} \right) + m L^2 \dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + 1 + \frac{1}{3} + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) =$$

$$T = \frac{3}{2} m \dot{x}^2 + 4 m L^2 \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m \dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 3m \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 8m L^2 \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 8m L^2 \ddot{\varphi}$$

$$\partial A = F \partial x - c \partial z - 3mg \partial y_G - 3mg \partial y_H + M \partial \varphi$$

$$z = 2L - 2L \sin\varphi = 2L(1 - \sin\varphi)$$

$$\partial z = -2L \cos\varphi \partial \varphi$$

$$\partial A = F \partial x - c \cdot 2L(1 - \sin\varphi)(-2L \cos\varphi \partial \varphi) - 6mgL \cos\varphi \partial \varphi + M \partial \varphi$$

$$\partial A = F \partial x + 4cL^2 \cos\varphi(1 - \sin\varphi) \partial \varphi - 6mgL \cos\varphi \partial \varphi + M \partial \varphi$$

$$3m \ddot{x} = F$$

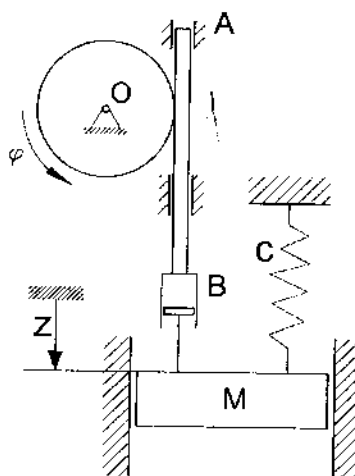
$$8m L^2 \ddot{\varphi} = 4cL^2 \cos\varphi(1 - \sin\varphi) - 6mgL \cos\varphi + M$$

МЕХАНИКА 3

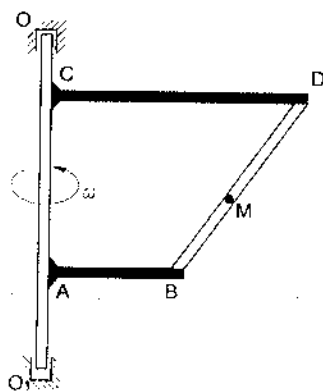
30. септембар 2017.

- Два хоризонтална штапа AB (маса m и дужине R) и CD (маса $2m$ и дужине $2R$) круто су спојени за вертикалну осовину OO_z . За крајеве ових штапова заварена је глатка цев BD занемарљиве масе (слика 1). У почетном тренутку тачка M масе m се налазила у положају B и пуштена је да се креће кроз цев BD из стања релативног мировања. Одредити максимално растојање између штапова AB и CD да би тачка стигла у положај D ако је у почетном тренутку угаона брзина система $\omega_0 = \sqrt{g/R}$.

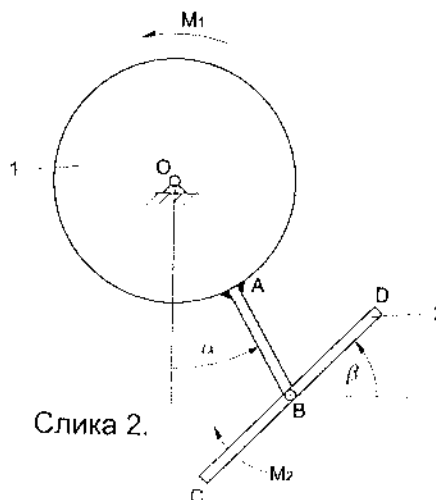
- Зупчаник полупречника $R = 1\text{ m}$ обрће се око непокретне хоризонталне осе која пролази кроз тачку O , при чему се угао обртања мења по закону $\varphi = \sin(t)$ [рад] (позитиван смер угла обртања је дат на слици). Зупчаник покреће зупчасту летву AB која се креће дуж вертикалних вођица. За крај B летве везан је цилиндар пригушивача. Тело M масе $m = 1\text{ kg}$, везано је за клип пригушивача и опругом крутости $c = 20\text{ N/m}$ за непокретну тачку. Кретањем клипа у цилиндру пригушивача јавља се сила отпора кретању пропорционална првом степењу брзине клипа у односу на цилиндар. Коefицијент пропорционалности је $\nu = 8\text{ Ns/m}$. Одредити коначну једначину кретања тела M ако је у почетном тренутку оно мировало у положају статичке равнотеже. За координатни почетак узети положај статичке равнотеже (Оса z је усмерена вертикално наниже).



- Материјални систем састоји се од тела 1, кога чине круто спојени диск полупречника R масе m и штап AB дужине R масе m , и тела 2-штапа CD дужине $2R$ масе $2m$ (слика 2). У тачки B зглобно су везани тело 1 и тело 2 тако да је $\overline{CB} = \overline{BD}$. На тело 1 дејствује спрег сила интензитета момента M_1 , а на тело 2 спрег сила интензитета момента M_2 . Ако се систем налази у вертикалној равни, написати диференцијалне једначине кретања система за задате генерализане координате.



Слика 1.



Слика 2.

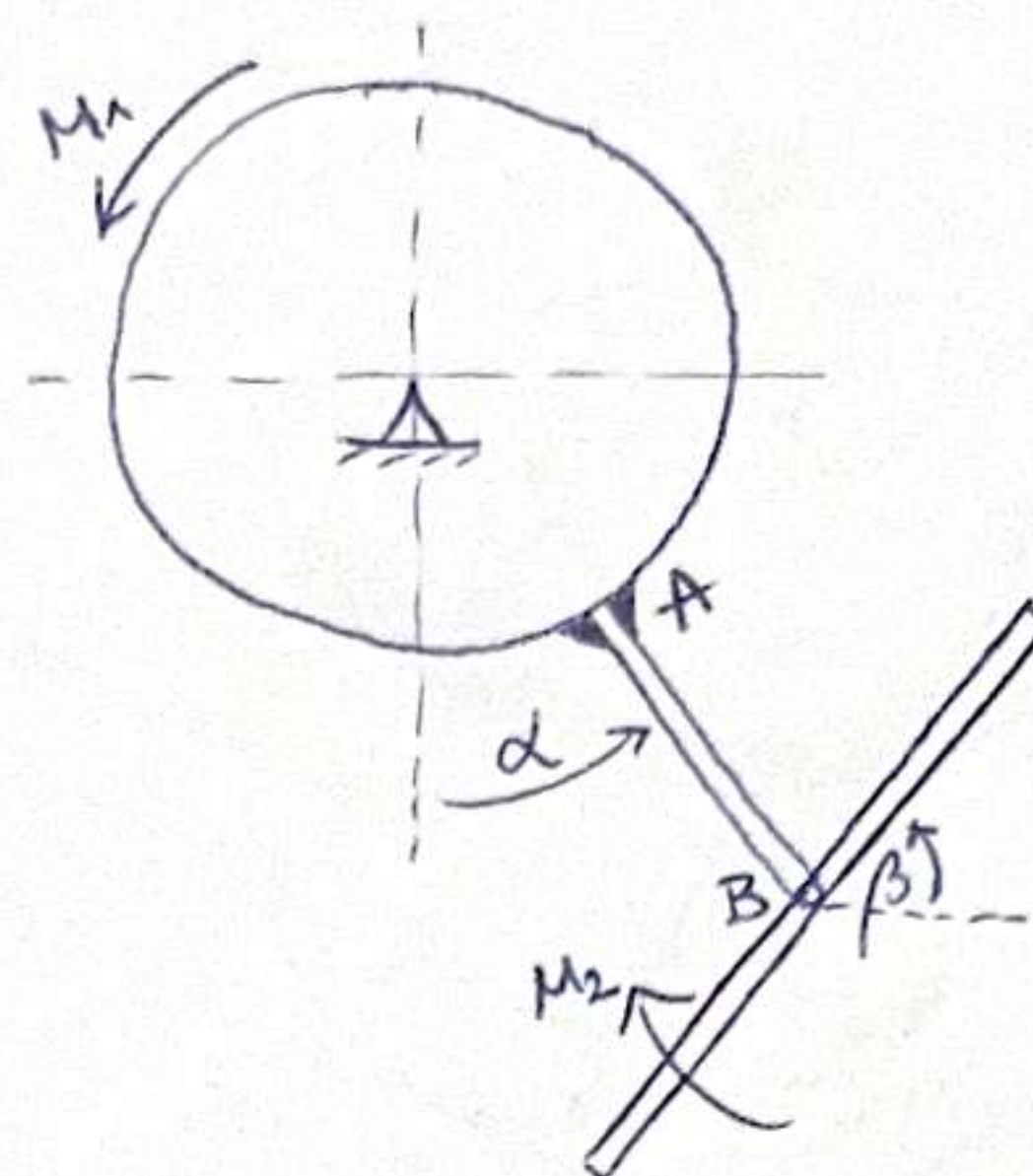
oktober 17

③ 1: m, R (disk) + m, R (stop AB)

2: $2m, 2R$

spring M_1 , spring M_2

def. i-ne kodaŋja za α, β ?



$$T = \left[0 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\alpha}^2 \right]_{\text{disk}} + \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{3}{2} R \dot{\alpha} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m R^2 \dot{\alpha}^2 \right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{2} 2m (2R \dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} 2m (2R)^2 \dot{\beta}^2 \right] =$$

$$T = mR^2 \dot{\alpha}^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{24} + 4 \right) + \frac{1}{3} mR^2 \dot{\beta}^2 =$$

$$T = \frac{65}{12} mR^2 \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{3} mR^2 \dot{\beta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{65}{6} mR^2 \dot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} \right) = \frac{65}{6} mR^2 \ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = \frac{2}{3} mR^2 \dot{\beta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} \right) = \frac{2}{3} mR^2 \ddot{\beta}$$

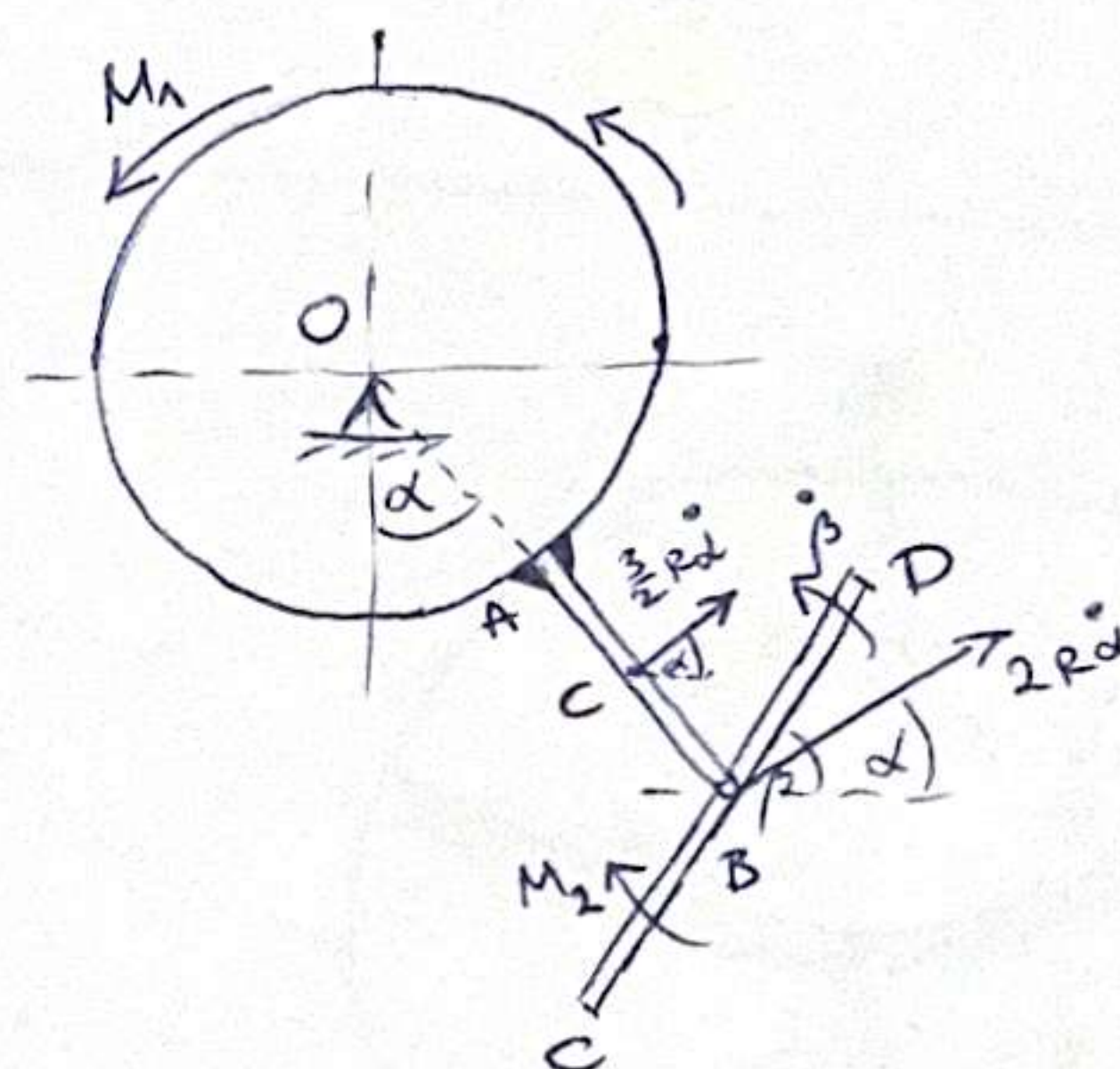
$$\partial A = M_1 \partial \alpha - M_2 \partial \beta - mg \partial y_C - 2mg \partial y_B =$$

$$\partial A = M_1 \partial \alpha - M_2 \partial \beta - mg \cdot \frac{3}{2} R \partial \alpha \cdot \sin \alpha - mg \cdot 4R \partial \alpha \sin \alpha =$$

$$\partial A = M_1 \partial \alpha - M_2 \partial \beta - \frac{11}{2} mgR \sin \alpha \partial \alpha$$

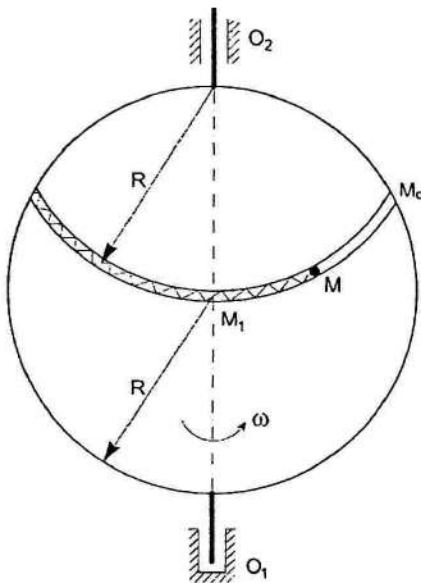
$$\frac{65}{6} mR^2 \ddot{\alpha} = M_1 - \frac{11}{2} mgR \sin \alpha$$

$$\frac{2}{3} mR^2 \ddot{\beta} = -M_2$$

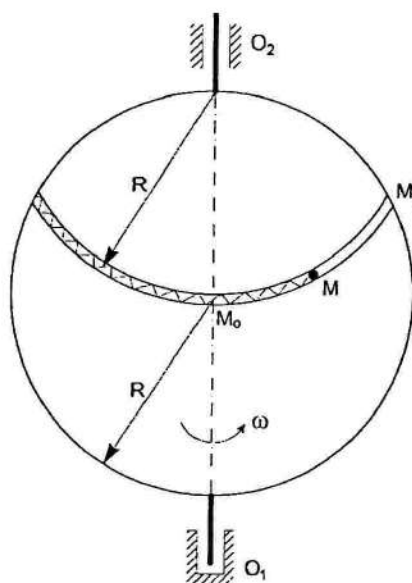


1. Homogeni disk mase m i poluprečnika R obrće se oko svoje vertikalne ose O_1O_2 . U disk je urezan kružni žljeb poluprečnika R po kome može da klizi bez trenja tačka M mase m . Tačka je vezana oprugom nepoznate krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{R\pi}{3}$. U početnom trenutku, tačka se nalazila u položaju M_0 bez početne relativne brzine, dok se disk obrtao ugaonom brzinom $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Odrediti ugaonu brzinu diska u trenutku kada se tačka nađe na njegovoj osi obrtanja (položaj M_1). Odrediti krutost opruge c iz uslova da se tačka zaustavi u položaju M_1 .

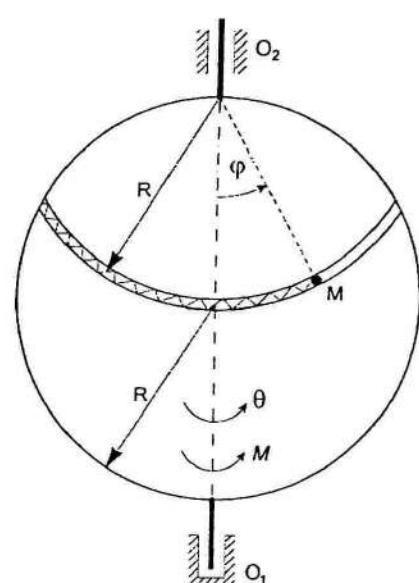
2. Disk poluprečnika R obrće se oko svoje vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω . U disk je urezan kružni glatki žljeb poluprečnika R po kome može da se kreće tačka M mase m . Tačka je vezana oprugom krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{2R\pi}{3}$. U početnom trenutku, tačka se nalazila na osi obrtanja diska (položaj M_0) bez početne relativne brzine. Ako je $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ i $c = \frac{9}{4\pi^2} \frac{mg}{R}$, odrediti relativnu brzinu tačke u položaju M_1 . Odrediti ukupnu reakciju veze koja deluje na tačku u položaju M_1 .



Zadatak 1.



Zadatak 2.



Zadatak 3.

3. Homogeni disk mase m i poluprečnika R može da se obrće oko svoje vertikalne ose O_1O_2 . Ugao obrtanja diska određen je uglom θ . U disk je urezan kružni žljeb poluprečnika R po kome može da se kreće bez trenja tačka M mase m . Položaj tačke unutar žljeba određen je uglom φ , kao što je prikazano na slici. Tačka je vezana oprugom krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{R\pi}{3}$. Na disk deluje spreg sila momenta intenziteta M u naznačenom smeru.

a) Za date generalisane koordinate (θ, φ) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema.

b) Odrediti $M(\varphi)$, tj. zavisnost momenta od ugla φ tako da se disk obrće konstantnom ugaonom brzinom ω . U početnom trenutku važi $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$.

oktobar 21

③ disk: m, R

krasni žleb poluprečka R

M : m

opruga: $c, l_0 = \frac{R\pi}{3}$

moment M

1) dt. i-ne za θ, φ

2) $M(\varphi)$? - tako da se disk okreće
uglavnom brzinom $\omega = \text{const.}$

to: $\varphi_0 = 0, \dot{\varphi}_0 = 0$

$$T = \left[0 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{4} \dot{\theta}^2 \right]_{\text{disk}} + \left[\frac{1}{2} m v_M^2 + 0 \right]_M =$$

$$T = \frac{1}{8} m R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\theta} + m R^2 \dot{\theta} \sin^2 \varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m R^2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{1}{4} m R^2 \ddot{\theta} + m R^2 \ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2 m R^2 \dot{\theta} \sin \varphi \cos \varphi \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m R^2 \ddot{\varphi}$$

$$\Delta A = M \Delta \theta - m g \Delta y_M - c \Delta z$$

$$z = l - l_0 = (R - \frac{\pi}{3} + R \varphi) - (R - \frac{\pi}{3}) = R \varphi \rightarrow \Delta z = R \Delta \varphi$$

$$\Delta A = M \Delta \theta - m g R \Delta \varphi \sin \varphi - c R^2 \varphi \Delta \varphi$$

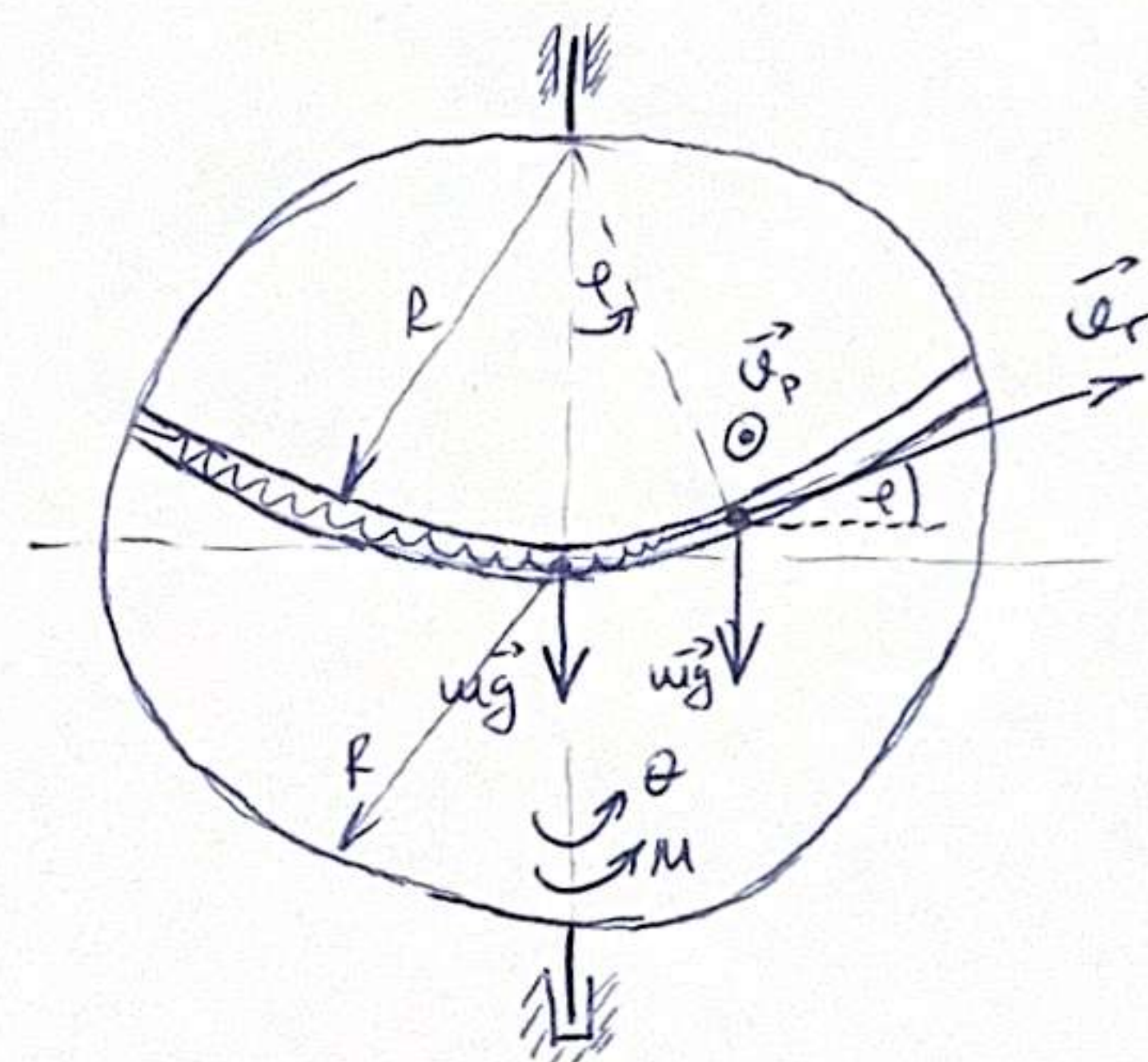
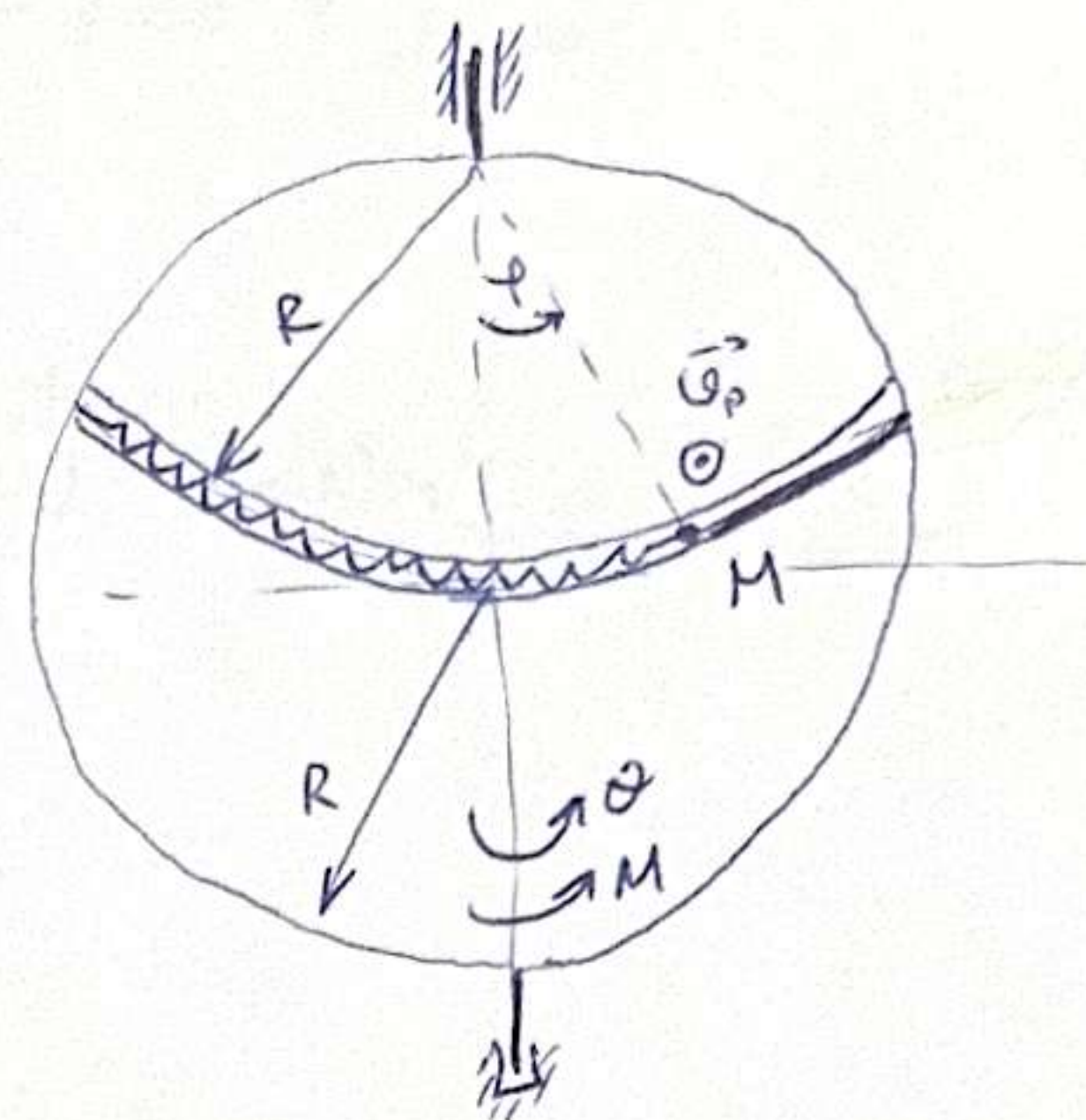
$$\boxed{\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1}{4} m R^2 \ddot{\theta} + m R^2 \ddot{\theta} \sin^2 \varphi + 2 m R^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = M \\ & m R^2 \ddot{\varphi} - m R^2 \dot{\theta}^2 \sin \varphi \cos \varphi = -m g R \sin \varphi - c R^2 \varphi \end{aligned}} \quad (1) \quad (2)$$

$$2) \quad \dot{\theta} = \omega = \text{const} \rightarrow \ddot{\theta} = 0$$

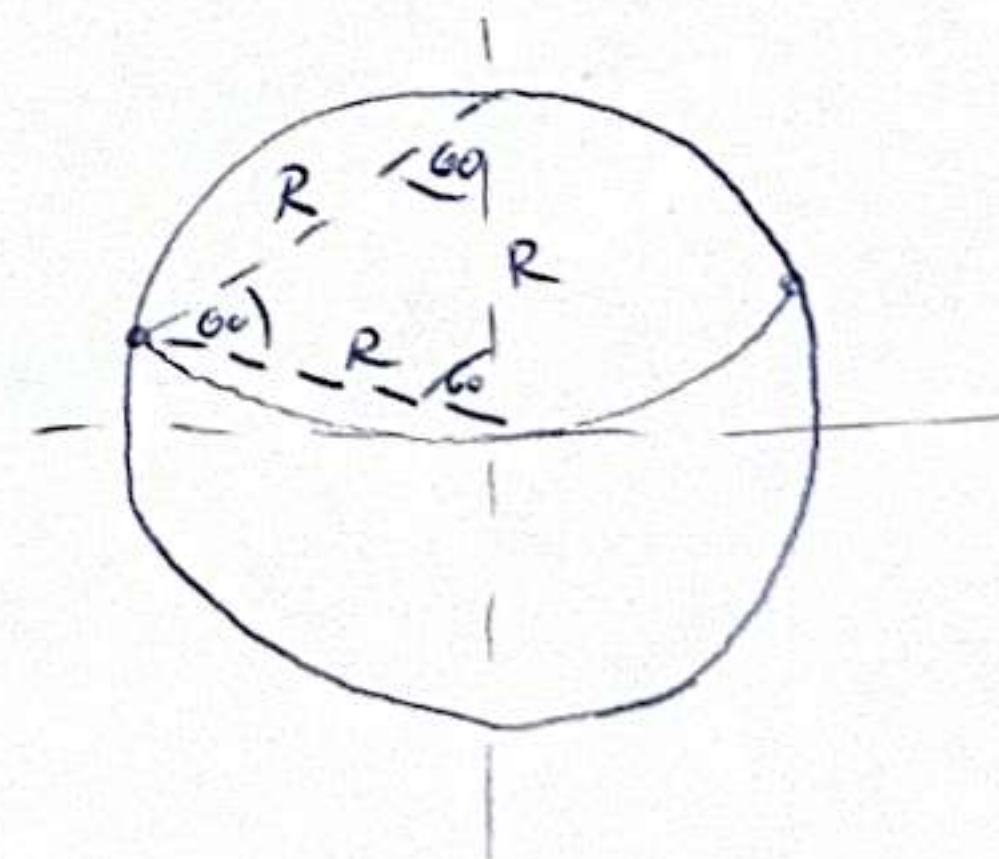
$$(1) \Rightarrow 0 + 2 m R^2 \omega \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = M, \quad \dot{\varphi}(\varphi) = ?$$

$$(2) \Rightarrow m R^2 \ddot{\varphi} - m R^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi = -m g R \sin \varphi - c R^2 \varphi, \quad \ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi} d\dot{\varphi}}{d\varphi}$$

$$m R^2 \frac{d\dot{\varphi} d\varphi}{d\varphi} = m R^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi - m g R \sin \varphi - c R^2 \varphi \quad / \int d\varphi$$



$$v_M^2 = v_r^2 + v_p^2 = (R \dot{\varphi})^2 + (R \dot{\theta} \sin \varphi)^2 = R^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \varphi$$



$$\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 \Big|_{\varphi_0}^{\varphi} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} m R^2 \omega^2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi + m g R \cos \varphi \Big|_{\varphi_0=0}^{\varphi} - \frac{1}{2} c R^2 \varphi^2 \Big|_{\varphi_0=0}^{\varphi}$$

(sinema: $u = \sin \varphi$
 $du = \cos \varphi d\varphi$)

$$\frac{1}{2} m R^2 (\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2) = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \sin^2 \varphi \Big|_{\varphi_0=0}^{\varphi} + m g R (\cos \varphi - \cos 0) - \frac{1}{2} c R^2 \varphi^2 \quad / \cdot \frac{2}{m R^2}$$

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \omega^2 \sin^2 \varphi + \frac{2g}{R} (\cos \varphi - 1) - \frac{1}{2} c R^2 \varphi^2$$

$$\varphi^2 = \dot{\varphi}_0^2 + \omega^2 \sin^2 \varphi - \frac{2g}{R} (1 - \cos \varphi) - \frac{c}{m} \varphi^2$$

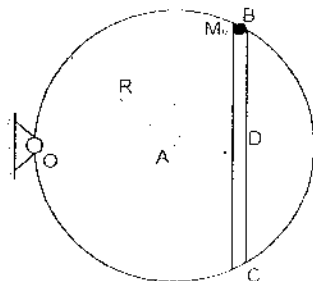
$$\boxed{M = 2 m R^2 \omega \dot{\varphi} \sin \varphi \cos \varphi = \dots}$$

МЕХАНИКА 3

писмени део испита, 03.09.2016.

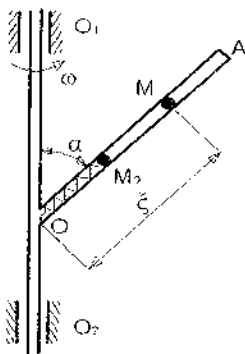
ПРВА ГРУПА

Задатак бр. 1: Диск полупречника R и масе m , који се налази у хоризонталној равни обрће се око вертикалне осовине Oz . По каналу BC ($AD=R/2$) креће се тачка M масе m , која је опругом, крутости c , везана за зглоб A . Дужина ненапрегнуте опруге је $l_0=R/2$. У почетном тренутку, када се тачка налазила на крају канала у тачки B систем је мировао. Одредити угаону брзину плоче ω у тренутку када тачка стигне у средину канала D .

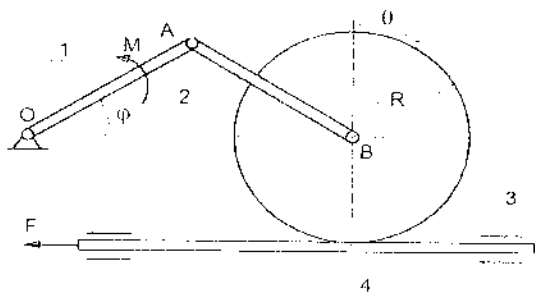


Задатак бр. 2: Куглица M занемарљивих димензија, масе m , може да се креће унутар глатке цеви OA , која се обрће константном угаоном брзином ω око вертикалне осе O_1O_2 градећи са њом угао $\alpha = 45^\circ$. У почетном тренутку куглица се налазила на растојању $a = 1/\omega^2$ од тачке O у релативном мировању.

Куглица је везана опругом крутости $c = \frac{3}{2}m\omega^2$ за тачку O . У почетном тренутку опруга је била ненапрегнута. Одредити закон кретања куглице унутар цеви ($\xi = \overline{OM}$?).



Задатак бр. 3: Криваја 1, дужине l , масе m , може да се обрће у вертикалној равни око осе која пролази корз тачку O . Зупчаник 3, који се може сматрати хомогеним диском полупречника R , масе m , спрегнут је са зупчастом летвом 4, масе m , која може да се креће по хоризонталним вођицама. Криваја 1 и зупчаник 3 зглобно су везани штапом занемарљиве масе 2, дужине l . На зупчасту летву 4 делује сила интензитета F , а на кривају 1 спрег сила момента M . У почетном тренутку систем је мировао, а криваја 1 је заузимала хоризонталан положај, док је $\theta_0 = 0$. Саставити диференцијалне једначине кретања система ако су генерализане координате φ и θ и одредити почетне вредности угаоних убрзања криваје 1 и зупчаника 3 у почетном тренутку.



- Употреба литературе није дозволена.
- Овај формат са задацима предати заједно са испитном свеском.
- Сва евентуална питања у вези са задацима постављати до журни и испитиваоцима и деци тестира.
- На последњој страни испитнице сваке одговоре уписати све податке, а у рубрици **Напомене** или **предметност** представити.
- Бројер испита: МНЛ 210 - 0709

september 16

③ 1: m, e

3: m, R

4: m

2: ϕ, e

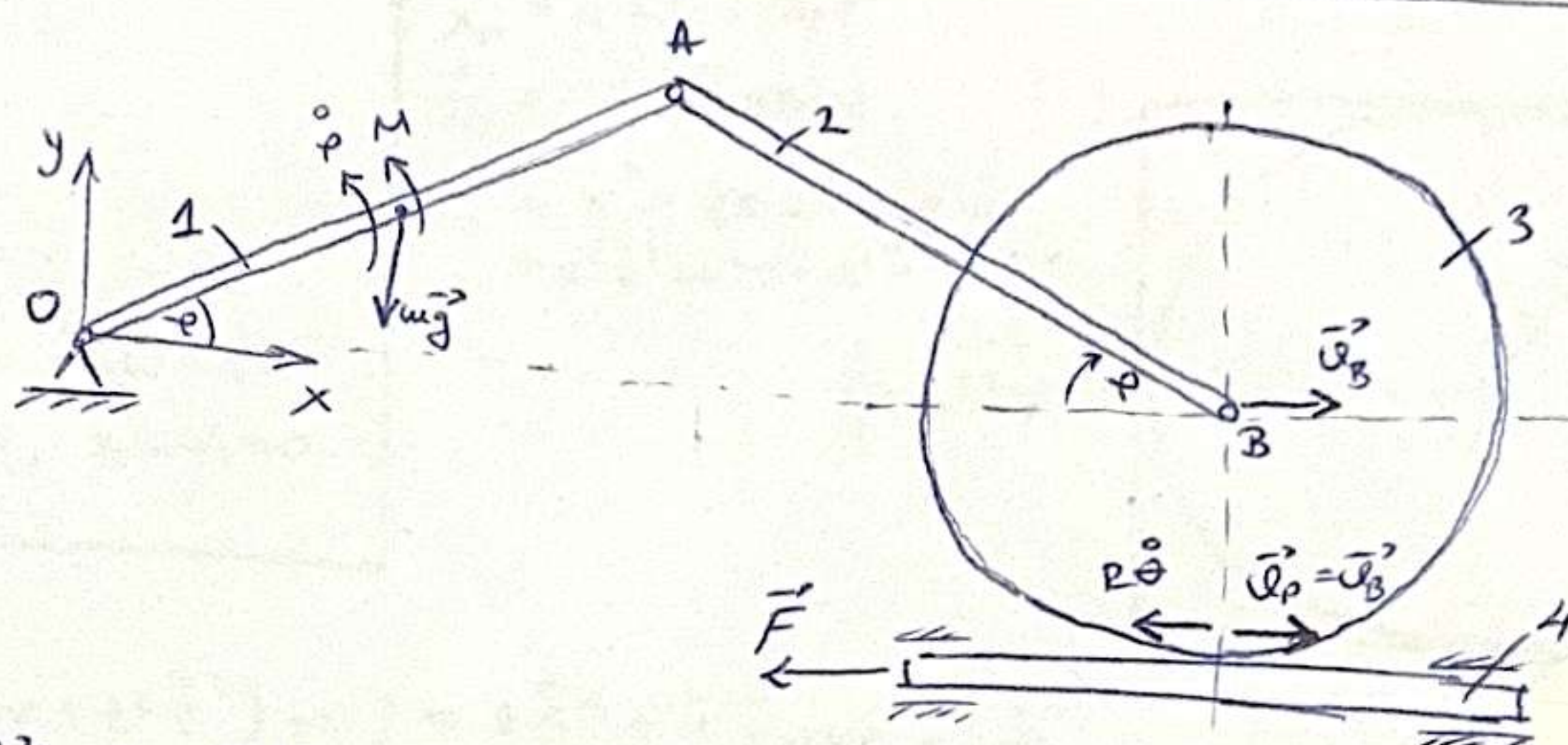
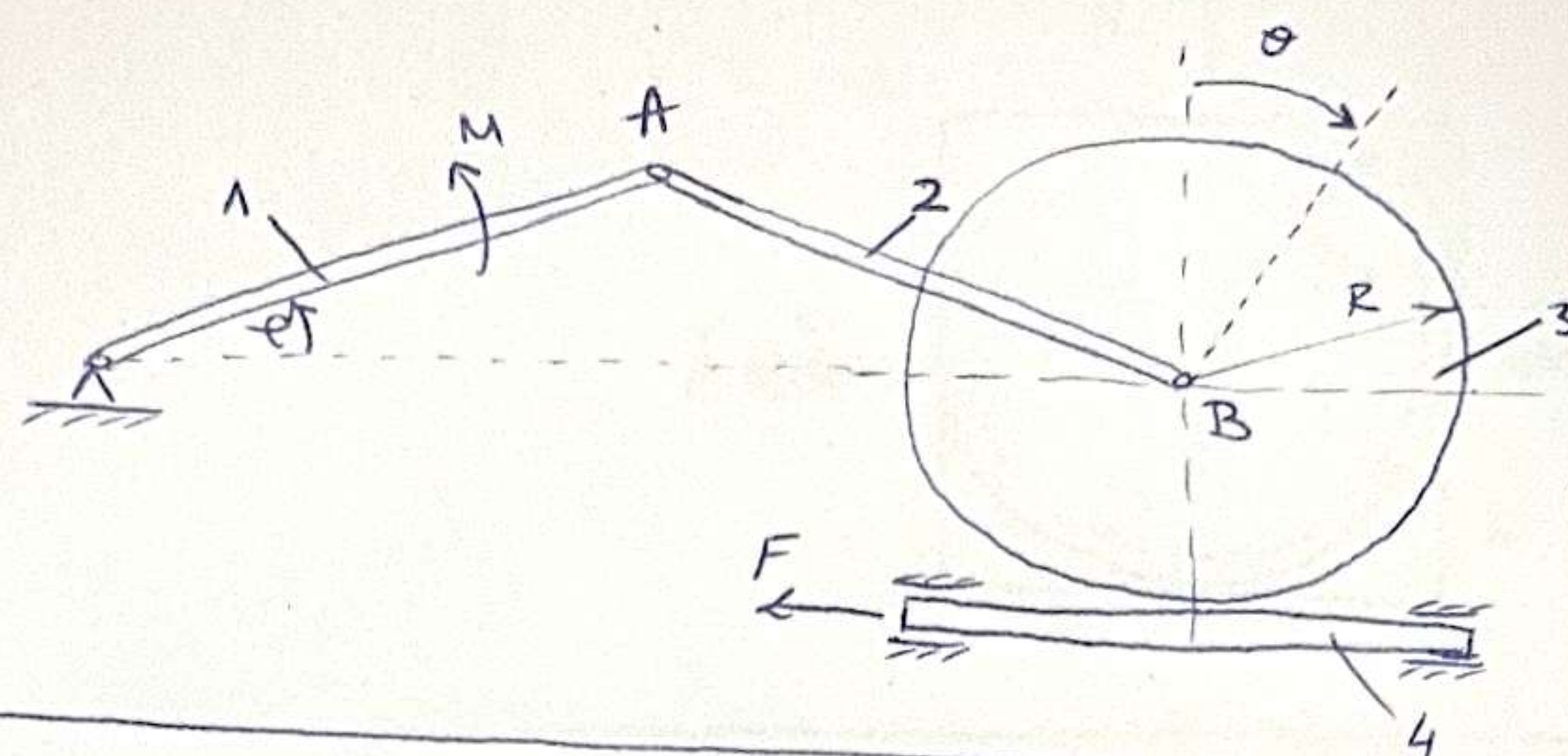
sila F , spreg M

to: sistem minge
1 je horizontalan

$\theta_0 = 0$

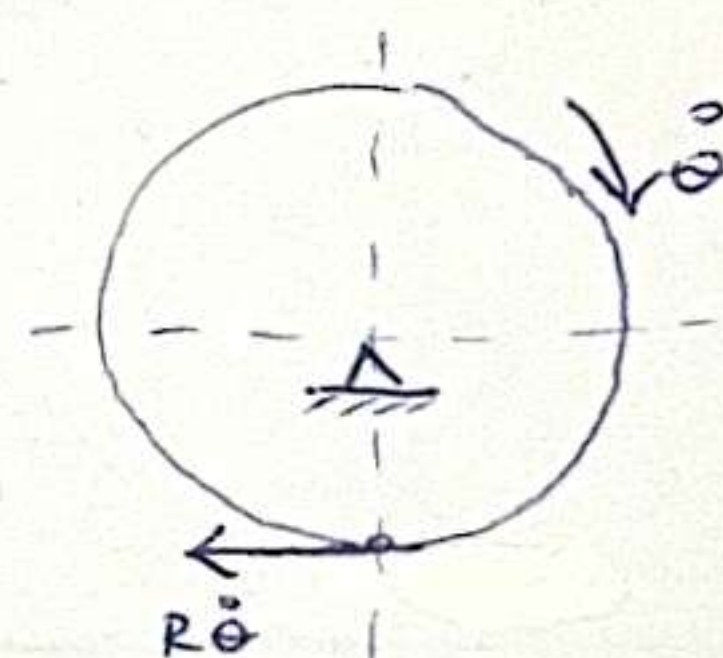
def. i-ve za φ, θ ?

$\ddot{\varphi}(t) = ?$, $\ddot{\theta}(t) = ?$



$$x_B = 2e\cos\varphi \rightarrow v_B = \dot{x}_B = -2e\dot{\varphi}\sin\varphi$$

disk 3 - relacija



$$T = T_1 + T_3 + T_4$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m\left(\frac{e}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m e^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{8}m e^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24}m e^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6}m e^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2}m v_B^2 + \frac{1}{2}\frac{m R^2}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m 4e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{4}m R^2 \dot{\theta}^2 = 2m e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{4}m R^2 \dot{\theta}^2$$

$$T_4 = \frac{1}{2}m v_4^2 + 0 = \frac{1}{2}m (R\dot{\theta} - v_B)^2 = \frac{1}{2}m (R\dot{\theta} + 2e\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 = \frac{1}{2}m (R^2 \dot{\theta}^2 + 4R e \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin\varphi + 4e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi) = \frac{1}{2}m R^2 \dot{\theta}^2 + 2m R e \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin\varphi + 2m e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi$$

$$T = \frac{1}{6}m e^2 \dot{\varphi}^2 + 4m e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \frac{3}{4}m R^2 \dot{\theta}^2 + 2m R e \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 8m e^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cos\varphi + 2m R e \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3}m e^2 \dot{\varphi} + 8m e^2 \dot{\varphi} \sin^2\varphi + 2m R e \dot{\theta} \sin\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2}m R^2 \dot{\theta} + 2m R e \dot{\varphi} \sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3}m e^2 \ddot{\varphi} + 8m e^2 \dot{\varphi} \sin^2\varphi + 16m e^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cos\varphi + 2m R e \ddot{\theta} \sin\varphi + 2m R e \dot{\theta} \dot{\varphi} \cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2}m R^2 \ddot{\theta} + 2m R e \ddot{\varphi} \sin\varphi + 2m R e \dot{\varphi}^2 \cos\varphi$$

$$\partial A = M \partial \varphi + F(R \partial \theta - dx_B) - mg \partial y_1 = M \partial \varphi + F(R \partial \theta + 2e \sin\varphi \partial \varphi) - mg \partial \left(\frac{e}{2} \sin\varphi\right) = \partial A = M \partial \varphi + F R \partial \theta + 2F e \sin\varphi \partial \varphi - \frac{1}{2}m g e \cos\varphi \partial \varphi$$

$$\frac{1}{3}m e^2 \ddot{\varphi} + 8m e^2 \dot{\varphi} \sin^2\varphi + 8m e^2 \dot{\varphi}^2 \sin\varphi \cos\varphi + 2m R e \ddot{\theta} \sin\varphi = M + 2F e \sin\varphi - \frac{1}{2}m g e \cos\varphi \quad (1)$$

$$\frac{3}{2}m R^2 \ddot{\theta} + 2m R e \ddot{\varphi} \sin\varphi + 2m R e \dot{\varphi}^2 \cos\varphi = F R \quad (2)$$

$$t_0 = 0: \quad \varphi_0 = 0, \quad \theta_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = 0, \quad \dot{\theta}_0 = 0$$

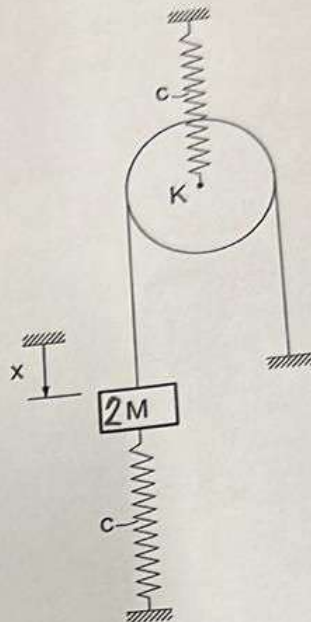
$$(1) \Rightarrow \frac{1}{3}m e^2 \ddot{\varphi}_0 = M - \frac{1}{2}m g e \Rightarrow \ddot{\varphi}_0 = \frac{3M}{m e^2} - \frac{3}{2} \frac{g}{e}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{3}{2}m R^2 \ddot{\theta}_0 = F R \Rightarrow \ddot{\theta}_0 = \frac{2}{3} \frac{F}{m R}$$

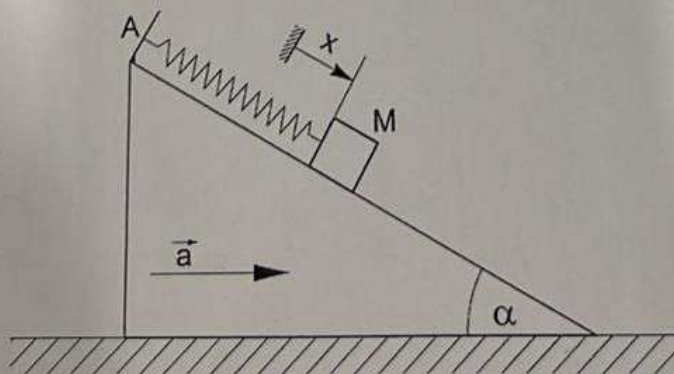
2. GRUPA

MEHANIKA 3

1. Mehanički sistem prikazan na slici sastoji se od kotura K zanemarljive mase i tege M mase $2m$. Centar kotura vezan je za oprugu krutosti c čiji je drugi kraj vezan za nepokretni zid. Centar kotura može da se kreće pravolinijski duž vertikalnog pravca. Teg M vezan je sa donje strane za oprugu krutosti c čiji je drugi kraj vezan za nepokretnu podlogu. Sa gornje strane teg je vezan neistegljivim užetom koje je prebačeno preko kotura K i vezano za nepokretnu podlogu. Položaj tege meri se koordinatom x kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku $t_0 = 0$ sistem je mirovao, opruge su bile nenapregnute i tada je $x = 0$.
- a) Odrediti pomeranje x_1 tela M u trenutku t_1 , gde je t_1 prvi pozitivan trenutak kada se telo M ponovo zaustavi.
- b) Odrediti ubrzanje tela M u tom istom trenutku t_1 .



2. Trougaona prizma kreće se translatorno po horizontalnoj nepokretnoj ravni ubrzanjem $\vec{a}$ koje se menja po zakonu $a = \sqrt{3}g \sin(3t) \frac{m}{s^2}$ (g je ubrzanje sile Zemljine teže). Po strmoj strani prizme može da klizi bez trenja telo M mase m . Telo M je vezano oprugom krutosti c , dok je drugi kraj opruge vezan za prizmu u tački A. U početnom trenutku telo M je bilo u relativnom miru u položaju u kome je opruga nenapregnuta, i tada je $x = 0$. Dato je: $\alpha = 30^\circ$ i $\frac{c}{m} = 3 \frac{1}{s^2}$.
- a) Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja $x(t)$ tela M duž strme ravni.
- b) Odrediti reakciju veze između tela M i prizme u funkciji vremena.

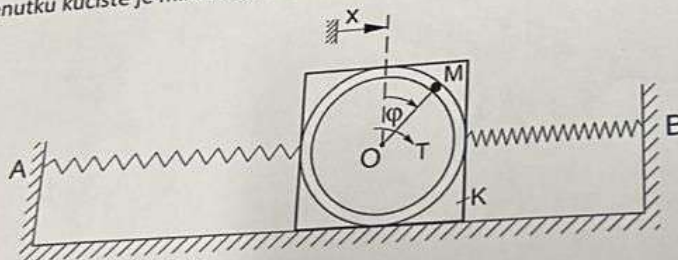


JUN 2024

2. GRUPA

MEHANIKA 3

3. Kućište K mase 3 kg može da se kreće po glatkoj horizontalnoj podlozi. Kućište je vezano za dve identične opruge krutosti $c = 8 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ čiji su suprotni krajevi vezani za nepokretne tačke A i B . Položaj kućišta određen je koordinatom x (kada je $x = 0$ opruge su nenapregnute). U kućištu je urezan žleb poluprečnika $R = 1 \text{ m}$ po kome može da se kreće bez trenja materijalna tačka M mase 1 kg . Tačka M dovodi se u kretanje posredstvom poluge OM zanemarljive mase ($OM = R$), a položaj tačke meri se uglom φ , kao što je prikazano na slici. Na polugu deluje spreg sila momenta intenziteta T .
- a) Za date generalisane koordinate x i φ napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.
- b) Odrediti $x(t)$ u slučaju da se poluga OM obrće konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 4 \frac{1}{\text{s}}$. U početnom trenutku kućište je mirovalo i važio je $x_0 = \varphi_0 = 0$.



jun 24

③ K: 3 kg

opruga: $c = 8 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$

$\Delta l = 0$ za $x = 0$

žleb $R = 1 \text{ m}$

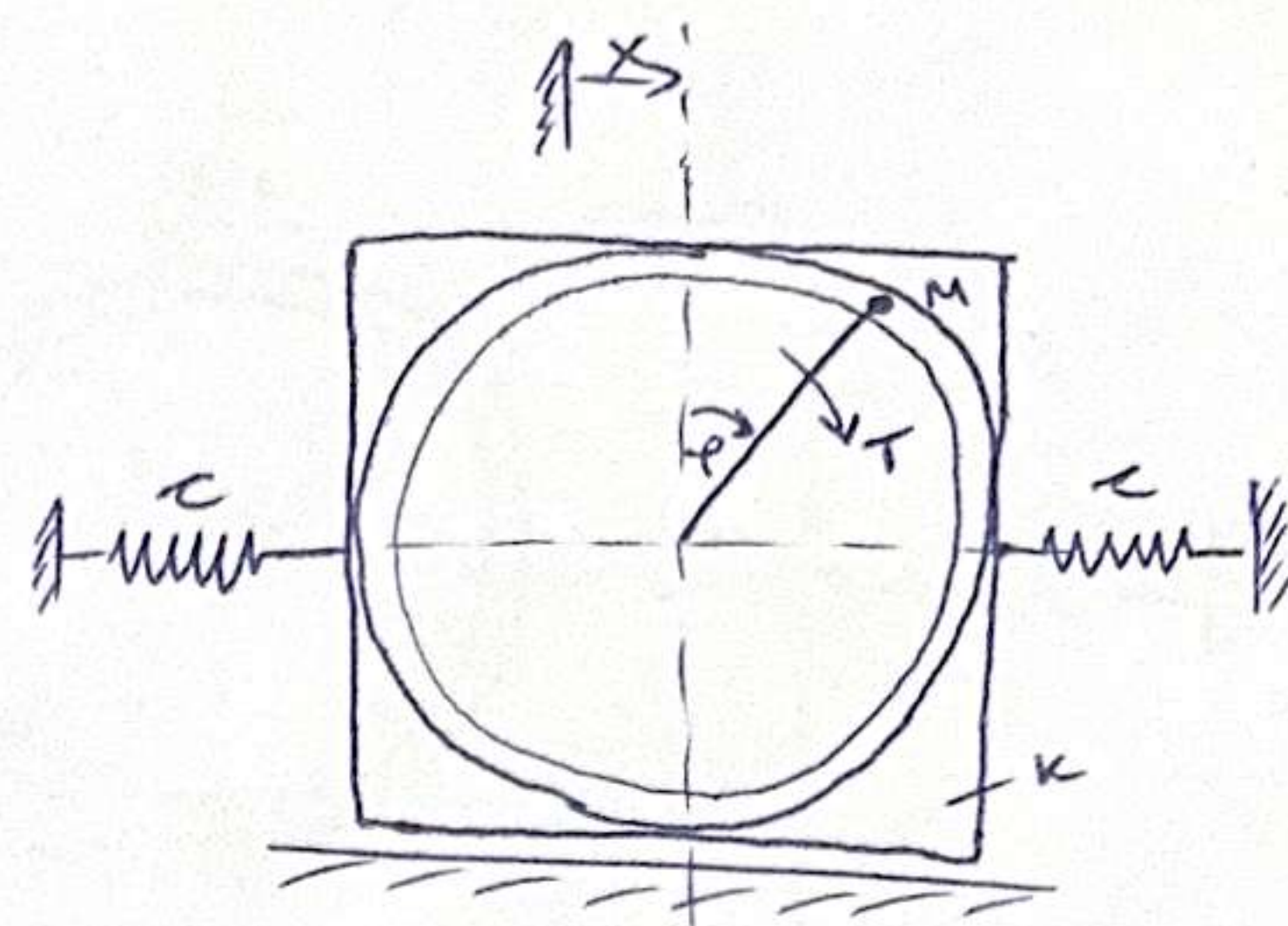
$M = 1 \text{ kg}$

OM: $\emptyset, R$

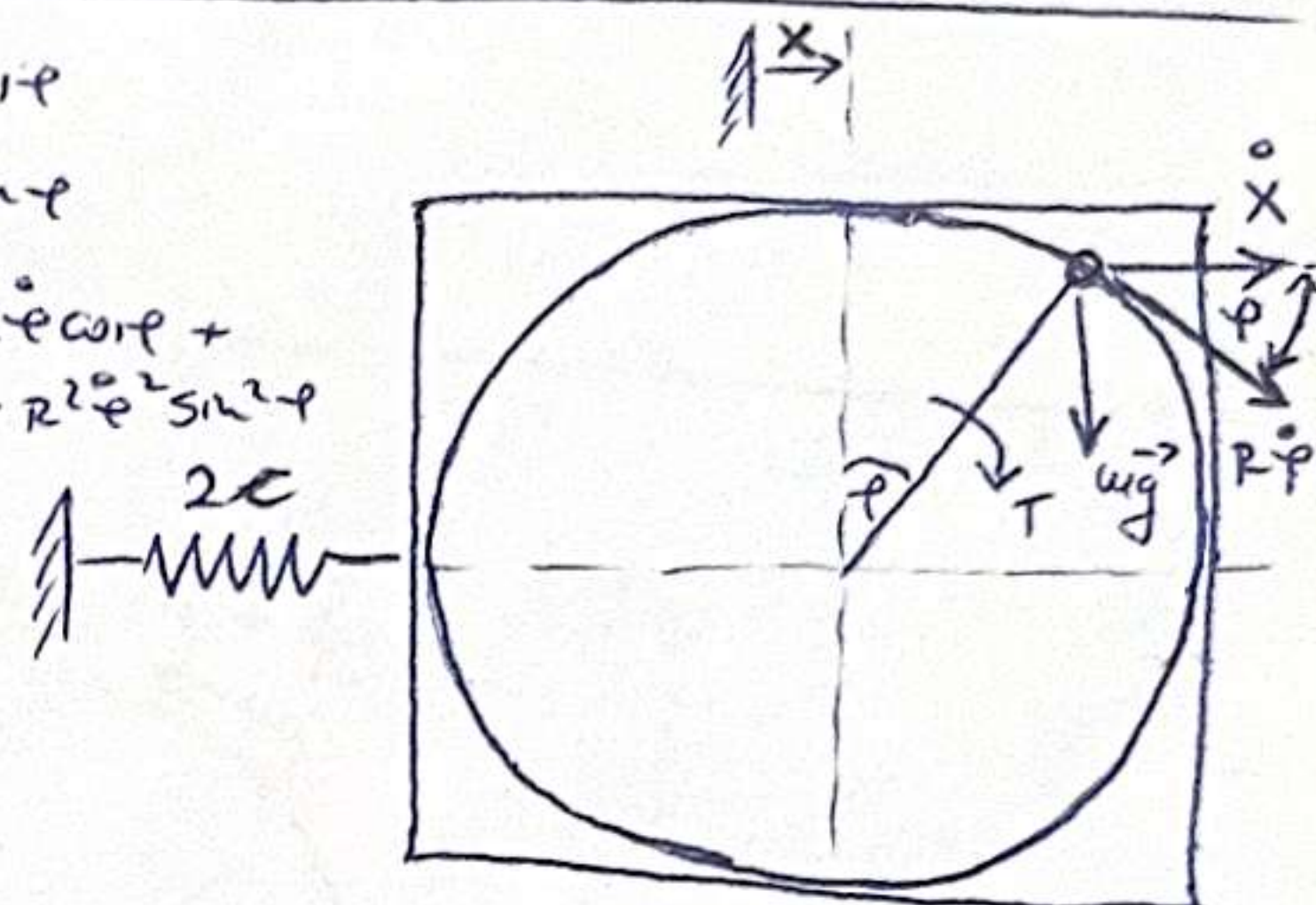
moment T

1) dif. j-ne za x, φ

2) $x(t) = ?$ - za slučaj kada je $\dot{\varphi} = \omega = 4 \text{ s}^{-1}$
to: kvadratno urotanje, $x_0 = \varphi_0 = 0$



$$\begin{aligned} \vec{x}_M &= \vec{x} + R \vec{e} \cos \varphi \\ \vec{y}_M &= -R \vec{e} \sin \varphi \\ v_M^2 &= \dot{x}^2 + 2R \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \\ &\quad + R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi + R^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi \end{aligned}$$



$$T = \left[\frac{1}{2} 3 \dot{x}^2 + 0 \right]_K + \left[\frac{1}{2} 1 (\dot{x}^2 + 2R \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + R^2 \dot{\varphi}^2) + 0 \right] = 2 \dot{x}^2 + \dot{x} \dot{\varphi} \cos \varphi + \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 4 \dot{x} + \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 4 \ddot{x} + \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{x} + \dot{\varphi} \cos \varphi, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \ddot{x} + \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{x} \dot{\varphi} \sin \varphi$$

$$\partial A = T \partial \varphi - 2cx \partial x - g \partial y_M = T \partial \varphi - 16x \partial x + g \partial \varphi \cos \varphi$$

$$\begin{cases} 4\ddot{x} + \ddot{\varphi} \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \sin \varphi = -16x \\ \ddot{\varphi} + \dot{x} \cos \varphi = T + g \cos \varphi \end{cases}$$

2) $\dot{\varphi} = \omega = 4, \quad \ddot{\varphi} = 0$

$$4\ddot{x} + 0 - 16 \sin \varphi = -16x \quad |:4$$

$$\ddot{x} + 4x = 4 \sin(4t), \quad \omega^2 = 4, \quad \omega = 4, \quad h_1 = 4$$

$$x_h = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t$$

$$x_p = A \cos 4t + B \sin 4t$$

$$\ddot{x}_p = -16(A \cos 4t + B \sin 4t)$$

$$-16A + 4A = 0 \rightarrow \underline{A = 0}$$

$$-16B + 4B = 4 \rightarrow \underline{B = -\frac{1}{3}}$$

$$x = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{3} \sin 4t$$

$$\dot{x} = -2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t - \frac{4}{3} \cos 4t$$

$$x(0) = C_1 + 0 = 0 \rightarrow \underline{C_1 = 0}$$

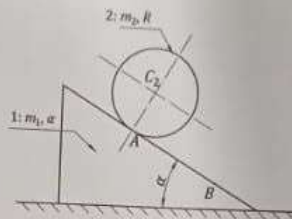
$$\dot{x}(0) = 0 + 2C_2 - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow \underline{C_2 = \frac{2}{3}}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{3} \sin 2t - \frac{1}{3} \sin 4t}$$

Mehanika 3

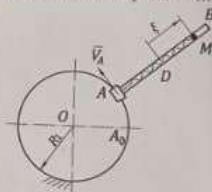
Julski ispitni rok 2024. – grupa 2

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase $m_1 = m$ i nagibnog ugla $\alpha = 30^\circ$ i diska 2 mase $m_2 = 2m$ i poluprečnika R . Prizma može da klizi bez trenja po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi, a disk 1 može da se kotrlja bez klizanja po strmoj stranici prizme. U početnom trenutku sistem miruje, a disk dodiruje prizmu u tački A . Odrediti pomeranje prizme do trenutka kada se disk nađe u tački B prizme, ako je dužina $\overline{AB} = 4\sqrt{3}R$. U istom trenutku odrediti brzinu prizme i ugaonu brzinu diska.



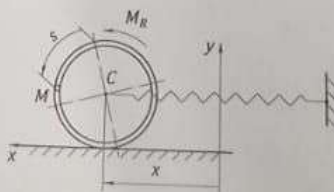
Slika uz zadatak 1.

2. Klizač A kreće se brzinom konstantnog intenziteta $V_A = \omega_0 R$, smeru kao na slici, po nepokretnoj kružnoj vodici poluprečnika $R_1 = R$, koja se nalazi u vertikalnoj ravni. Za klizač A kruto je vezana cev AB upravno na tangentu vodice. U cevi AB nalazi se kuglica M zanemarljivih dimenzija i mase m , koja je oprugom krutosti $c = 5m\omega_0^2$ vezana za tačku A cevi. Ako se klizač A u početnom trenutku nalazio u položaju A_0 prikazanom na slici, a kuglica u tački D cevi, pri čemu je opruga u tom položaju nenapregnuta, odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja kuglice u odnosu na tačku D cevi i reakciju cevi u funkciji vremena. Dato je $\overline{AD} = R$.



Slika uz zadatak 2.

3. Disk 1 mase $m_1 = 4m$ i poluprečnika R može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za središte diska C vezana je opruga krutosti c . Po tankom žlebu diska može da klizi bez trenja kuglica M mase $m_2 = m$, gde se relativan položaj kuglice na disku meri lučnom koordinatom s . Na disk deluje spreg sila momenta intenziteta M_R , smeru kao na slici. Ako su se u početnom trenutku središte C diska i kuglica M nalazili na y osi i opruga bila nenapregnuta, odrediti Lagranževe diferencijalne jednačine druge vrste u odnosu na generalisane koordinate s i x .



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

jul 24

③ 1: $m_1 = 4m$, R (disk)

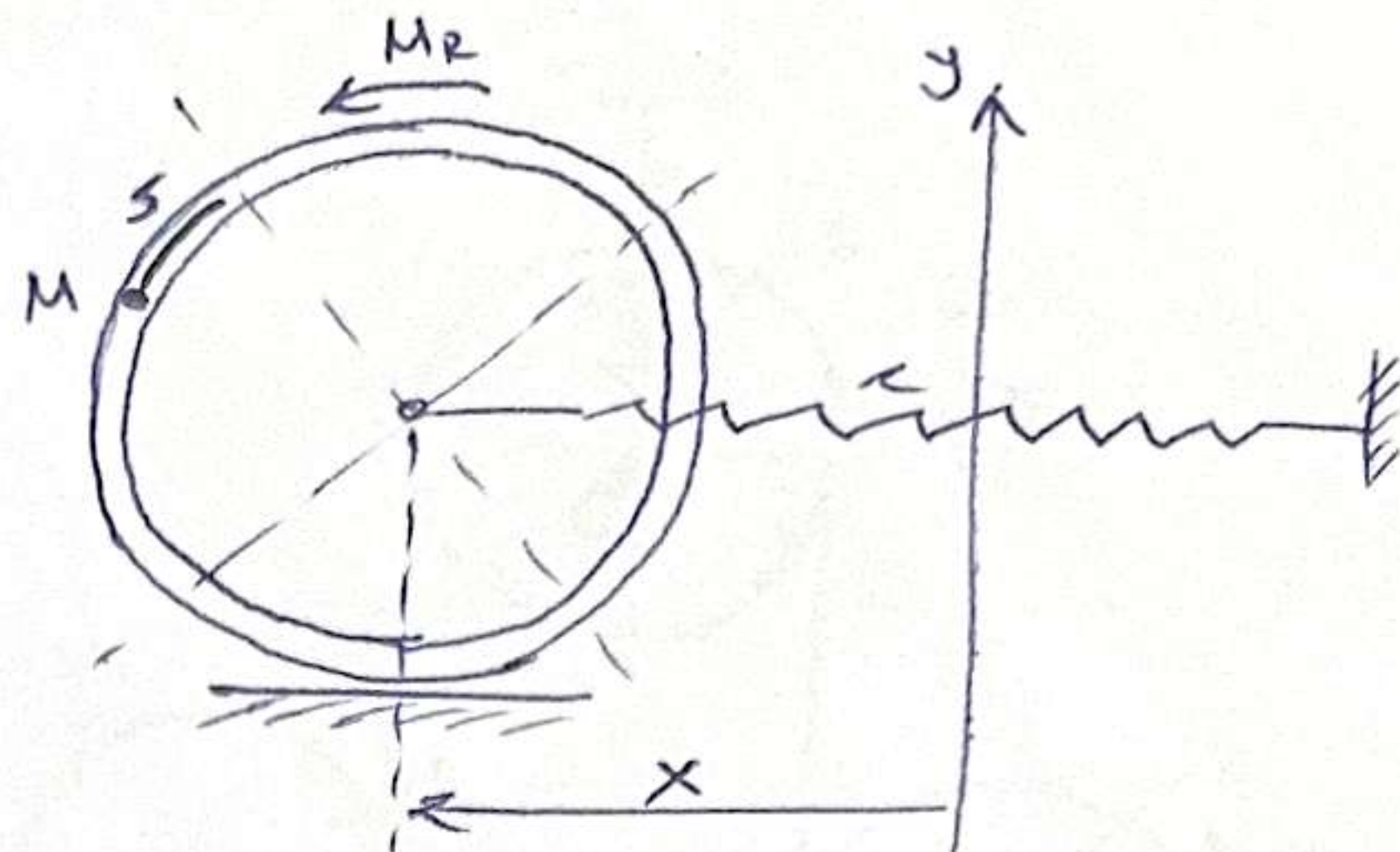
opruga: c

M: $m_2 = m$

moment M_R

to: C i M su na osi y
opruga je neupregnutu

diff. j-ve za s, x ?



$$T = T_C + T_M$$

$$T_C = \frac{1}{2} 4m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \frac{4mR^2}{2} \left(\frac{\dot{x}}{R} \right)^2 = 3m \dot{x}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2} m v_M^2 + 0 =$$

$$= m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{s} + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m \dot{x}^2 \cos^2 \left(\frac{s+x}{R} \right) + m \dot{x} \dot{s} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$T = 4m \dot{x}^2 + m \dot{x} \dot{s} + \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + m \dot{x}^2 \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) + m \dot{x} \dot{s} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = -m \dot{x}^2 \sin \left(\frac{s+x}{R} \right) \cdot \frac{1}{R} - m \dot{x} \dot{s} \sin \left(\frac{s+x}{R} \right) \cdot \frac{1}{R} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = m \dot{x} + m \dot{s} + m \dot{x} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

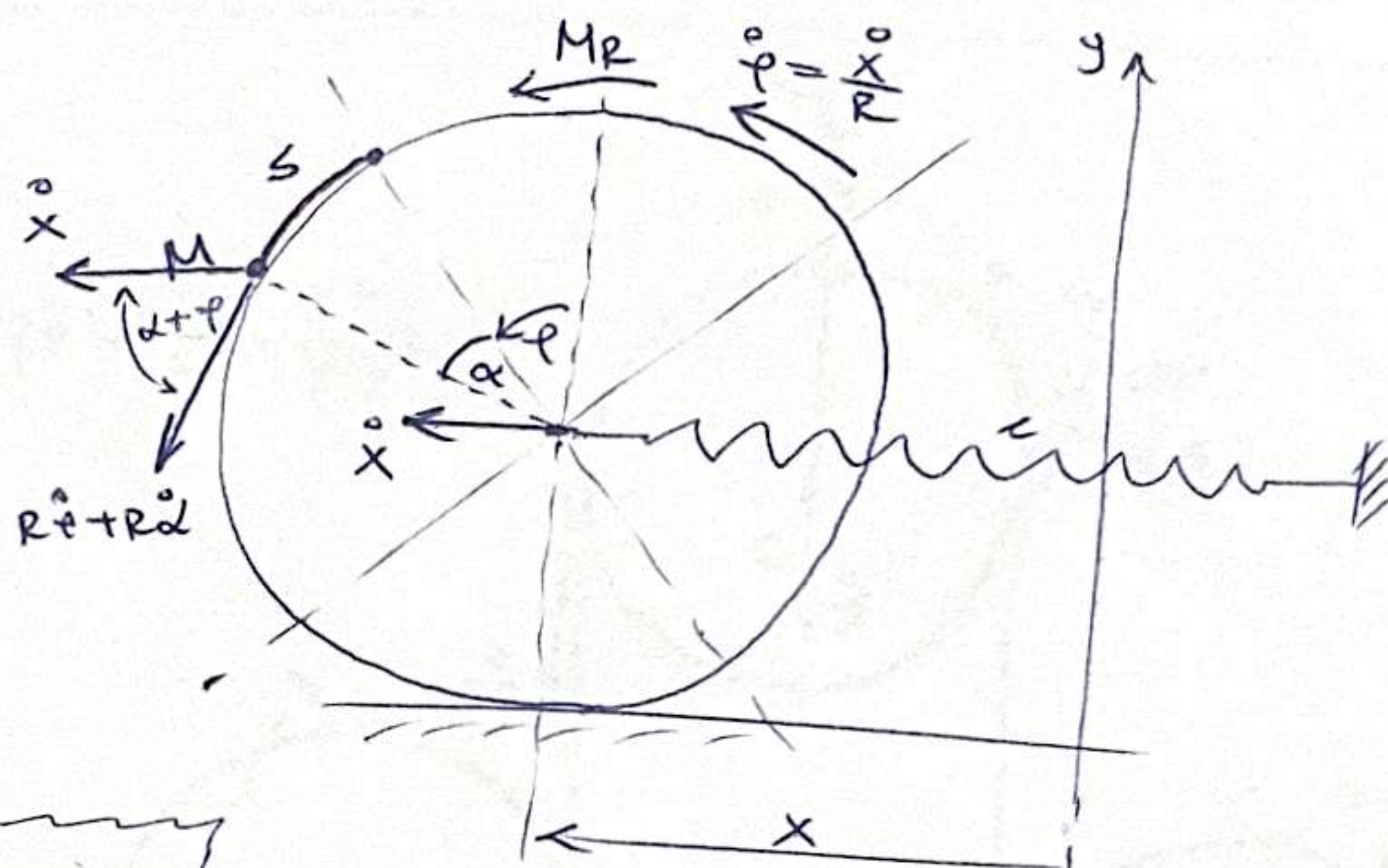
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = m \ddot{x} + m \ddot{s} + m \ddot{x} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) - m \dot{x} \sin \left(\frac{s+x}{R} \right) \cdot \left(\frac{\dot{s} + \dot{x}}{R} \right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 8m \dot{x} + m \dot{s} + 2m \dot{x} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) + m \dot{s} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 8m \ddot{x} + m \ddot{s} + 2m \ddot{x} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) -$$

$$- 2m \dot{x} \sin \left(\frac{s+x}{R} \right) \cdot \left(\frac{\dot{s} + \dot{x}}{R} \right) + m \ddot{s} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) -$$

$$- m \dot{s} \sin \left(\frac{s+x}{R} \right) \cdot \left(\frac{\dot{s} + \dot{x}}{R} \right)$$



$$\alpha = \frac{s}{R}, \quad \dot{\alpha} = \frac{\dot{s}}{R}, \quad \phi = \frac{x}{R}, \quad \dot{\phi} = \frac{\dot{x}}{R}$$

$$\dot{x}_M = \dot{x} + (R\dot{\phi} + R\dot{\alpha}) \cos(\alpha + \phi) = \dot{x} + (\dot{x} + \dot{s}) \cos \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$\dot{y}_M = -(R\dot{\phi} + R\dot{\alpha}) \sin(\alpha + \phi) = -(\dot{x} + \dot{s}) \sin \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$v_M^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}(\dot{x} + \dot{s}) \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) + (\dot{x} + \dot{s})^2 \cos^2 \left(\frac{s+x}{R} \right) + (\dot{x} + \dot{s})^2 \sin^2 \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$v_M^2 = \dot{x}^2 + 2\dot{x}^2 \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) + 2\dot{x}\dot{s} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) + (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s} + \dot{s}^2) =$$

$$v_M^2 = 2\dot{x}^2 + 2\dot{x}\dot{s} + \dot{s}^2 + 2\dot{x}^2 \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) + 2\dot{x}\dot{s} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$\partial A = -cx \partial x + M_R \partial \phi - mg \partial y_M = -cx \partial x + M_R \frac{\partial x}{R} + mg (\partial x + \partial s) \sin \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

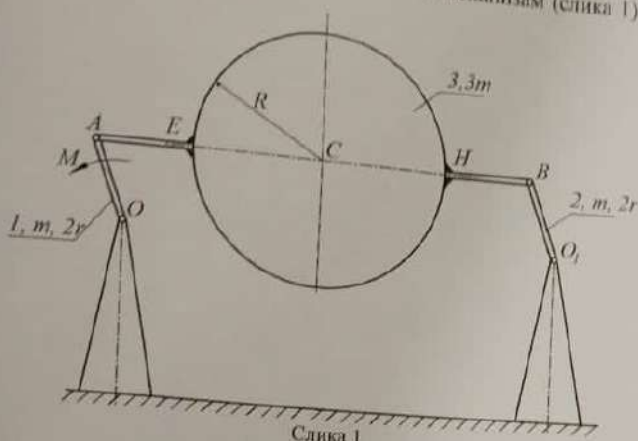
$$m \ddot{x} + m \ddot{s} + m \ddot{x} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) = mg \sin \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

$$8m \ddot{x} + m \ddot{s} + 2m \ddot{x} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) - m \dot{x} \sin \left(\frac{s+x}{R} \right) \cdot \left(\frac{\dot{s} + \dot{x}}{R} \right) + m \ddot{s} \cos \left(\frac{s+x}{R} \right) - m \dot{s} \sin \left(\frac{s+x}{R} \right) \cdot \left(\frac{\dot{s} + \dot{x}}{R} \right) =$$

$$= -cx \partial x + \frac{M_R}{R} + mg \sin \left(\frac{s+x}{R} \right)$$

МЕХАНИКА 3, шифра предмета МЕХ-210-0799, 15.09.2023., друга група, ИТ

Задатак 1. Зглобно-паралелограмни механизам (слика 1) који се налази у вертикалној равни, чине хомогени штапови (криваје) 1 и 2 (истих дужина $OA = OB = 2r$, и истих маса, m) и тело 3 (које чине круто везани штапови AE и HB и диск са центром у тачки C чији је полупречник $R = 3r$), масе $3m$. Штапови 1 и 2 обрћу се око непокретних оса које пролазе кроз тачке O и O_1 , респективно, и управне су на раван кретања механизма (на раван цртежа). Систем (механизам) се доводи у кретање помоћу спрега сила момента интензитета $M = 40mgr$, који дејствује на хомогени штап OA . Одредити брзину центра диска C , након што криваја OA , полазећи из стања мировања, направи три пуна обрта.



Слика 1

Задатак 2. Тело M , масе m , обешено је о доњи крај редно везаних опруга крутости c_1 и c_2 . На тело делује принудна сила $F_0 \sin(\Omega t)$.

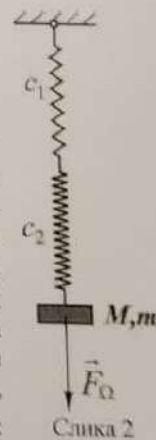
А) Одредити једначину принудних осцилација тела M .

Б) Одредити период слободних осцилација тела M .

В) Одредити коначну једначину кретања тела M , ако је кретање започето из положаја статичке равнотеже из стања мировања.

Дато је: $m = 1 \text{ kg}$, $c_1 = c$, $c_2 = 2c$, $\Omega = \sqrt{\frac{2c}{3m}}$, $F_0 = \text{const}$.

Координатни почетак узети у положају статичке равнотеже тела.



Слика 2

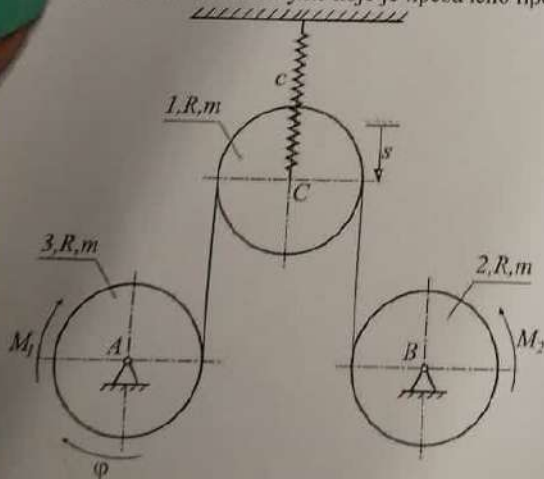
Задатак 3. Котурови 2 и 3, једнаких маса, m , и полупречника, R , могу да се обрћу око хоризонталних оса које пролазе кроз непокретне тачке A и B , услед дејства спрегова сила момената константних интензитета M_1 и M_2 (слика 3). На котурове 2 и 3 намотано је гупко, лако и неистегљиво уже које је пребачено преко котура 1, масе m , полупречника R . За центар C , котура 1, везана је једним крајем опруга крутости c , која је другим крајем везана за непокретни плафон. Опруга је била ненапрегнута у почетном положају. Одредити закон кретања центра C , котура 1, ($s = s(t) = ?$), ако су почетни услови:

$$s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0.$$

За генералисане координате усвојити:

s (положај тачке C) и φ (угао обртања котура 3).

Проклизавања нема, трење занемарити. При кретању система уже је увек затегнуто. Котурове 1, 2 и 3 сматрати хомогеним дисковима. Систем се креће у вертикалној равни.



Слика 3

oktobar 23

③ 2: m, R

3: m, R

spregovi M_1, M_2

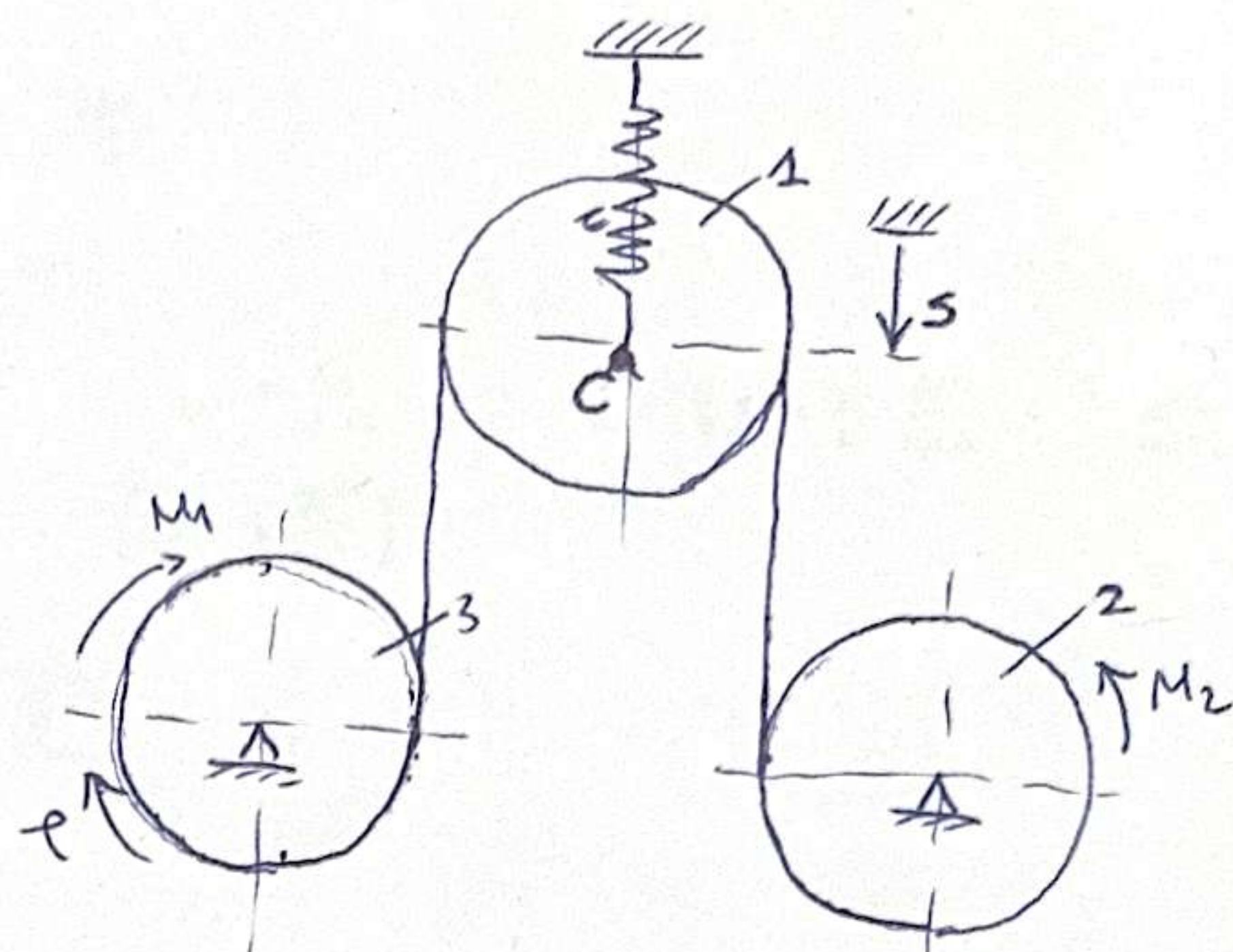
1: m, R

oprga: $c, \Delta l(h)=0$

$s(t)=?$

to: $s_0=0, \dot{s}_0=0$

general. koordin. s, φ



$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{s}}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \left(\dot{\varphi}^2 - \frac{2 \dot{\varphi} \dot{s}}{R} + \frac{\dot{s}^2}{R^2} \right) =$$

$$= \frac{3}{4} m \dot{s}^2 + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2} m R \dot{\varphi} \dot{s}$$

$$T_3 = 0 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = 0 + \frac{1}{2} \frac{m R^2}{2} \left(\dot{\varphi} - \frac{2 \dot{s}}{R} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} m R^2 \left(\dot{\varphi}^2 - \frac{4 \dot{\varphi} \dot{s}}{R} + \frac{4 \dot{s}^2}{R^2} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 + m \dot{s}^2 - m R \dot{\varphi} \dot{s}$$

$$T = \frac{3}{4} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{7}{4} m \dot{s}^2 - \frac{3}{2} m R \dot{\varphi} \dot{s}$$

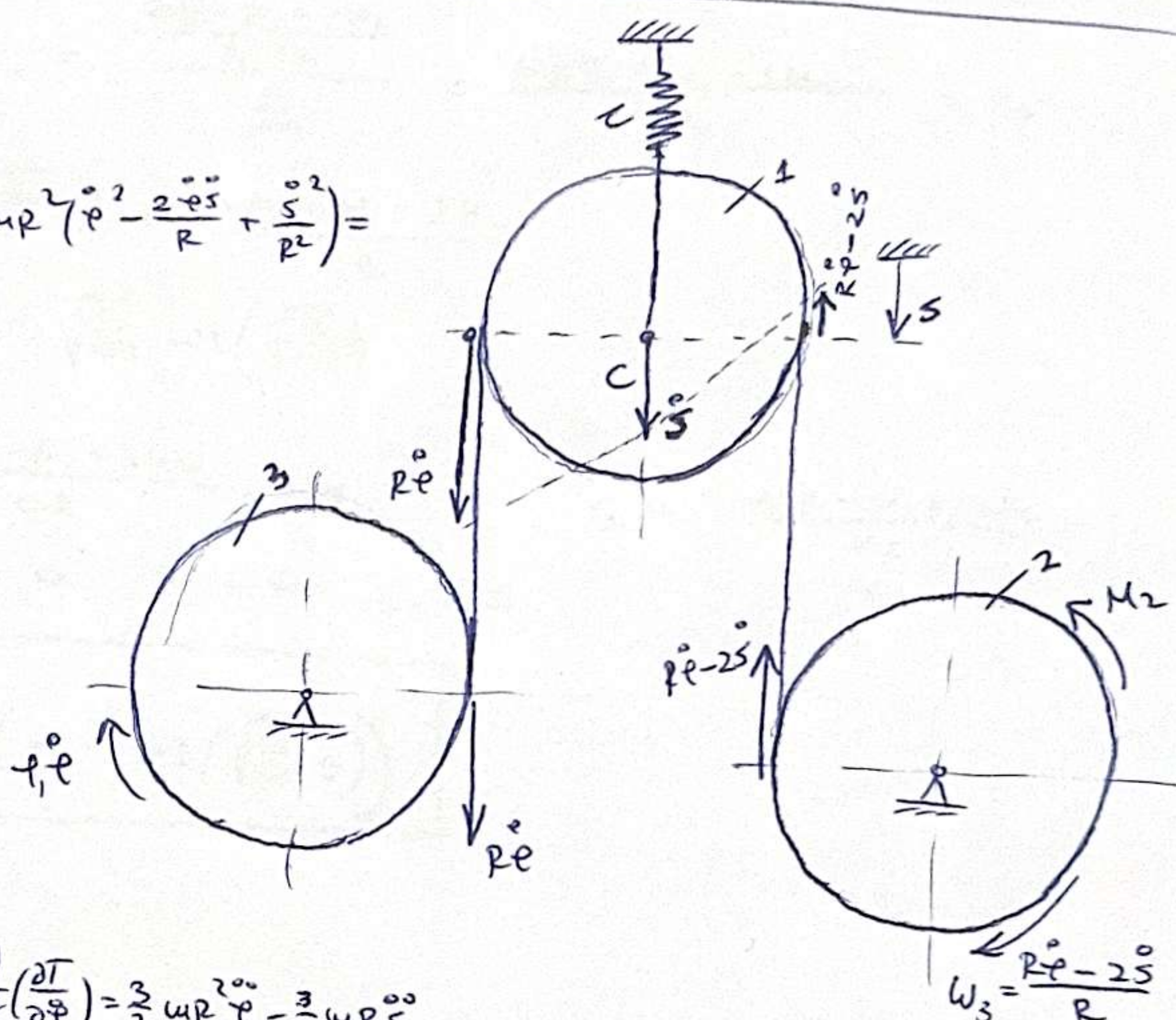
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\varphi} - \frac{3}{2} m R \dot{s}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi} - \frac{3}{2} m R \ddot{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{7}{2} m \dot{s} - \frac{3}{2} m R \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = \frac{7}{2} m \ddot{s} - \frac{3}{2} m R \ddot{\varphi}$$

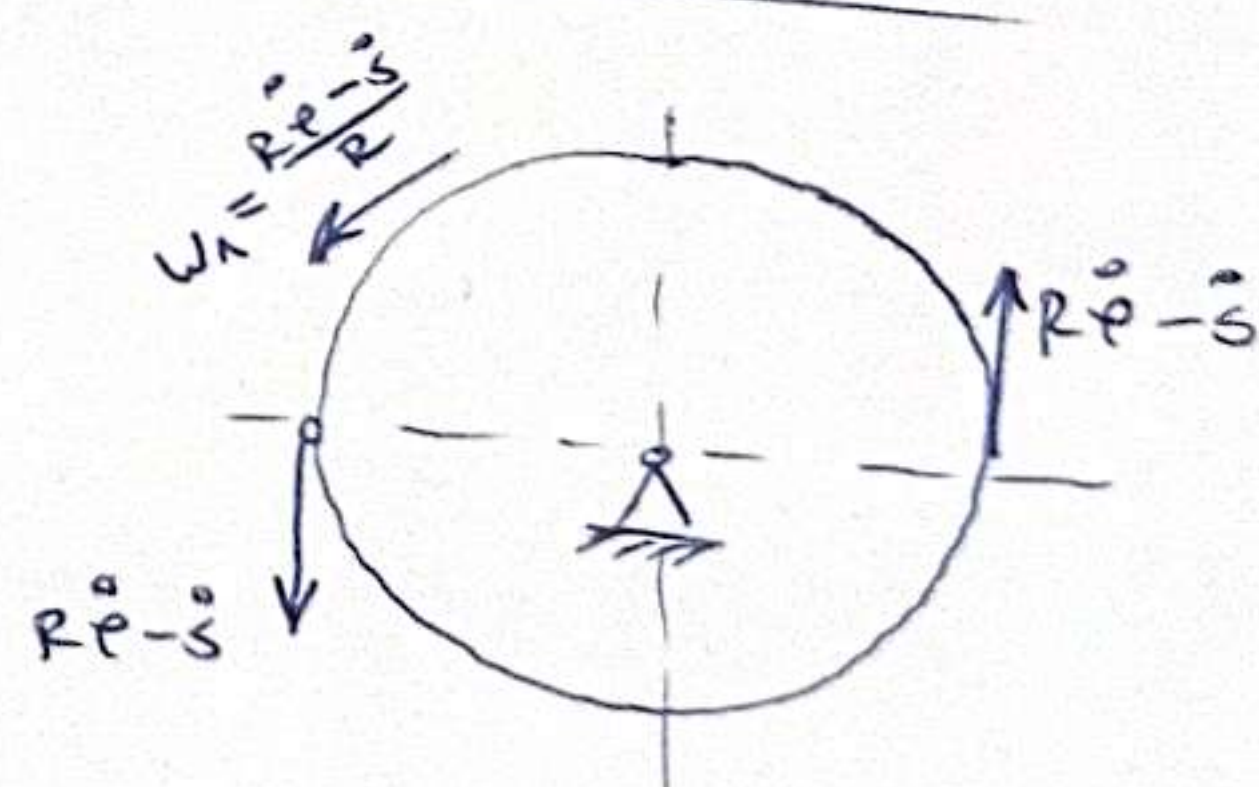
$$\partial A = M_1 \partial \varphi + m g \partial s - c s \partial s - M_2 \left(\partial \varphi - \frac{2 \partial s}{R} \right)$$

$$\frac{3}{2} m R^2 \ddot{\varphi} - \frac{3}{2} m R \ddot{s} = M_1 - M_2 \quad (1)$$

$$\frac{7}{2} m \ddot{s} - \frac{3}{2} m R \ddot{\varphi} = m g - c s - \frac{2 M_2}{R} \quad (2)$$



disk 1 - relativno



$$(1) \Rightarrow \frac{3}{2} \omega R \ddot{\varphi} = \frac{3}{2} \omega \ddot{s} + \frac{M_1}{R} - \frac{M_2}{R}$$

$$(2) \Rightarrow \frac{1}{2} \omega \ddot{s} - \frac{3}{2} \omega \ddot{s} - \frac{M_1}{R} + \frac{M_2}{R} = \omega g - \kappa s - \frac{2M_2}{R}$$

$$2\omega \ddot{s} + \kappa s = \omega g + \frac{M_1}{R} - \frac{3M_2}{R} \quad / : 2\omega$$

$$\ddot{s} + \frac{\kappa}{2\omega} s = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2} \frac{M_1}{\omega R} - \frac{3}{2} \frac{M_2}{\omega R}$$

$$\ddot{s} + \omega^2 s = h$$

$$(\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{2m}})$$

$$h = \frac{1}{2}g + \frac{1}{2} \frac{M_1}{\omega R} - \frac{3}{2} \frac{M_2}{\omega R}$$

$$\# : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega = 0 \pm i \cdot \sqrt{\frac{\kappa}{2m}}$$

$$s_h = C_1 \cos(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t)$$

$$P : x_p = A, \quad \ddot{x}_p = 0$$

$$0 + \omega^2 A = h \rightarrow A = \frac{h}{\omega^2} = \frac{\frac{\omega g R + M_1 - 3M_2}{2\omega R}}{\frac{\kappa}{2m}} = \frac{\omega g R + M_1 - 3M_2}{\kappa R} = x_p$$

$$s = C_1 \cos(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t) + \frac{\omega g R + M_1 - 3M_2}{\kappa R}$$

$$\dot{s} = -C_1 \sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \sin(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t) + C_2 \sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \cos(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t)$$

$$s(0) = 0 \rightarrow C_1 + \frac{\omega g R - M_1 + 3M_2}{\kappa R} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{\omega g R - M_1 + 3M_2}{\kappa R}$$

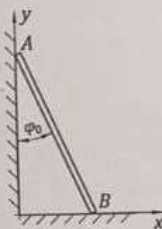
$$\dot{s}(0) = 0 \rightarrow 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$s(t) = \frac{\omega g R + M_1 - 3M_2}{\kappa R} (1 - \cos(\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} t))$$

Mehanika 3

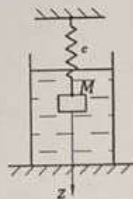
Oktobar 2. – grupa 1

1. Homogeni štap AB , dužine $\overline{AB} = 2l$, nalazi se u vertikalnoj ravni i oslanja se krajem A na glatki vertikalni zid, a krajem B o glatku horizontalnu ravan. U početnom trenutku štap miruje i sa vertikalnim zidom zaklapa ugao φ_0 i započinje kretanje pod dejstvom svoje težine. Pri kojoj vrednosti ugla φ će se kraj A štapa odvojiti od vertikalnog zida?



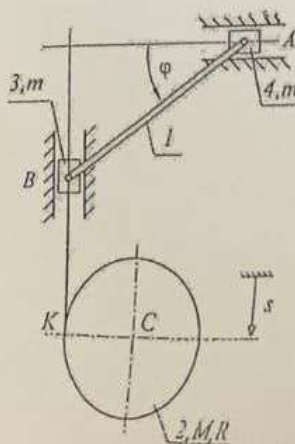
Slika uz zadatak 1.

2. Teret M , mase m i zanemarljivih dimenzija, okačen je o kraj opruge krutosti c i kreće se u otpornoj sredini u vertikalnoj ravni. Intenzitet sile otpora kretanju proporcionalan je prvom stepenu intenziteta brzine: $F_w = bv$, gde je b pozitivna realna konstanta. Odrediti konačnu jednačinu kretanja tereta $z(t)$, ako je u početnom trenutku teret bio pomeren iz položaja statičke ravnoteže vertikalno naniže za dužinu a i pušten da osciluje bez početne brzine. Dato je $m = 10 \text{ gr}$, $c = 10 \text{ gr/cm}$, $b = 1,6 \text{ gr} \cdot \text{s/cm}$, $a = 4 \text{ cm}$.



Slika uz zadatak 2.

3. Laki štap 1 dužine l zgloбно je vezan krajevima A i B za klizalice 3 i 4 jednakih masa m . Klizalica 3 kreće se po vertikalnoj vodici dok se klizalica 4 kreće po horizontalnoj vodici. Za klizalica 3 vezano je jednim krajem glatko, lako i nerastegljivo uže, koje je drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 2, mase M . Cilindar 2 kreće se tako da viseći deo užeta, koje se odmotava sa cilindra, stalno ostaje vertikalan. Primenom Lagranževih jednačina druge vrste napisati diferencijalne jednačine kretanja opisanog materijalnog sistema. Generalisane koordinate su: s i φ . Sva trenja zanemariti.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

oktober 2 23

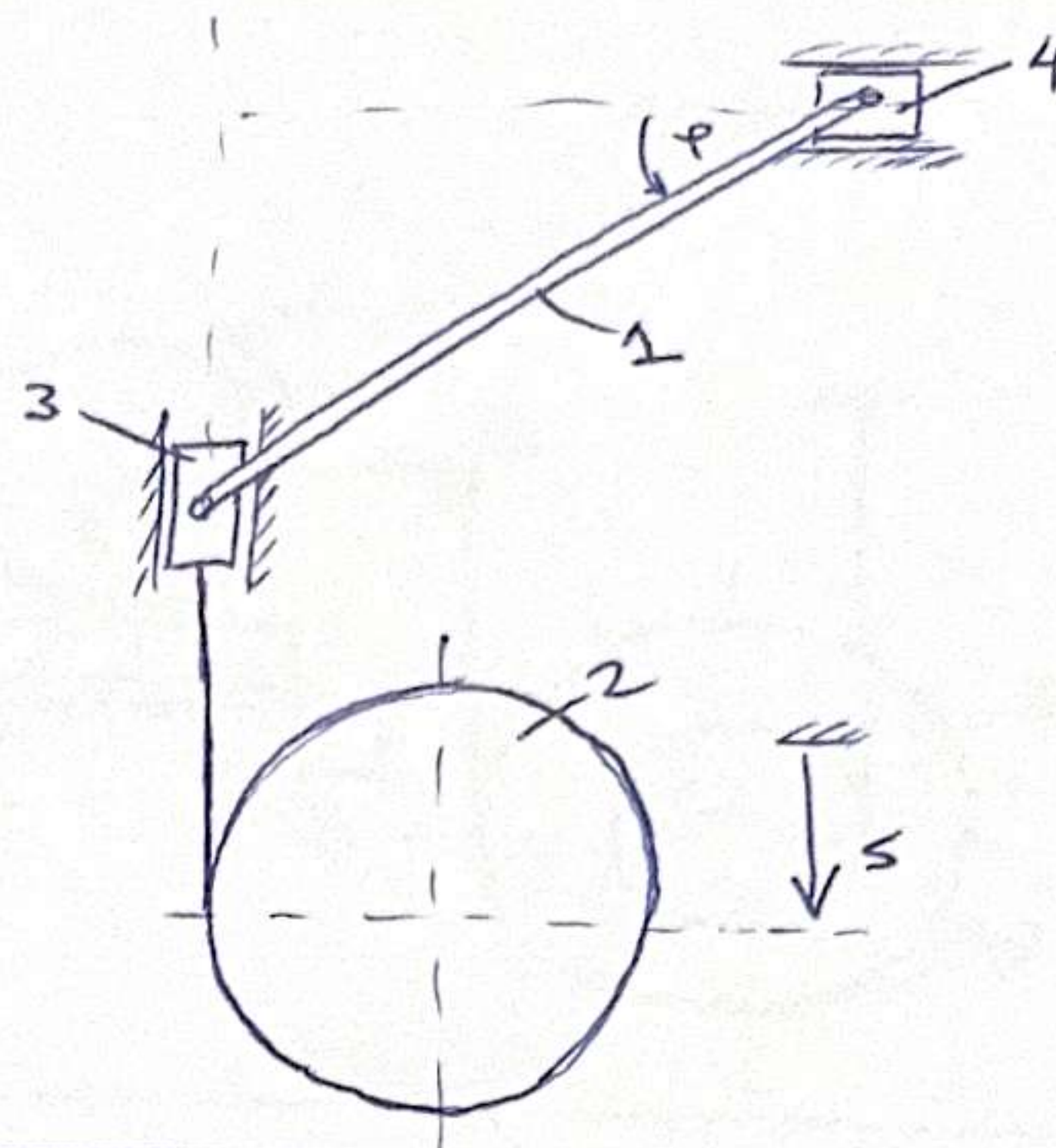
③ 1: $\phi, \dot{\phi}$

3: ω

4: ω

2: M (cilindar)

def. i-ne k- za s, φ



$$T = \left[\frac{1}{2} m (\dot{\phi} r \sin \phi)^2 + 0 \right]_4 + \left[\frac{1}{2} m (\dot{\phi} r \cos \phi)^2 + 0 \right]_3 + \left[\frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{\dot{s} - \dot{\phi} r \cos \phi}{R} \right)^2 \right]_2 =$$

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{s}^2 - 2 \dot{\phi} \dot{s} r \cos \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi) =$$

$$T = \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M \dot{\phi}^2 r^2 \cos^2 \phi + M \dot{s}^2 - M \dot{\phi} \dot{s} r \cos \phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = -M \dot{\phi} r^2 \dot{\phi} \cos \phi \sin \phi + M \dot{\phi} \dot{s} r \sin \phi, \quad \frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} + M \dot{\phi} r^2 \cos^2 \phi - M \dot{s} r \cos \phi$$

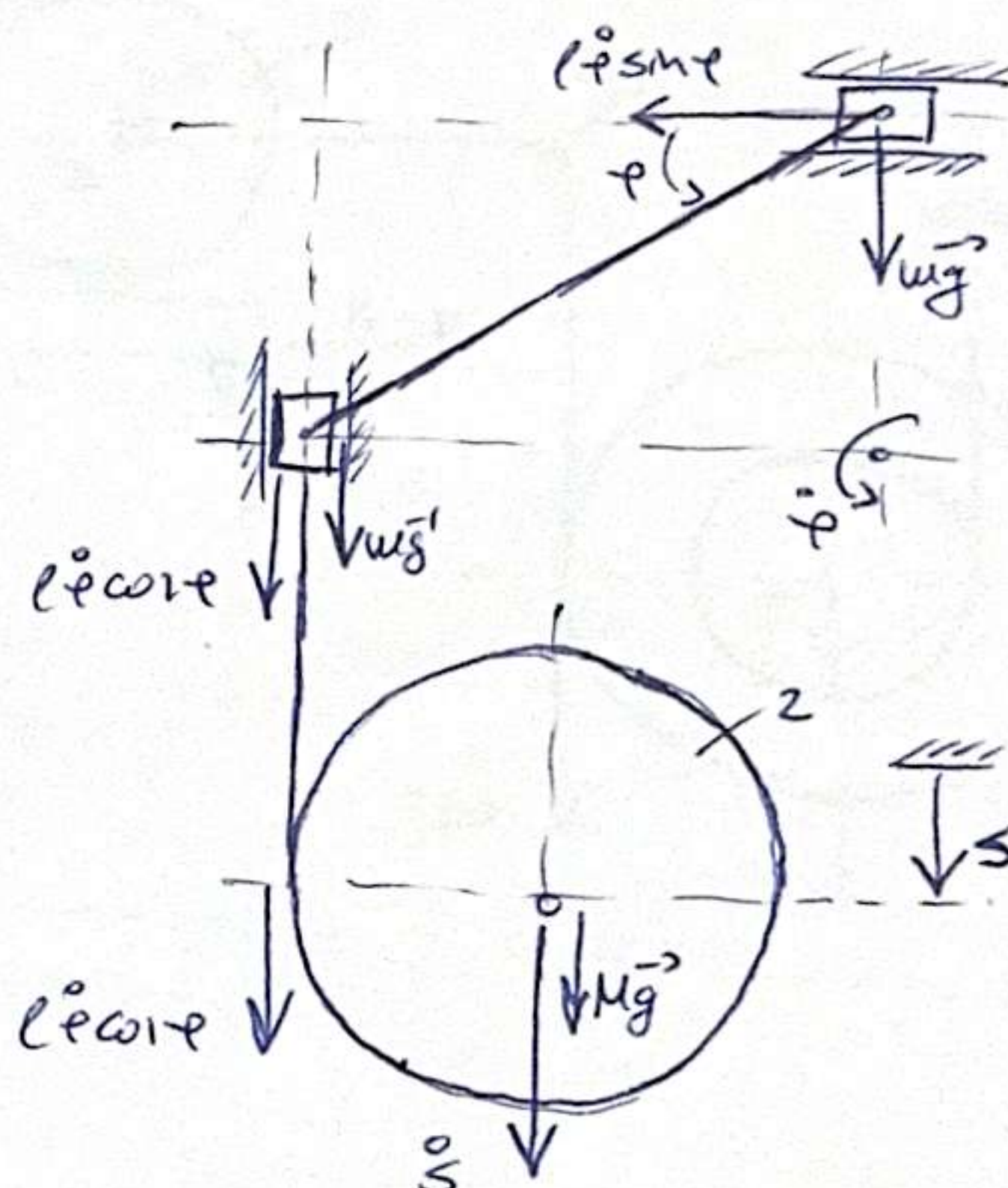
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = m r^2 \ddot{\phi} + M \dot{\phi} r^2 \cos^2 \phi - 2 M \dot{\phi} r^2 \cos \phi \sin \phi - M \dot{s} r \sin \phi + m r^2 \dot{\phi} \sin \phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 2 M \dot{s} - M \dot{\phi} r \cos \phi$$

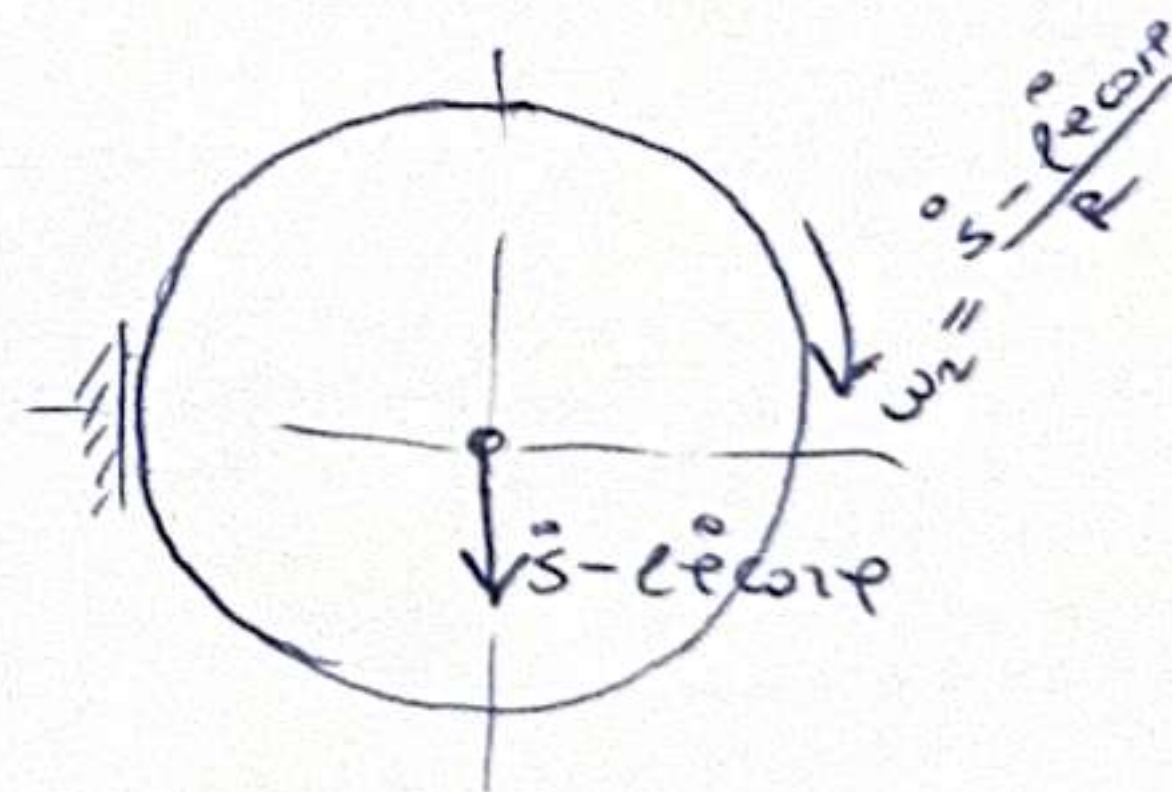
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = 2 M \ddot{s} - M \ddot{\phi} r \cos \phi + M \dot{\phi} r \sin \phi$$

$$\partial A = m g \cdot e \partial \varphi \cos \phi + M g \partial s$$

$$\begin{aligned} m r^2 \ddot{\phi} + M \dot{\phi} r^2 \cos^2 \phi - M \dot{\phi} r^2 \cos \phi \sin \phi - M \dot{s} r \sin \phi &= m g r \cos \phi \\ 2 M \ddot{s} - M \ddot{\phi} r \cos \phi + M \dot{\phi} r \sin \phi &= M g \end{aligned}$$



cilindar 2 - rečimo

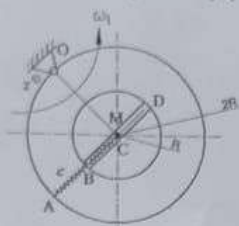


МЕХАНИКА 3

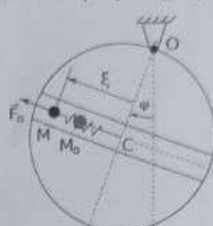
Јануарски испитни рок, 19. Јануар 2024. године.

Друга група

1. Тело које се састоји од два круто спојена коаксијална диска полупречника R и $2R$, укупне масе m и полупречника инерције $i_0 = 3R$ може да се обрће око вертикалне осе Ox управне на раван цртежа. По каналу BD креће се тачка M масе m , која је опрутом крутости c везана за тачку A плоче. У почетном тренутку, када се тачка M налазила у положају D систем је мировао. Одредити угаону брзину плоче ω_1 у тренутку t_1 када тачка M стигне у тачку C (положај приказан на слици 1). Везе наметнуте систему су наслане, а дужина ненапрегнуте опруте је R .

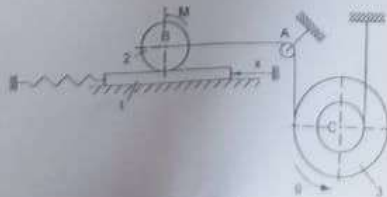


Слика 1



Слика 2

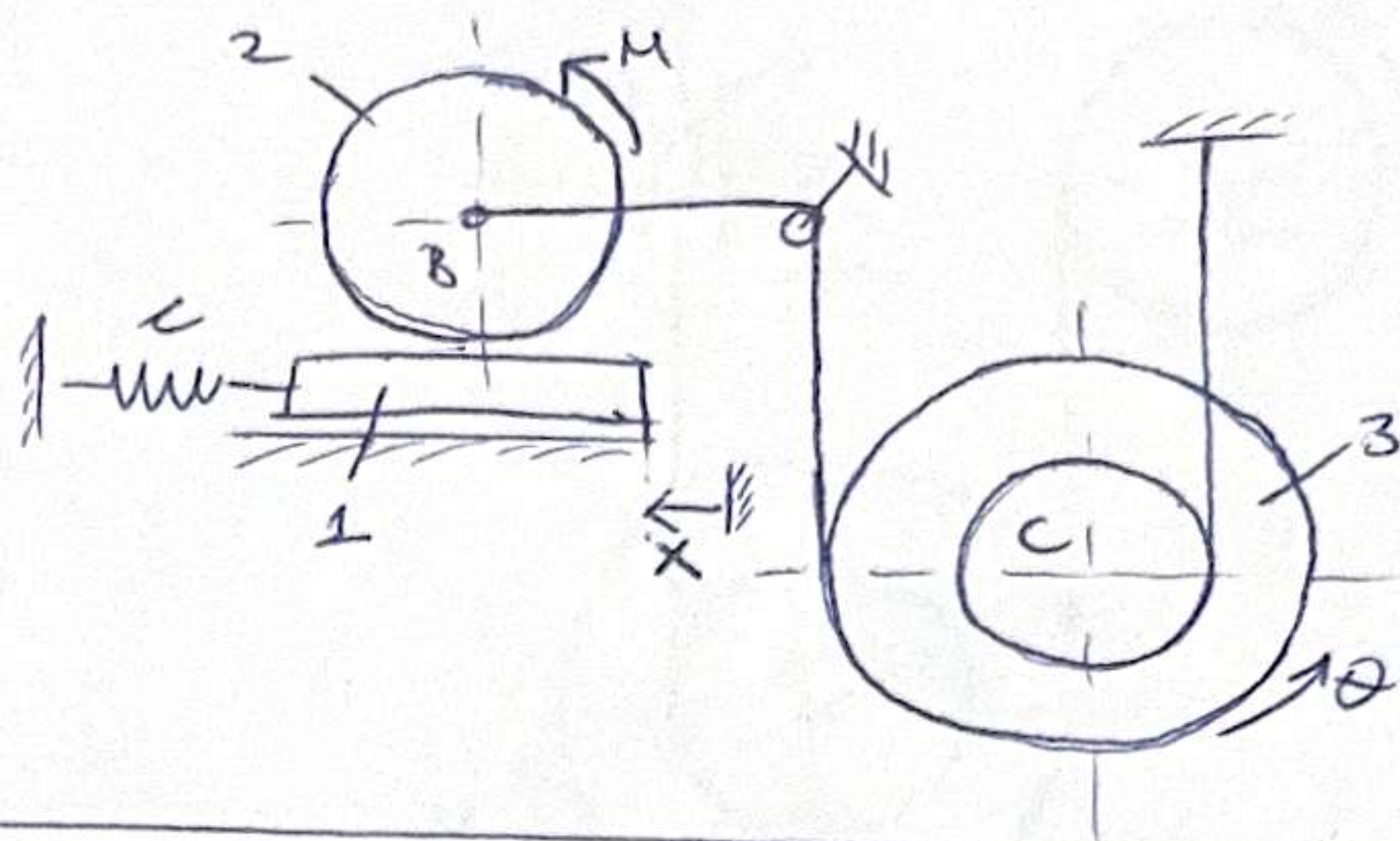
2. На слици 2 приказан је диск полупречника R који може да се обрће око вертикалне осе Ox , управне на раван цртежа, по закону $\varphi = \alpha t$, $\alpha = \text{const}$. Дуж централне осе диска је урезан жлеб по коме може да се креће тачка M масе m . Тачка M је везана опрутом крутости c , чији је други крај везан за центар диска C . На тачку M , такође, дејствује сила F_D , интензитета $F_D = \beta \sin(\Omega t + \gamma)$; (β, γ и Ω су константе), правца и смера приказаног на слици. У почетном тренутку тачка M је мировала на растојању $\overline{CM}_0 = l$, а опрута је била ненапрегнута. Одредити коначну јединичну релативну кретања материјалне тачке, као и укупну реакцију жлеба на тачку M у произвољном тренутку, ако је $\sqrt{(c - m\alpha^2)/m} = \Omega$.
3. Механички систем налази се у вертикалној равни и састоји се од платформе 1 масе $2m$, хомогеног диска 2 масе m и полупречника R , и коаксијалног цилиндра 3 масе m и полупречника R и $2R$. Полупречник инерције цилиндра за осу управну на раван цртежа, а која пролази кроз средиште маса C , износи $i_C = \sqrt{2}R$. Тачка C за све време кретања задржава вертикалан правец. Диск 2 може да се котрља без клизања по платформи 1, која може да клизи без трења по хоризонталној подлози. Платформа је везана опрутом крутости c , чији је други крај везан за непокретни зид. Систем је спојен неистегљивим ужадима занемарљиве масе као што је приказано на слици 3. Масу котура A занемарити. На диск 2 дејствује спрег сила момента интензитета M у назначеном смеру. За дате генералисане координате (θ, x) одредити диференцијалне једначине кретања материјалног система. Опрута је ненапрегнута у положају $x = 0$.



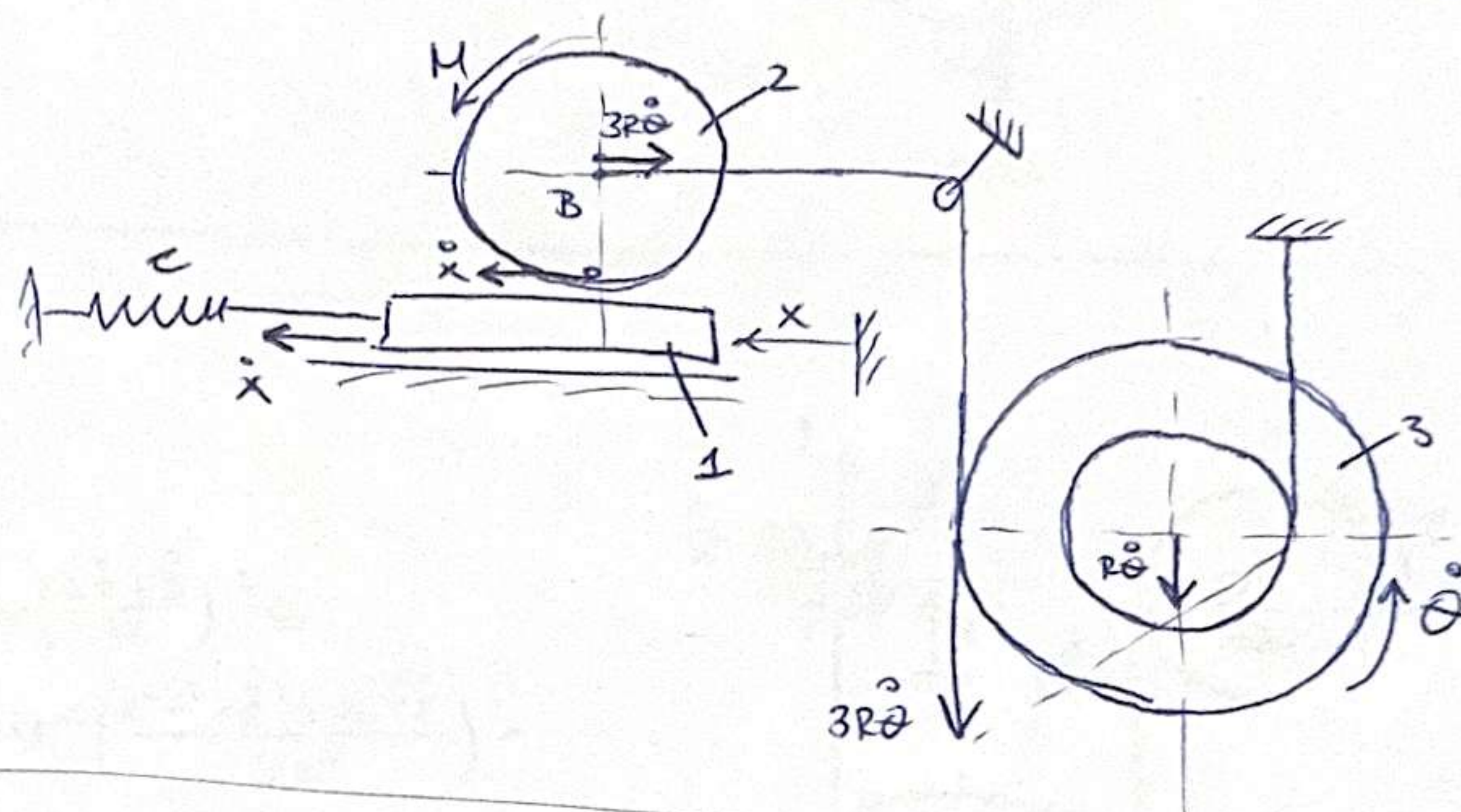
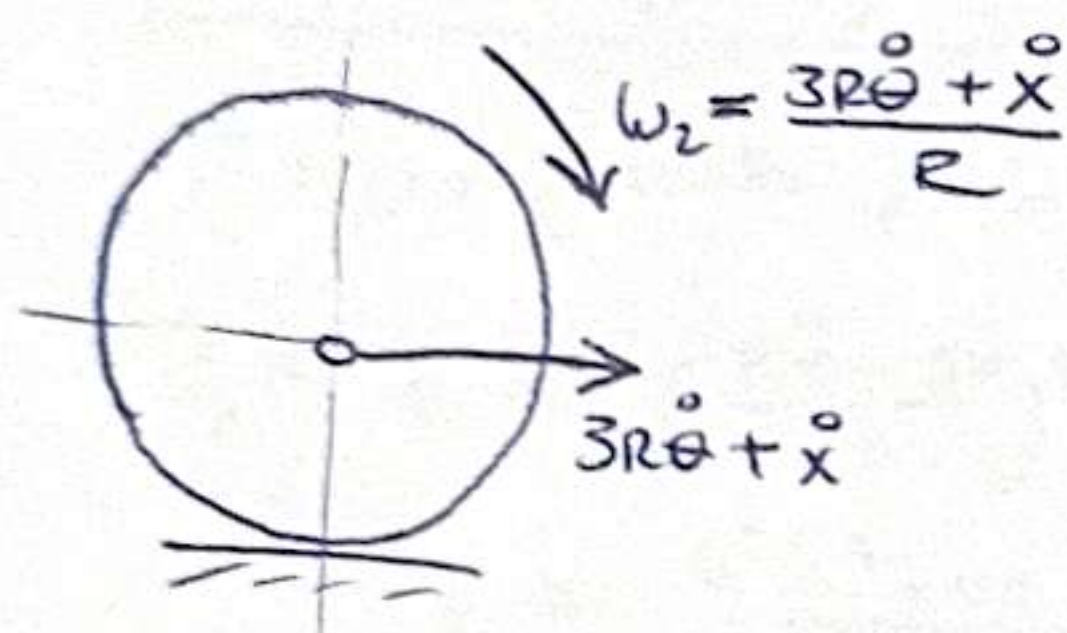
Слика 3

februar 24

- ③ 1: $2m$
 2: m, R (disk)
 3: $m, R, 2R, r_c = \sqrt{2}R$
 opruga: c , za $x=0$ ie neupregnutu
 Sprag M
 otk. i-ve za $\ddot{x}, \ddot{\theta}$?



disk 2 - relativno



$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} 2m \dot{x}^2 = m \dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m (3R\ddot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \left(\frac{3R\ddot{\theta} + \ddot{x}}{R} \right)^2 = \frac{9}{2} mR^2 \ddot{\theta}^2 + \frac{1}{4} mR^2 \left(\frac{9R^2 \ddot{\theta}^2 + 6R\ddot{\theta}\ddot{x} + \ddot{x}^2}{R^2} \right) =$$

$$= \frac{27}{4} mR^2 \ddot{\theta}^2 + \frac{1}{4} m \ddot{x}^2 + \frac{3}{2} mR\ddot{\theta}\ddot{x}$$

$$T_3 = \frac{1}{2} m (R\ddot{\theta})^2 + \frac{1}{2} m \cdot 2R^2 \cdot \ddot{\theta}^2 = \frac{3}{2} mR^2 \ddot{\theta}^2$$

$$T = \frac{5}{4} m \ddot{x}^2 + \frac{33}{4} mR^2 \ddot{\theta}^2 + \frac{3}{2} mR\ddot{\theta}\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2} m \dot{x} + \frac{3}{2} mR\ddot{\theta}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{5}{2} m \ddot{x} + \frac{3}{2} mR\ddot{\theta}$$

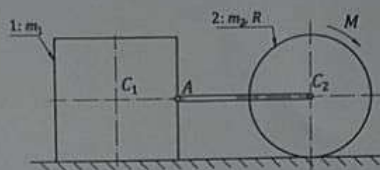
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{33}{2} mR^2 \ddot{\theta} + \frac{3}{2} mR\ddot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = \frac{33}{2} mR^2 \ddot{\theta} + \frac{3}{2} mR\ddot{x}$$

$$\partial A = -cx\partial x - M \left(\frac{3R\ddot{\theta} + \ddot{x}}{R} \right) + mgr\ddot{\theta}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{5}{2} m \ddot{x} + \frac{3}{2} mR\ddot{\theta} &= -cx - \frac{M}{R} \\ \frac{33}{2} mR^2 \ddot{\theta} + \frac{3}{2} mR\ddot{x} &= -3M + mgr \end{aligned}}$$

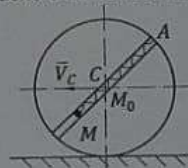
Mehanika 3
Februarski ispitni rok – grupa 2

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase m_1 i diska 2 mase $m_2 = 2m$ i poluprečnika R , na koji deluje spreg sila momenta $M = mgR$. Centar C_2 diska vezan je lakim štapom za tačku A prizme. Veze u tačkama A i C_2 su zglobne. Prizma može da klizi po horizontalnoj nepokretnoj podlozi sa koeficijentom trenja klizanja $\mu_1 = 1/4$. Ako je koeficijent trenja klizanja između diska i podloge $\mu_2 = 1/2$, odrediti najveću moguću vrednost mase m_1 prizme 1 pri kojoj neće doći do proklizavanja diska 2. Otpor trenja kotrljanja diska zanemariti.



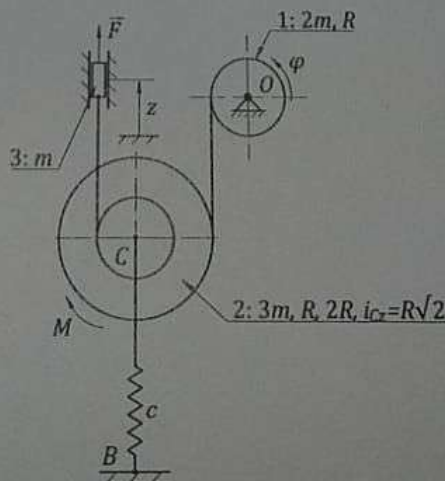
Slika uz zadatak 1.

2. Disk poluprečnika R , kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj podlozi tako da mu je brzina središta konstantnog intenziteta $V_C = R\omega$. Na disku je urezan žleb po kome se kreće tačka M , mase m . Tačka M je oprugom krutosti $c = 10m\omega^2$ vezana za kraj A žleba. U početnom trenutku žleb je bio horizontalan i tačka je relativno mirovala u centru diska pri čemu je opruga tada bila nenapregnuta. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tačke po žlebu u odnosu na početni položaj i reakciju veze između žleba i tačke u zavisnosti od vremena.



Slika uz zadatak 2.

3. Homogeni disk 1 mase $2m$ i poluprečnika R može da se obrće oko središnje horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O . Lako neistegljivo uže namotano je jednim krajem na disk 1, a drugim krajem na veći disk koaksijalnog kotura 2. Na manji disk koaksijalnog kotura namotano je drugo lako neistegljivo uže, koje je vezano za klizač 3 mase m , na koji deluje konstantna vertikalna sila $\vec{F}$, intenziteta $F = 6mg$. Koaksijalni kotur 2 ima masu $3m$, poluprečnike diskova R i $2R$ i poluprečnik inercije, u odnosu na horizontalnu osu Cz , $I_{Cz} = R\sqrt{2}$. Na kotur deluje spreg sila momenta M , a za njegov centar C vezana je vertikalna opruga krutosti $c = 27mg/R$. U početnom trenutku ($z(0) = 0, \varphi(0) = 0$), kada je sistem mirovao, opruga je bila nenapregnuta. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema po generalisanim koordinatama z i φ .



Slika uz zadatak 3.

februar 24

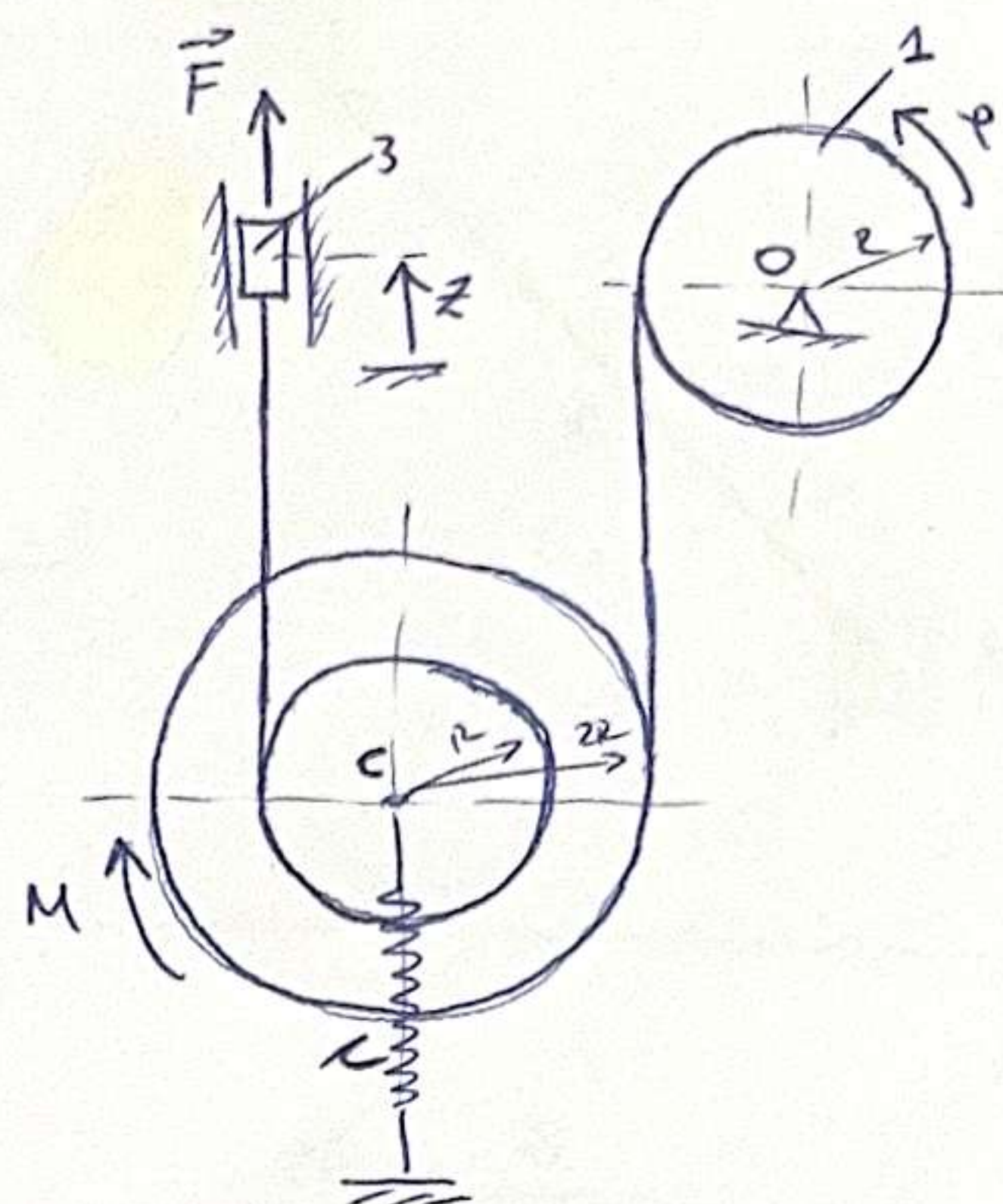
- ③ 1: $2m, R$ (disk)
 2: $3m, R, 2R, r_c = R\sqrt{2}$
 3: m

sila $F = 6mg$, spring M

opruga: $c = 27 \frac{mg}{R}$

to: $z_0 = 0, \varphi_0 = 0$
 sistem u mirovanju
 opruga neopregnuta

def. i-ve za z, φ ?



$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = 0 + \frac{1}{2} \frac{2mR^2}{2} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} 3m \left(\frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} 3mR^2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{R\dot{\varphi} + \dot{z}}{3R} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} 3m \frac{R^2\dot{\varphi}^2 + 4\dot{z}^2 - 4R\dot{\varphi}\dot{z}}{9} + 3mR^2 \left(\frac{R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{z}}{9R^2} \right) =$$

$$= mR^2\dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3} \right) + m\dot{z}^2 \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \right) + mR\dot{\varphi}\dot{z} \left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} 2m\dot{z}^2 = m\dot{z}^2$$

$$T = mR^2\dot{\varphi}^2 + 2m\dot{z}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = 4m\dot{z}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = 4m\ddot{z}$$

$$\partial A = -c\dot{z}\partial\dot{z} + F\partial z + M\partial\dot{z} - mg\partial z - 3mg\partial z_c$$

$$\dot{z} = \frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3} \rightarrow \dot{z} = \frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3} \rightarrow \dot{z} = \frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3} + \dot{z}$$

$$\partial A = -27 \frac{mg}{R} \left(\frac{R\dot{\varphi}}{3} - \frac{2\dot{z}}{3} \right) \left(\frac{R\dot{\varphi}}{3} - \frac{2\dot{z}}{3} \right) + 6mg\partial z + M \left(\frac{R\dot{\varphi}}{3R} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial \dot{z}} \right) -$$

$$- mg\partial z + 3mg \left(\frac{R\dot{\varphi}}{3} - \frac{2\dot{z}}{3} \right) =$$

$$\partial A = -27 \frac{mg}{R} \left(\frac{R^2\dot{\varphi}^2}{9} - \frac{2}{9} R\dot{\varphi}\dot{z} - \frac{2}{9} R\dot{z}\dot{\varphi} + \frac{4}{9} \dot{z}^2 \right) + 6mg\partial z +$$

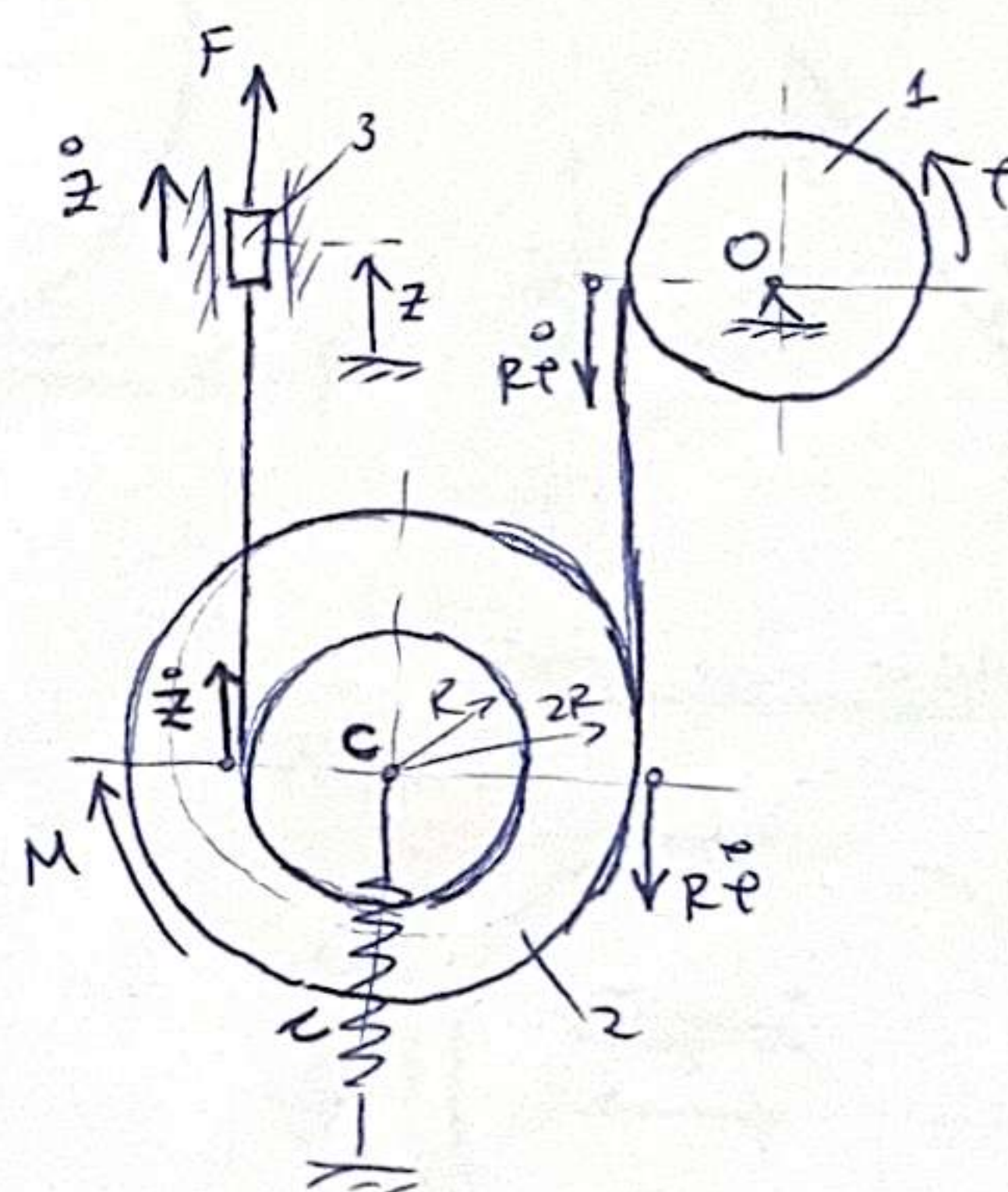
$$+ \frac{1}{3} M\partial\dot{\varphi} + \frac{1}{3} \frac{M}{R} \partial\dot{z} - mg\partial\dot{z} + mgR\partial\dot{\varphi} - 2mg\partial\dot{z} =$$

$$\partial A = -3mgR\dot{\varphi}^2 - 6mg\dot{\varphi}\dot{z} - 6mg\dot{z}\dot{\varphi} + 12 \frac{mg}{R} \dot{z}^2 + 3mg\partial\dot{z} +$$

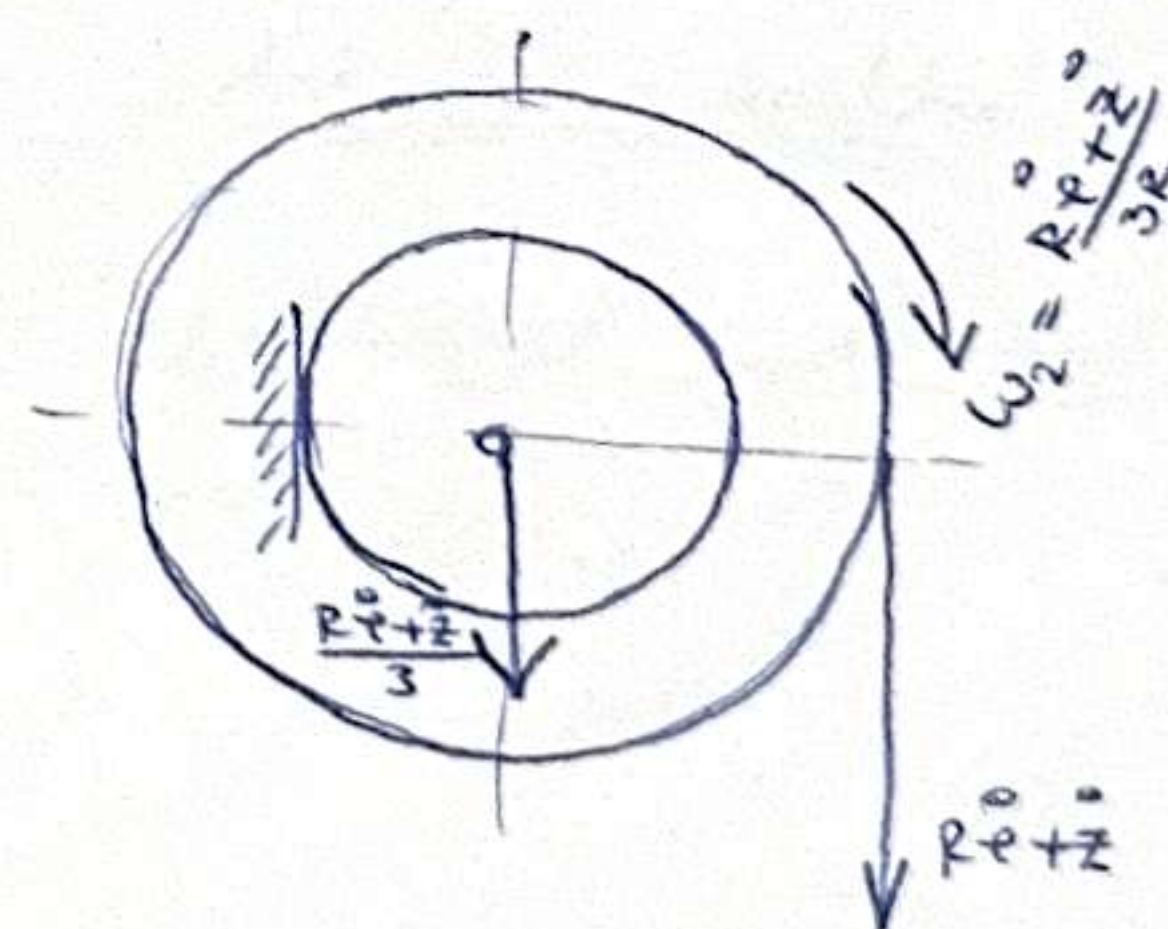
$$+ mgR\partial\dot{\varphi} + \frac{1}{3} M\partial\dot{\varphi} + \frac{1}{3} \frac{M}{R} \partial\dot{z}$$

$$2mR^2\ddot{\varphi} = -3mgR\dot{\varphi} - 6mg\dot{z} + mgR + \frac{1}{3}M$$

$$4m\ddot{z} = -6mg\dot{\varphi} + 12 \frac{mg}{R} \dot{z} + 3mg + \frac{1}{3} \frac{M}{R}$$



disk 2 - relativno



disk 2 - apsolutno

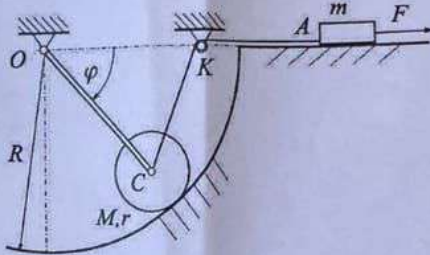
$$v_c = \frac{R\dot{\varphi} + \dot{z}}{3} - \dot{z} = \frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3}$$

МЕХАНИКА 3

Септембарски испитни рок, 25. август 2023. године

Прва група

1. Хомогени диск C , масе M и полупречника r котрља се без клизања по унутрашњости непокретне цилиндричне површи полупречника R . За центар диска C , зглобно је везан лаки штап OC , чији је други крај зглобно везан за непокретну тачку O . За диск је у тачки C везано и лако, глатко, неистегљиво уже које је пребачено преко лаког, непокретног котура K занемарљивих димензија. На другом крају ужета везан је клизач A , масе m , који може да се креће по хоризонталној глаткој равни. На клизач дејствује хоризонтална сила интензитета F смера приказаног на слици 1. Одредити интензитет силе F у функцији угла φ тако да се лаки штап OC обрће константном угаоном брзином Ω . Посматрани систем се налази у вертикалној равни. Тачке O , K и A припадају истој хоризонталној правој. Дато је: $OK = R - r$.



Слика 1.

2. Материјална тачка M , јединичне масе, креће се под дејством централне силе, чија се пројекција на радијалну осу поларног координатног система мења по закону:

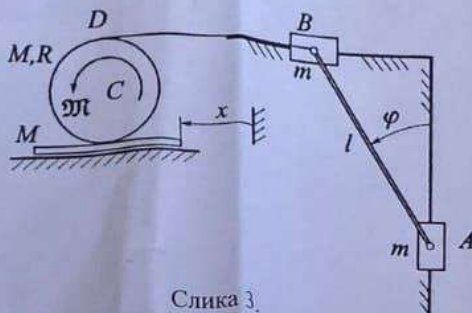
$$F_\rho = -\frac{\pi\varphi + 1}{\rho^2},$$

где је ρ растојање тачке од центра дејства силе, док је φ поларни угао. Почетни услови кретања тачке су:

$$t_0 = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \rho_0 = 1, \quad v_0 = \sqrt{2}, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4},$$

при чему је α_0 угао између вектора почетне брзине $\vec{v}_0$ материјалне тачке и почетног потега. Одредити линију путање тачке $\rho(\varphi)$ и интензитет брзине тачке у положају M_1 када је поларни угао $\varphi_1 = \pi$.

3. Лаки штап AB дужине l везан је зглобно својим крајевима за два клизача A и B једнаких маса m , који се крећу по глатким, међусобно управним вертикалним и хоризонталним вођицама, респективно, као што је приказано на слици 3. За клизач B везано је лако, глатко, неистегљиво уже које је другим крајем намотано на диск C масе M чији је полупречник R . Диск се котрља без клизања по плочи масе M , која се креће по глаткој хоризонталној подлози. На диск дејствује спрег момента $\mathcal{M}$ у смеру приказаном на слици. Написати диференцијалне једначине кретања посматраног материјалног система, уколико су дате генералисане координате x и φ . Посматрани систем налази се у вертикалној равни. Напомена: део ужета BD је хоризонталан.



Слика 3.

September 23

③ AD: ϕ, e

A: ω

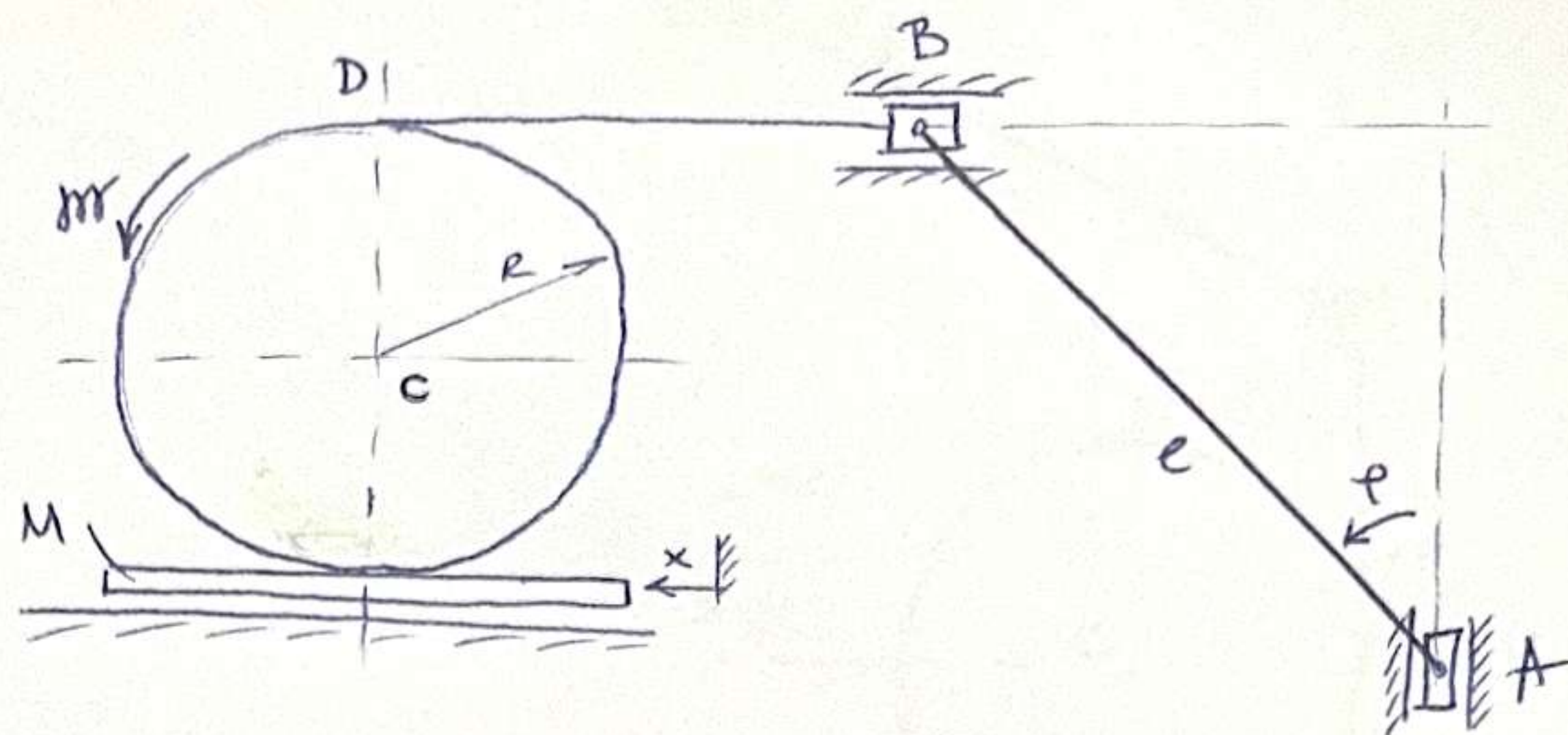
B: ω

C: M, R (disk)

placa: M

womenat θ

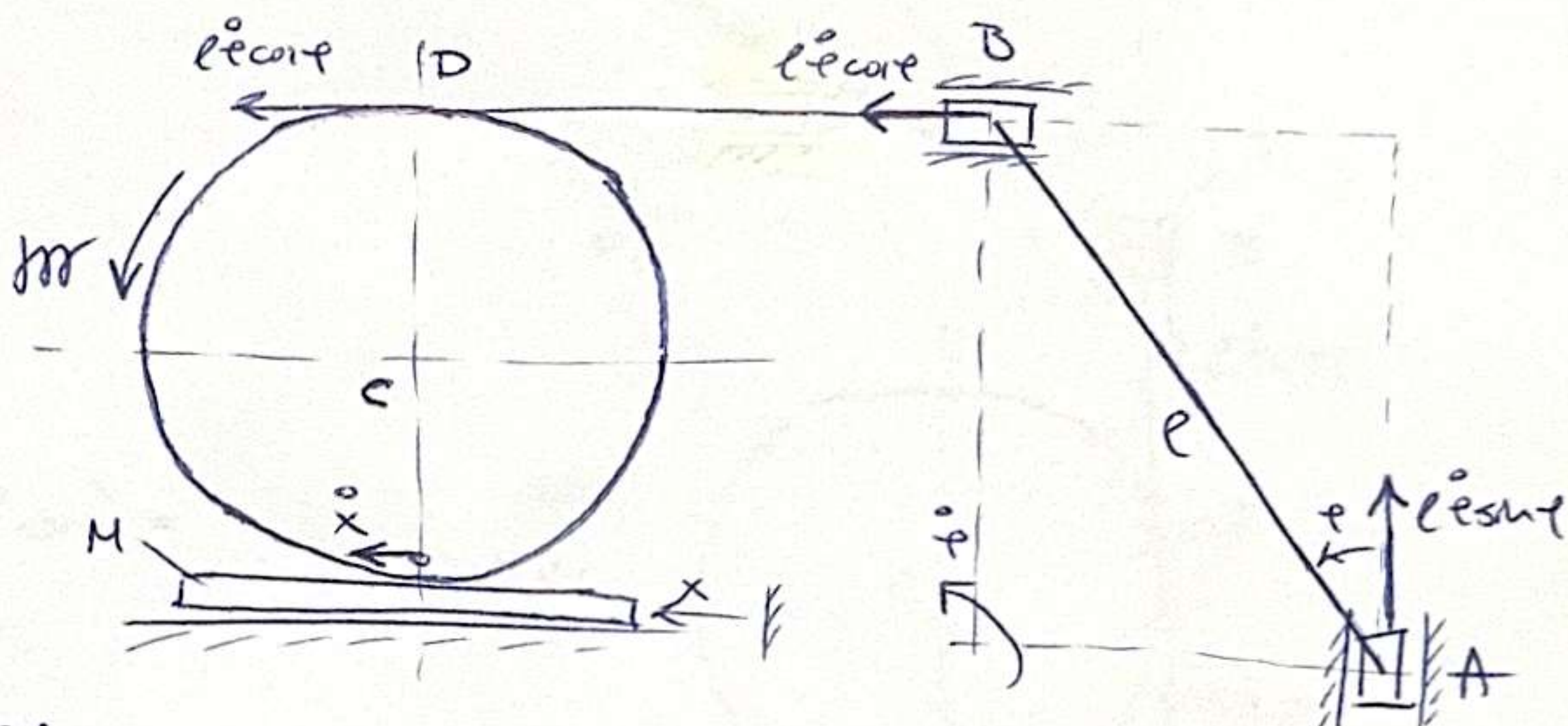
ds. i-ne ketya x, ϕ ?



$$T = T_p + T_c + T_A + T_B$$

$$T_p = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + 0$$

$$\begin{aligned} T_c &= \frac{1}{2} M \left(\frac{e \ddot{\phi} \cos \phi + \dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{M R^2}{2} \left(\frac{e \ddot{\phi} \cos \phi - \dot{x}}{2R} \right)^2 \\ &= \frac{1}{8} M (e^2 \ddot{\phi}^2 \cos^2 \phi + \dot{x}^2 + 2e \ddot{\phi} \dot{x} \cos \phi) + \\ &\quad + \frac{1}{16} M (e^2 \ddot{\phi}^2 \cos^2 \phi + \dot{x}^2 - 2e \ddot{\phi} \dot{x} \cos \phi) = \\ &= \frac{3}{16} M e^2 \ddot{\phi}^2 \cos^2 \phi + \frac{3}{16} M \dot{x}^2 + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \dot{x} \cos \phi \end{aligned}$$



$$T_A = \frac{1}{2} m (e \dot{\phi} \sin \phi)^2 + 0 = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi$$

$$T_B = \frac{1}{2} m (e \dot{\phi} \cos \phi)^2 + 0 = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi$$

$$T = \frac{11}{16} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m e^2 \dot{\phi}^2 + \frac{3}{16} M e^2 \ddot{\phi}^2 \cos^2 \phi + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \dot{x} \cos \phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \phi} = -\frac{3}{8} M e^2 \ddot{\phi} \cos \phi \sin \phi - \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \dot{x} \sin \phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{11}{8} M \dot{x} + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \cos \phi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m e^2 \dot{\phi} + \frac{3}{8} M e^2 \ddot{\phi} \cos^2 \phi + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \dot{x} \cos \phi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{11}{8} M \ddot{x} + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \cos \phi - \frac{1}{8} M e \ddot{\phi}^2 \sin \phi$$

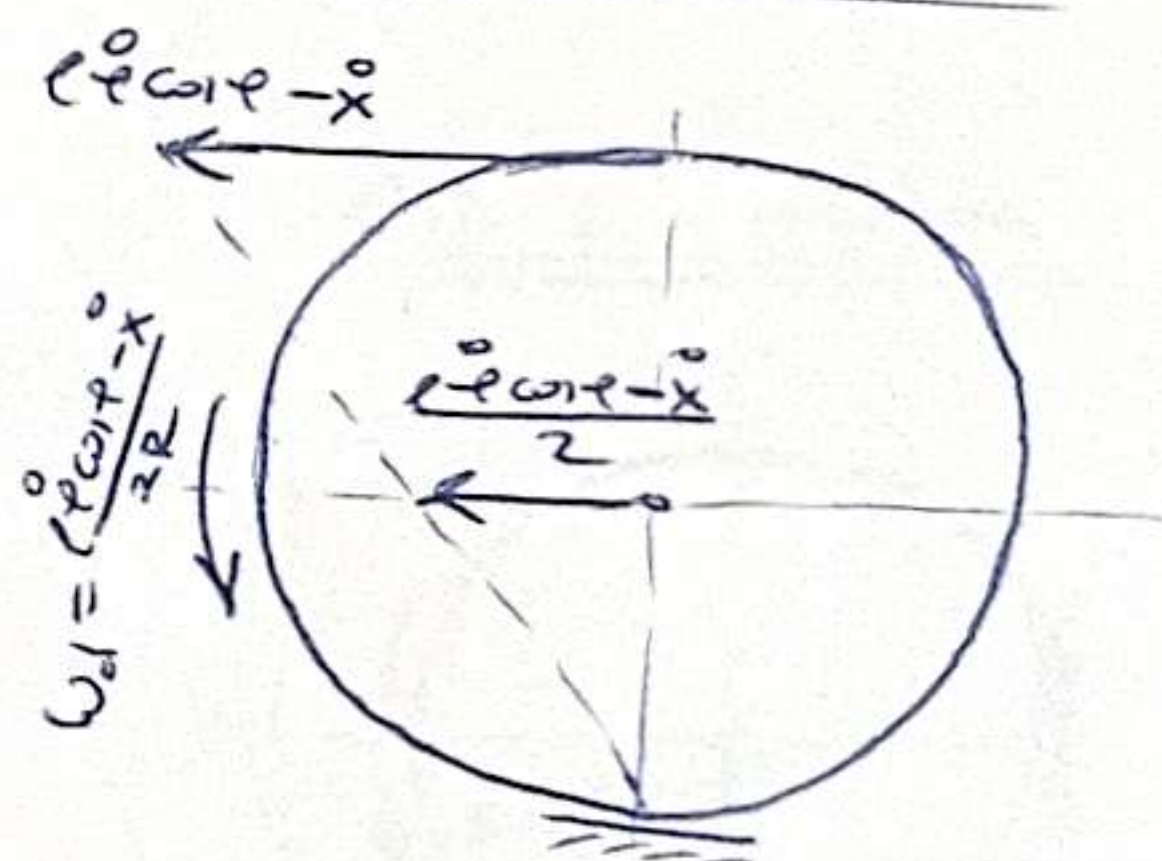
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = m e^2 \ddot{\phi} + \frac{3}{8} M e^2 \ddot{\phi} \cos^2 \phi - \frac{3}{4} M e^2 \ddot{\phi} \cos \phi \sin \phi + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \dot{x} \cos \phi - \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \dot{x} \sin \phi$$

$$\partial A = \theta \partial \theta - m g \partial \theta = \theta \cdot \frac{e \partial \phi \cos \phi - \partial x}{2R} - m g \partial \phi \sin \phi$$

$$\frac{11}{8} M \ddot{x} + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \cos \phi - \frac{1}{8} M e \ddot{\phi}^2 \sin \phi = -\frac{1}{2} \frac{m g}{R}$$

$$m e^2 \ddot{\phi} + \frac{3}{8} M e^2 \ddot{\phi} \cos^2 \phi - \frac{3}{8} M e^2 \ddot{\phi} \cos \phi \sin \phi + \frac{1}{8} M e \ddot{\phi} \dot{x} \cos \phi = \frac{1}{2} \frac{m g \cos \phi}{2R} - m g \sin \phi$$

disk C - relative



disk C - absolute

$$v_c = \frac{e \dot{\phi} \cos \phi - \dot{x}}{2} + \dot{x} = \frac{e \dot{\phi} \cos \phi + \dot{x}}{2}$$

Mehanika 3

Izolski ispitni rok, II grupa

June 30, 2023

1. Teret 1, mase m vezan je lakim glatkim i nerastegljivim užetom koje je prebačeno preko lakog kotura 2 i drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 3 mase $2m$. Cilindar se kotrlja po nepokretnoj strmoj ravni nagiba α . Odrediti maksimalni ugao α pri kome je moguće kotrljanje cilindra bez klizanja, ako je koeficijent trenja klizanja između cilindra i strme ravni $\mu = 0.1$. Otpor kotrljanja zanemariti. Takođe zanemariti trenje u osovini kotura 2. Deo užeta između cilindra 3 i debla 2 paralelan je strmoj ravni.

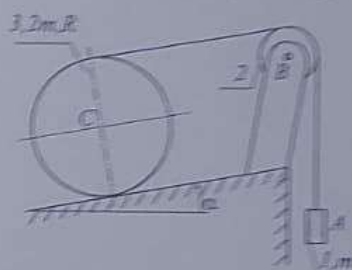


Figure 1: Slika uz zadatak 1

2. Kuglica M , mase m , zanemarljivih dimenzija može da se kreće unutar glatke cevi OK koja se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose O_1O_2 (dimenzije na slici). U početnom trenutku kuglica se nalazila u položaju O u stanju relativnog mirovanja. Odrediti intenzitet vertikalne komponente apsolutne brzine materijalne tačke u položaju K . Dato je:

$$\alpha = 30^\circ \quad \text{ i } \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R \tan \alpha}}$$

3. Laki štap 1 dužine l zglobno je vezan krajevima A i B za klizac 3 i 4 jednakih masa m . Klizac 3 kreće se po vertikalnoj vodjici, dok se klizac 4 kreće po horizontalnoj vodjici. Za klizac 3 vezano je jednim krajem glatko, lako i nerastegljivo uže, koje je drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 2, mase M . Cilindar 2 kreće se tako da viseći deo užeta, koje se odmotava sa cilindra, stalno ostaje vertikalan. Primenom Lagranđevih jednačina druge vrste napisati diferencijalne jednačine kretanja opisnog materijalnog sistema. Generalisane koordinate su: s i φ . Sva trenja zanemariti.

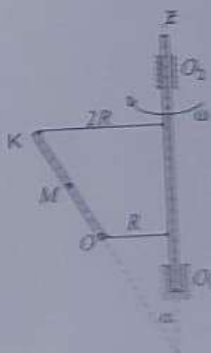


Figure 2: Slika uz zadatak 2

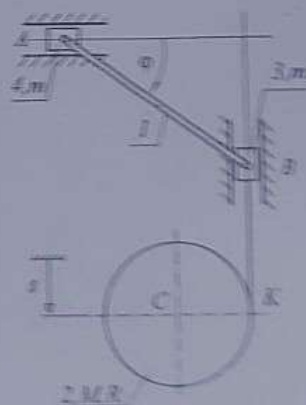


Figure 3: Slika uz zadatak 3

Iz Kabineta za Mehaniku

Jul 23

③ 1: ϕ, e

3: ω

4: ω

2: M (cilindar)

def. i-ne su s i φ ?

$$T = T_A + T_B + T_C$$

$$T_A = \frac{1}{2} \omega (\dot{e} \dot{\varphi} \sin \varphi)^2 = \frac{1}{2} \omega \dot{e}^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi$$

$$T_B = \frac{1}{2} \omega (\dot{e} \dot{\varphi} \omega \varphi)^2 = \frac{1}{2} \omega \dot{e}^2 \dot{\varphi}^2 \omega^2 \varphi$$

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{\dot{s} - \dot{e} \dot{\varphi} \omega \varphi}{R} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{s}^2 + \dot{e}^2 \dot{\varphi}^2 \omega^2 \varphi - 2 \dot{e} \dot{\varphi} \dot{s} \omega \varphi) = \\ &= M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M \dot{e}^2 \dot{\varphi}^2 \omega^2 \varphi - M \dot{e} \dot{\varphi} \dot{s} \omega \varphi \end{aligned}$$

$$T = \frac{1}{2} \omega \dot{e}^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M \dot{e}^2 \dot{\varphi}^2 \omega^2 \varphi + M \dot{s}^2 - M \dot{e} \dot{\varphi} \dot{s} \omega \varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -M \dot{e}^2 \dot{\varphi}^2 \omega \varphi \sin \varphi + M \dot{e} \dot{\varphi} \dot{s} \sin \varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 2M \dot{s} - M \dot{e} \dot{\varphi} \omega \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = 2M \ddot{s} - M \ddot{e} \dot{\varphi} \omega \varphi + M \dot{e} \ddot{\varphi} \sin \varphi$$

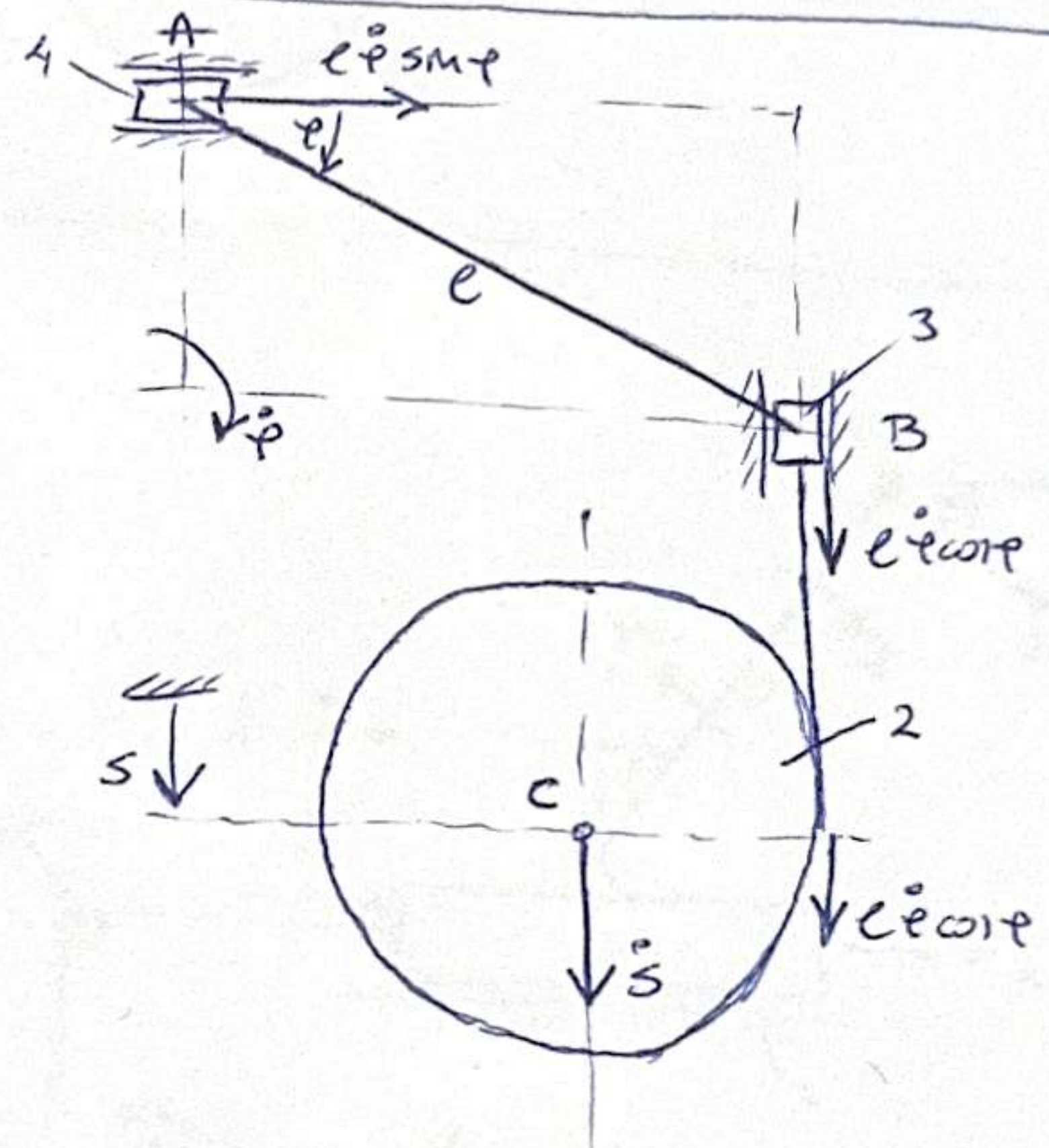
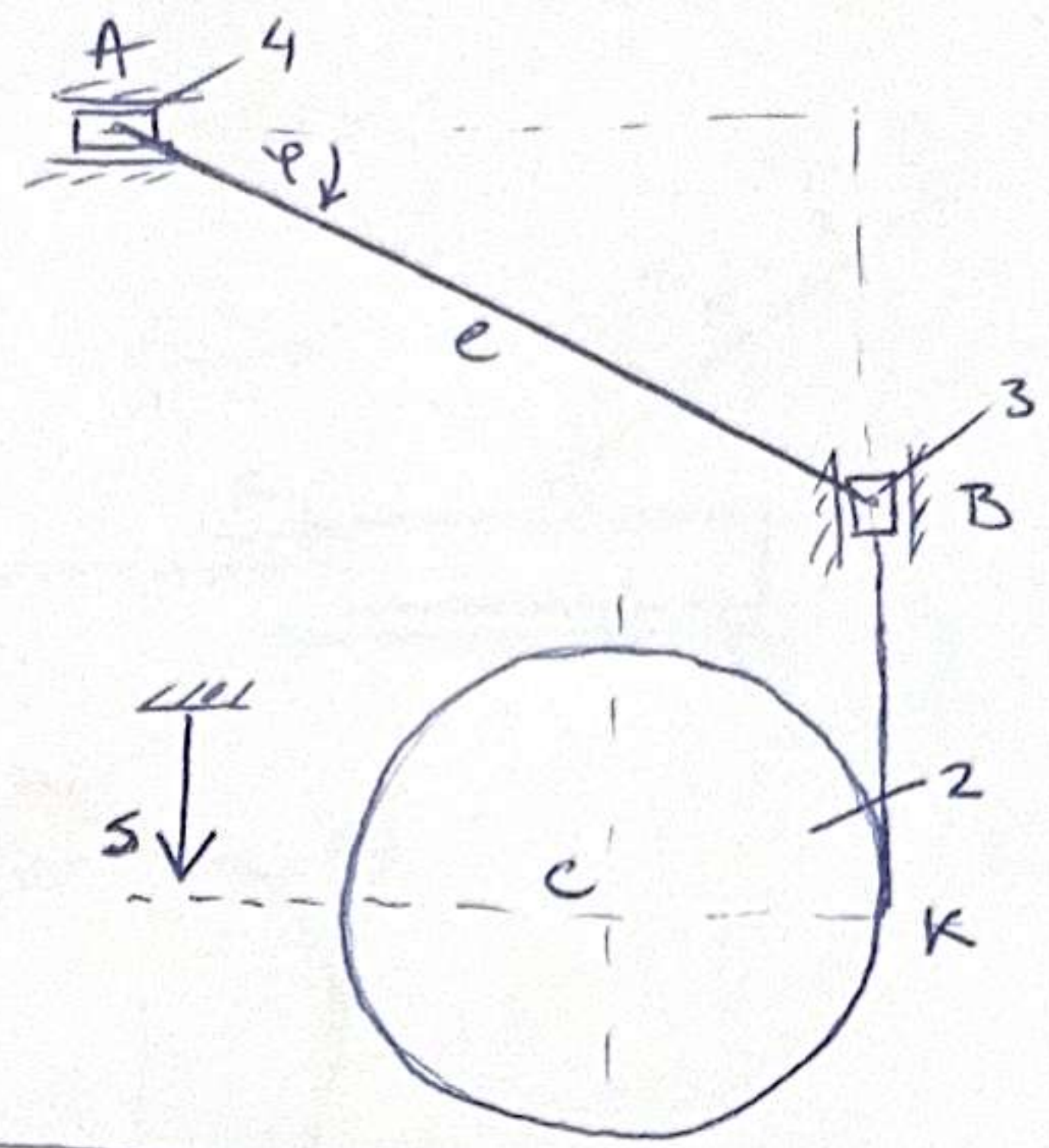
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \omega \dot{e}^2 \dot{\varphi} + M \dot{e}^2 \dot{\varphi} \omega^2 \varphi - M \dot{e} \dot{s} \omega \varphi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \omega \dot{e}^2 \ddot{\varphi} + M \dot{e}^2 \ddot{\varphi} \omega^2 \varphi - 2M \dot{e} \dot{\varphi}^2 \omega \varphi \sin \varphi - M \dot{e} \ddot{s} \omega \varphi + M \dot{e} \dot{s} \omega \cos \varphi$$

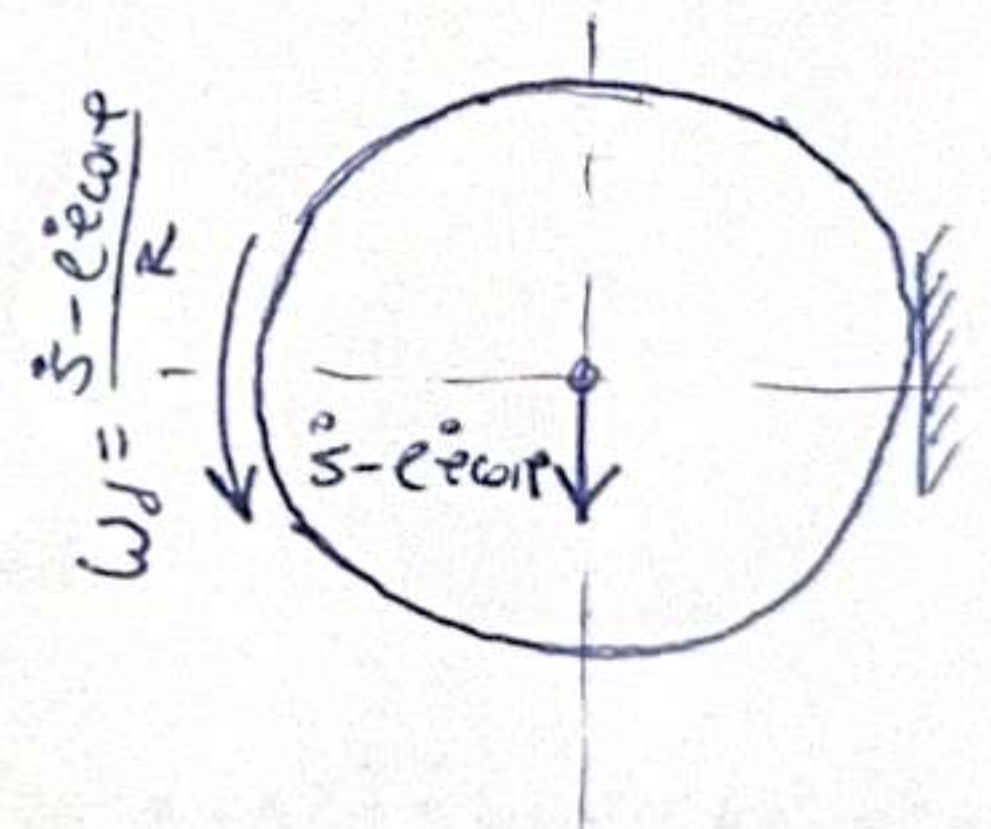
$$\partial A = \omega g e \partial \varphi \omega \varphi + M g \partial s$$

$$2M \ddot{s} - M \ddot{e} \dot{\varphi} \omega \varphi + M \dot{e} \ddot{\varphi} \sin \varphi = M g$$

$$\omega \dot{e}^2 \ddot{\varphi} + M \dot{e}^2 \ddot{\varphi} \omega^2 \varphi - 2M \dot{e} \dot{\varphi}^2 \omega \varphi \sin \varphi - M \dot{e} \ddot{s} \omega \varphi = \omega g e \omega \varphi$$



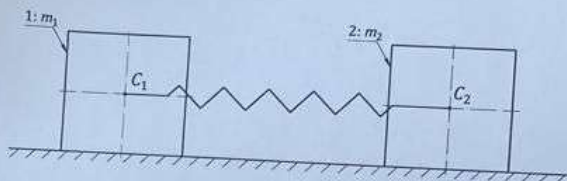
disk 2 - relatiwno



Mehanika 3

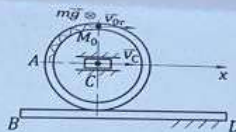
Junski ispitni rok 2023. – grupa 1

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase $m_1 = 4m$ i prizme 2 mase $m_2 = 2m$, čija su težišta spojena oprugom krutosti $c_1 = 8c$. Prizme mogu da klize bez trenja po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Odrediti pomeranje prizme 1 do trenutka kada se prizma 2 pomerila za dužinu $k/2$ udesno, ako je u početnom trenutku sistem mirovao a opruga bila sabijena za $\Delta l_0 = -k$ u odnosu na nenapregnutu dužinu. Odrediti i brzinu prizme 1 u istom trenutku.



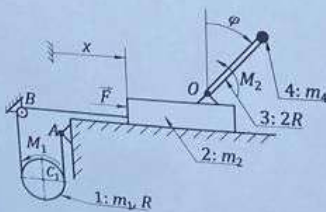
Slika uz zadatak 1.

2. Disk poluprečnika R leži u horizontalnoj ravni i svojim središtem je zglobovno vezan za klizač C , koji se kreće brzinom V_C konstantnog intenziteta u pravcu ose x . Disk se za sve vreme kretanja kotrlja bez klizanja po nepokretnom štapu BD koji je paralelan sa osom x (slika 2, pogled odozgo). U disk je urezan tanak žleb u koji je stavljena kuglica M zanemarljivih dimenzija i mase m , koja je oprugom krutosti $c = mg/R$ vezana za tačku A cevi. Vektor sile težine kuglice označen je na slici 2. Ako je u početnom trenutku opruga bila nenapregnuta a kuglici u položaju M_0 saopštena relativna brzina intenziteta $v_{r0} = \sqrt{gR}$, smeru kao na slici, odrediti položaj kuglice na relativnoj putanji u kom ona prvi put menja smer relativnog kretanja.



Slika uz zadatak 2.

3. Platforma 2 mase $m_2 = m$ može da klizi po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za platformu je u tački O zglobovno vezan laki štap 3 dužine $2R$, na čijem kraju se nalazi teg 4 mase $m_4 = m/2$ i zanemarljivih dimenzija. Za platformu je jednim krajem vezano lako neistegljivo uže koje je prebačeno preko lakog kotura u tački B i preko tankog cilindra 1 mase $m_1 = m$ i poluprečnika R , dok je drugim krajem zakačeno za nepokretni oslonac u tački A . Između cilindra 1 i užeta nema proklizavanja. Ako na cilindar 1 deluje spreg sila intenziteta $M_1 = 2mgR$, smeru kao na slici, na laki štap spreg sila intenziteta $M_2 = mgR$, smeru kao na slici, a na platformu horizontalna sila intenziteta $F = mg$, smeru kao na slici, napisati Lagranževe diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na zadate generalisane koordinate x i φ .

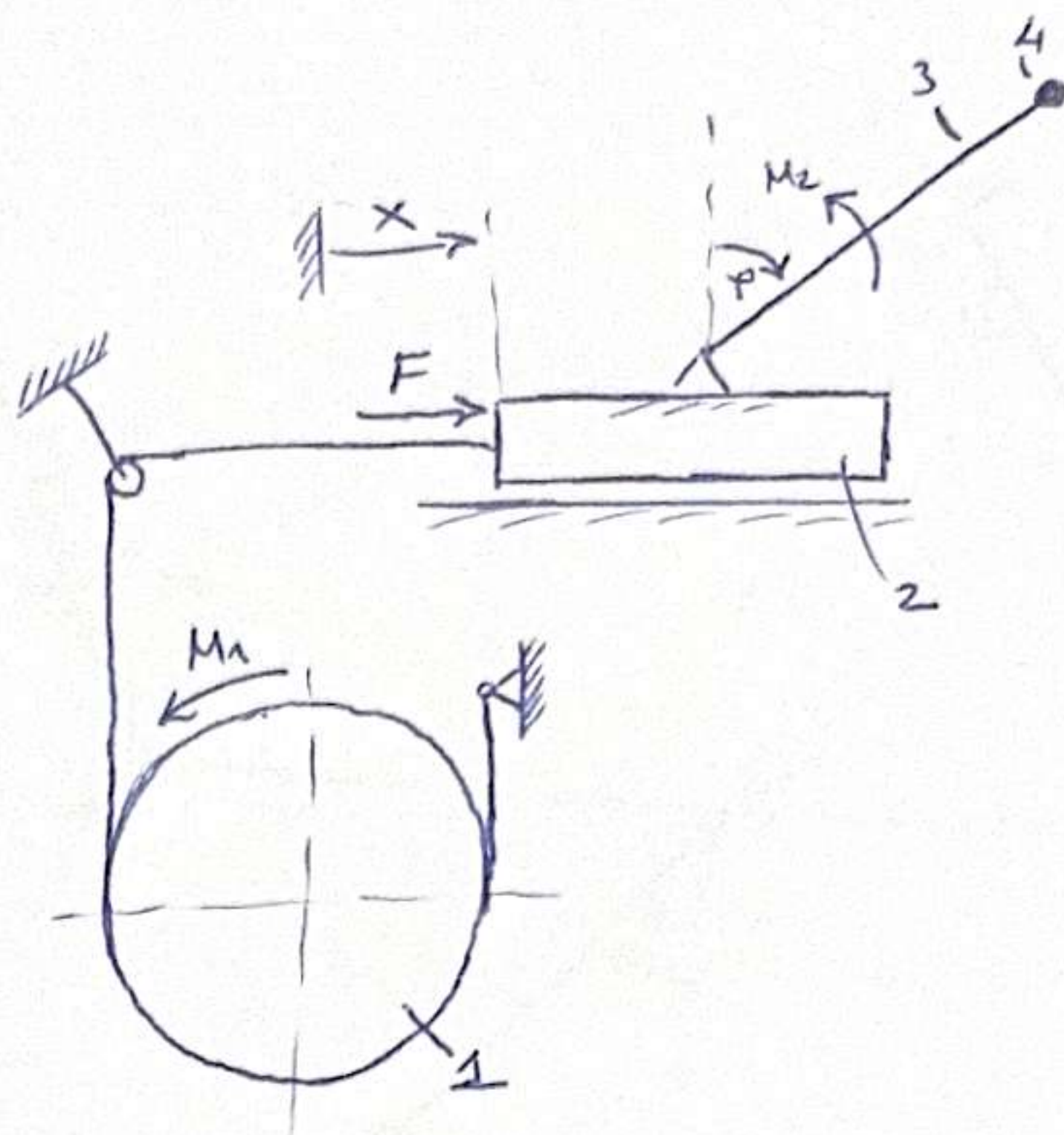


Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

jun 23

- ③ 2: $m_2 = m$
 3: $\emptyset, 2R$
 4: $m_4 = \frac{1}{2}m$
 1: $m_1 = m, R$ (cilindar)
 spring $M_1 = 2mgR$
 spring $M_2 = mgR$
 sila $F = mg$
 d.f. i-ne za x, φ ?



$$T = T_1 + T_2 + T_4$$

$$T_1 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 = \frac{1}{8}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}m\dot{x}^2 = \frac{1}{4}m\dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 0$$

$$T_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + 4R^2\dot{\varphi}^2 + 4R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi) = \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi + mR\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$T = m\dot{x}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + mR\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + mR\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -mR\dot{x}\sin\varphi, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2\dot{\varphi} + mR\dot{x}\cos\varphi$$

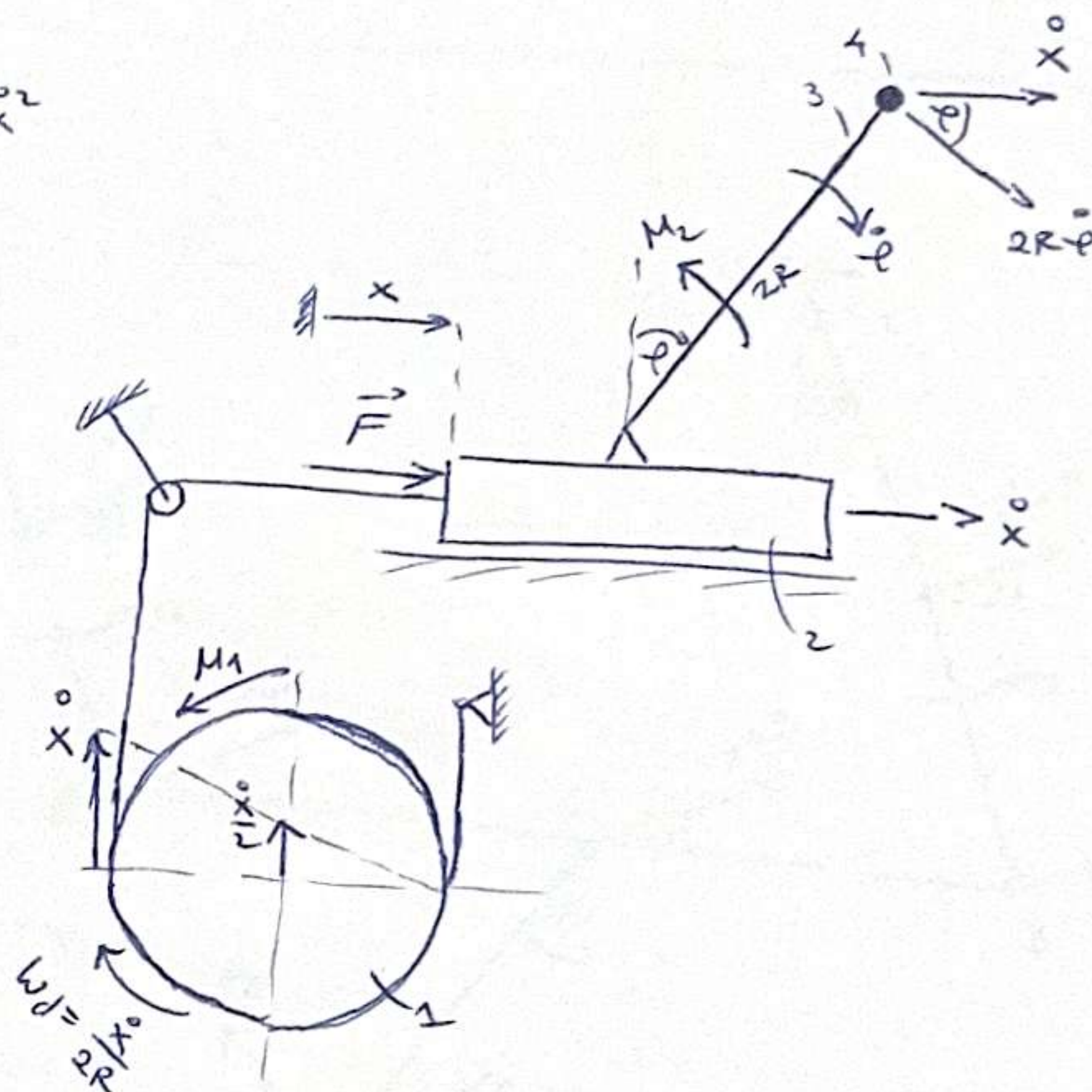
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x} + mR\ddot{\varphi}\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2mR^2\ddot{\varphi} + mR\ddot{x}\cos\varphi - mR\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\partial A = -M_1\frac{\partial x}{\partial R} - M_2\partial\varphi + F\partial x - mg\frac{\partial x}{\partial 2} - \frac{1}{2}mg(-2R\partial\varphi\sin\varphi) =$$

$$\partial A = -\frac{1}{2}\frac{M_1}{R}\partial x - M_2\partial\varphi + F\partial x - \frac{1}{2}mg\partial x + mgR\sin\varphi\partial\varphi$$

$$\begin{aligned} 2m\ddot{x} + mR\ddot{\varphi}\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi &= -\frac{1}{2}\frac{M_1}{R} + F - \frac{1}{2}mg \\ 2mR^2\ddot{\varphi} + mR\ddot{x}\cos\varphi &= -M_2 + mgR\sin\varphi \end{aligned}$$



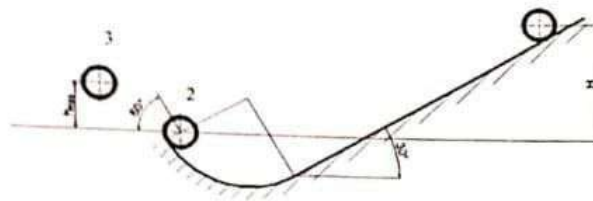
$$\dot{x}_4 = \dot{x} + 2R\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\dot{y}_4 = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi$$

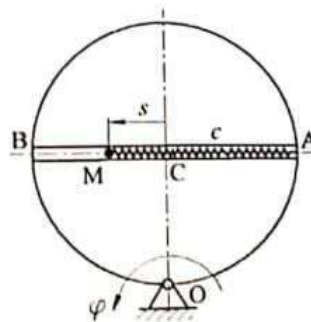
$$v_4^2 = \dot{x}^2 + 4R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 4R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + 4R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$$

Mehanika 3, jul 2021.

1. Koaksijalni disk mase m , spoljašnjeg poluprečnika R i poluprečnika inercije za svoju glavnu centralnu osu inercije $I = 2R^2$ započinje kretanje iz položaja "1" prikazanog na slici iz stanja mirovanja. Prsten se kotrlja bez klizanja po neposkretnoj podlozi. U položaju "2" prsten napušta podlogu kao na slici. Odrediti maksimalnu visinu (položaj "3") koju će dostići centar mase prstena nakon napuštanja veze. $H = 5R$.

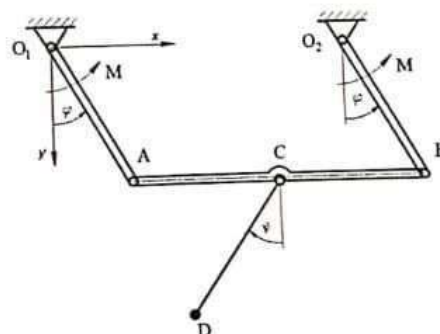


2. Sistem prikazan na slici čine: disk poluprečnika R koji može da se okreće u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose Oz po poznatom zakonu $\varphi = 2t$ i materijalna tačka M koja se kreće unutar glatkog kanala AB . Tačka M , mase m je vezana oprugom krutosti $c = 8m$ za tačku A diska. Dužina nenapregnute opruge jednaka je poluprečniku diska. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tačke M ($s(t) = ?$) ako je u početnom trenutku opruga bila nenapregnuta, a tačka M imala relativnu brzinu $\dot{s}_0 = 1$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.



CS CamScanner

3. Sistem prikazan na slici sastoji se od štapova O_1A , O_2B , AB , CD i materijalne tačke D i može da se kreće u vertikalnoj ravni. Veze u tačkama O_1 , O_2 , A , B i C su zglobne. Poznate su dužine štapova $O_1A = O_2B = CD = l$, i $AB = 2l$ i $AC = CB$. Štap O_1A je mase $3m$, O_2B je mase $3m$, AB je mase $2m$ i tačka D je mase $2m$. Masu štapa CD možemo zanemariti. Na štapove O_1A i O_2B dejstvuju spregovi sila momenata M kao na slici. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema s obzirom na generalisane koordinate φ i ψ .



jul 21

③ $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = \overline{CD} = e$

$\overline{AB} = 2e$

$\overline{AC} = \overline{CB}$

$Q_1A: 3m, e$

$Q_2B: 3m, e$

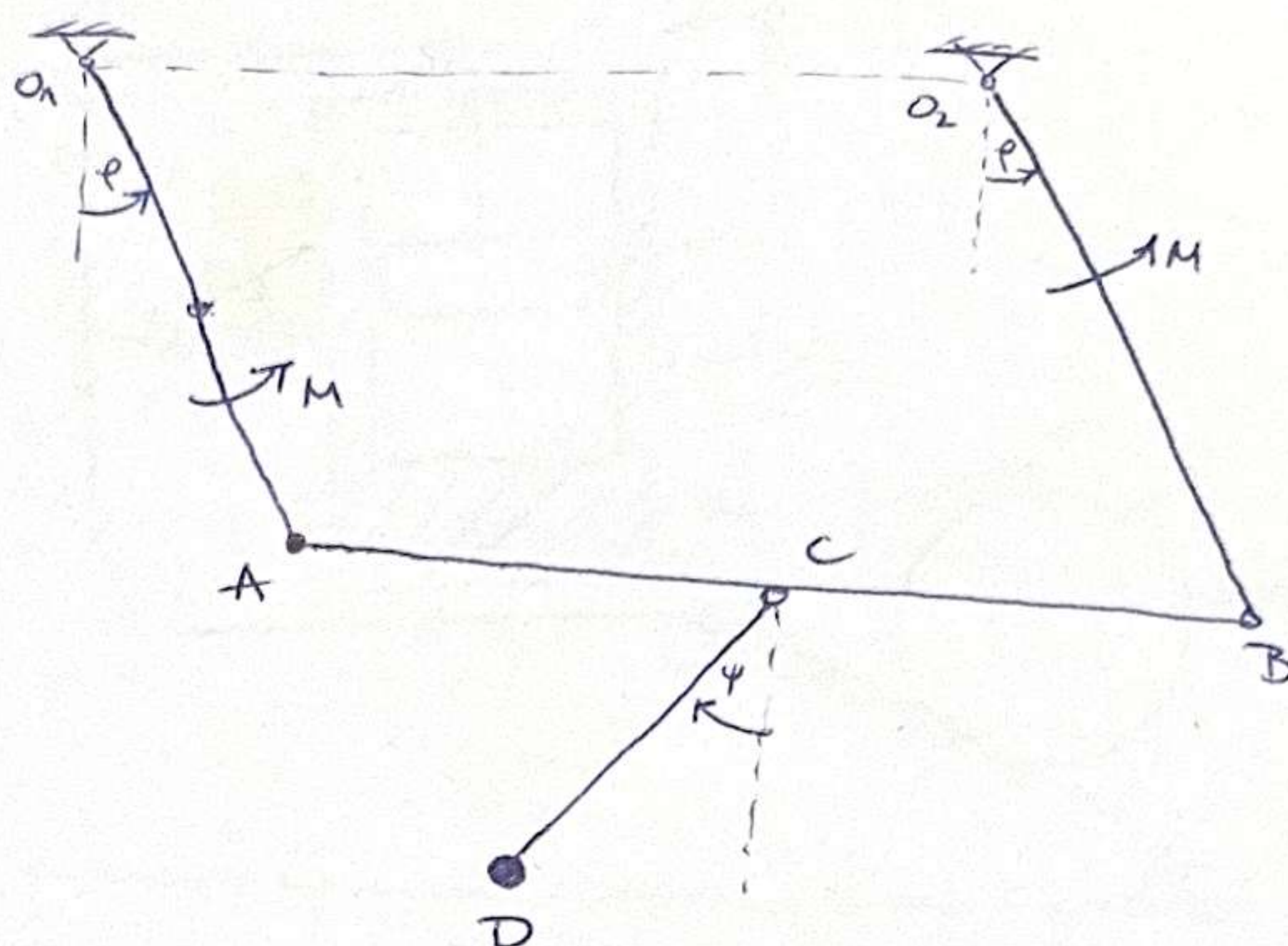
$AB: 2m, 2e$

$D: 2m$

$CD: \emptyset, e$

spregovi M, M

okl. i-ve kretanja φ, ψ ?



$$T = \left[\frac{1}{2} 3m \left(\frac{1}{2} e \ddot{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} 3m e^2 \ddot{\varphi}^2 \right]_{O_1} + \left[\frac{1}{2} 2m (e \ddot{\varphi})^2 + 0 \right]_{AB} + \left[\frac{1}{2} 2m (e^2 \ddot{\varphi}^2 + e^2 \ddot{\psi}^2 - 2e^2 \ddot{\varphi} \ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi)) + 0 \right] =$$

$$T = \left[\frac{3}{8} m e^2 \ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{8} m e^2 \ddot{\varphi}^2 \right] \cdot 2 + m e^2 \ddot{\varphi}^2 + m e^2 \ddot{\varphi}^2 + m e^2 \ddot{\psi}^2 - m e^2 \ddot{\varphi} \ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi) =$$

$$T = 3m e^2 \ddot{\varphi}^2 + m e^2 \ddot{\psi}^2 - m e^2 \ddot{\varphi} \ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = m e^2 \ddot{\varphi} \sin(\varphi + \psi), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 6m e^2 \dot{\varphi} - m e^2 \dot{\psi} \cos(\varphi + \psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = m e^2 \ddot{\psi} \sin(\varphi + \psi), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 2m e^2 \dot{\psi} - m e^2 \dot{\varphi} \cos(\varphi + \psi),$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 6m e^2 \ddot{\varphi} - m e^2 \ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi) + m e^2 \dot{\psi} \sin(\varphi + \psi) \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\psi})$$

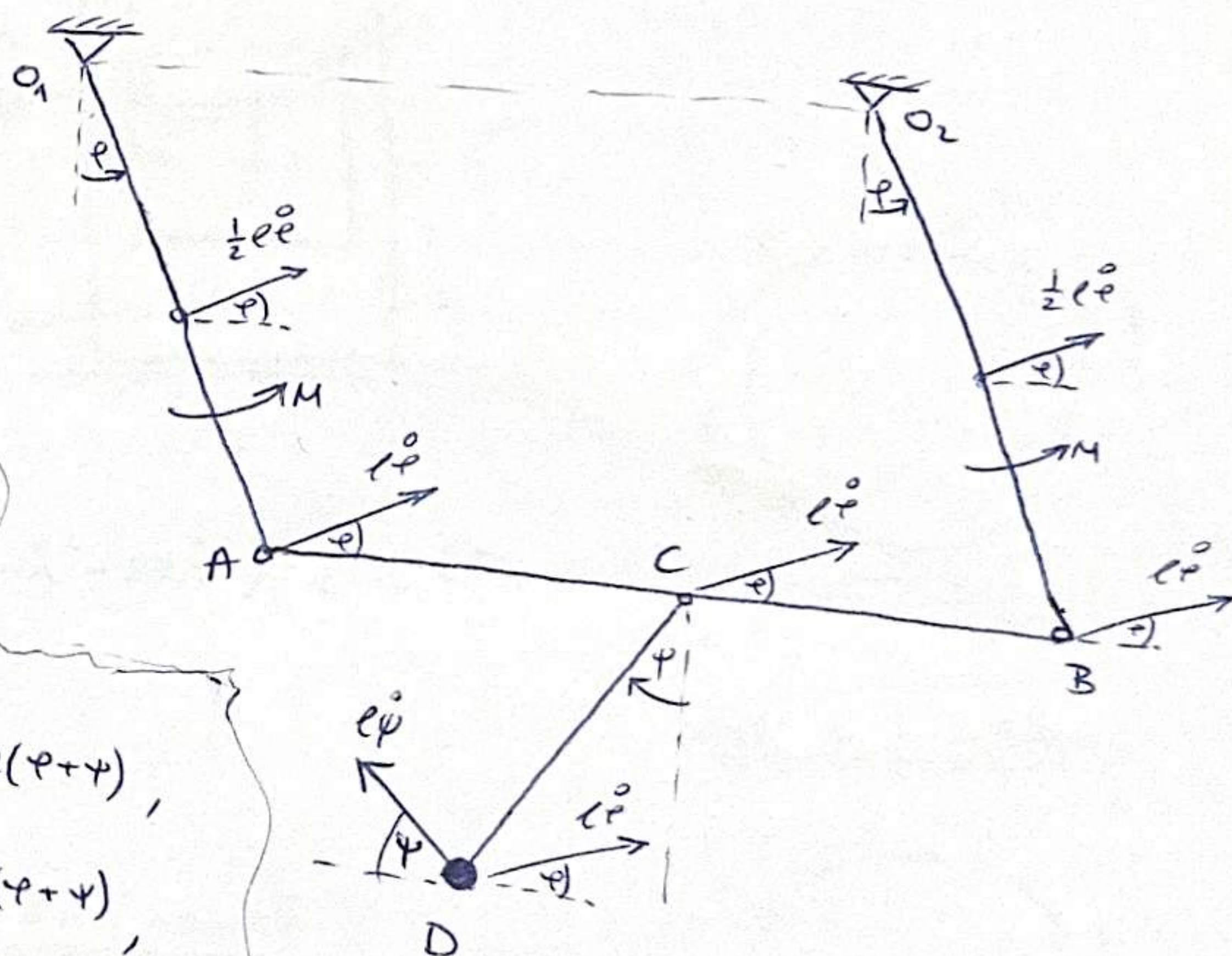
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} \right) = 2m e^2 \ddot{\psi} - m e^2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \psi) + m e^2 \dot{\varphi} \sin(\varphi + \psi) \cdot (\dot{\varphi} + \dot{\psi})$$

$$\partial A = M \partial \varphi + M \partial \psi - (3mg \cdot \frac{1}{2} e \partial \varphi) \cdot 2 - 2mg e \partial \varphi - 2mg (e \partial \varphi \sin \varphi + e \partial \psi \sin \psi) =$$

$$\partial A = 2M \partial \varphi - 3mg e \partial \varphi - 2mg e \partial \varphi - 2mg e \sin \varphi \partial \varphi - 2mg e \sin \psi \partial \psi$$

$$6m e^2 \ddot{\varphi} - m e^2 \ddot{\psi} \cos(\varphi + \psi) + m e^2 \dot{\psi} \sin(\varphi + \psi) (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = 2M - 5mg e - 2mg e \sin \varphi$$

$$2m e^2 \ddot{\psi} - m e^2 \ddot{\varphi} \cos(\varphi + \psi) + m e^2 \dot{\varphi} \sin(\varphi + \psi) (\dot{\varphi} + \dot{\psi}) = -2mg e \sin \psi$$



$$\dot{x}_D = e \dot{\varphi} \cos \varphi - e \dot{\psi} \cos \psi$$

$$\dot{y}_D = e \dot{\varphi} \sin \varphi + e \dot{\psi} \sin \psi$$

$$\dot{\varphi}_D^2 = e^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \varphi - 2e^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos \varphi \cos \psi + e^2 \dot{\psi}^2 \cos^2 \psi + e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \varphi + 2e^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \sin \varphi \sin \psi + e^2 \dot{\psi}^2 \sin^2 \psi =$$

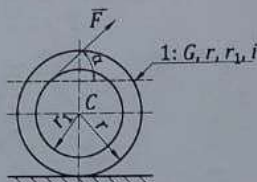
$$\dot{\varphi}_D^2 = e^2 \dot{\varphi}^2 + e^2 \dot{\psi}^2 - 2e^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} (\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) =$$

$$\dot{\varphi}_D^2 = e^2 \dot{\varphi}^2 + e^2 \dot{\psi}^2 - 2e^2 \dot{\varphi} \dot{\psi} \cos(\varphi + \psi)$$

Mehanika 3

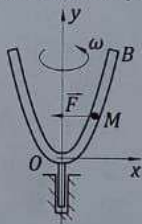
Januarski ispitni rok 2023. – grupa 1

1. Kalem težine G i poluprečnika r , dovodi se u kretanje preko lakog neistegljivog konca koji se odmotava sa njega, i koji zaklapa ugao α sa horizontalom za sve vreme kretanja. Na konac deluje konstantna sila $\vec{F}$. Odrediti brzinu centra inercije C kalema, kada se on pomeri za dužinu s . Poluprečnik inercije kalema, za osu koja prolazi kroz centar inercije C i upravna je na ravan materijalne simetrije, jednak je i . Kalem se kotrlja bez klizanja a krak otpora kotrljanju je ϵ . Poluprečnik dela kalema na koji je namotan konac iznosi r_1 . U početnom trenutku sistem se nalazio u miru.



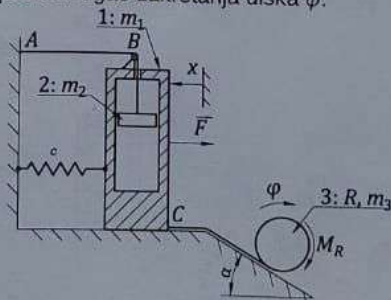
Slika uz zadatak 1.

2. Glatka tanka cev savijena u oblik parabole $y = \frac{\omega^2}{g} x^2$, obrće se oko vertikalne ose Oy ugaonom brzinom konstantnog intenziteta ω . U cevi kretanje započinje kuglica zanemarljivih dimenzija i mase m iz tačke $M_0 = O$. Na kuglicu za sve vreme kretanje deluje horizontalna sila $\vec{F}$, smer kao na slici, intenziteta proporcionalnog normalnom rastojanju kuglice od ose Oy sa koeficijentom proporcionalnosti $b = m \frac{\omega^2}{2}$. Odrediti najmanji intenzitet početne brzine v_0 koju treba saopštiti kuglici kako bi ona došla u položaj $B(\frac{g}{\omega^2}, y_B)$. Odrediti intenzitet ukupne normalne reakcije cevi u tački B za određenu početnu brzinu v_0 . Koordinatni sistem Oxy vezan je za cev.



Slika uz zadatak 2.

3. Sistem se sastoji od prizme 1 mase $m_1 = 2m$, vezane oprugom krutosti c za nepokretni zid, teta 2 mase $m_2 = m$ koji može da klizi u glatkom vertikalnom kanalu prizme 1 i diska 3 poluprečnika R i mase $m_3 = 2m$. Za teg je zakačeno lako neistegljivo uže koje je prebačeno preko lakog kotura u tački B i vezano za nepokretni zid u tački A . Pravac AB je horizontalan. U položaju $x = 0$ opruga je bila nenapregnuta. U tački C prizme 1 koja može da klizi bez trenja po glatkoj horizontalnoj podlozi, na zanemarljivom rastojanju od podloge, jednim krajem vezano je lako neistegljivo uže. Uže je drugim krajem namotano na disk 3 i bez trenja može da klizi niz strmu ravan nagibnog ugla α . Ako na prizmu 1 deluje horizontalna sila intenziteta F , smer kao na slici, a na disk 3 spreg sila momenta M_R , smer kao na slici, odrediti diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na horizontalnu koordinatu x i apsolutni ugao zakretanja diska φ .



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

januar 23

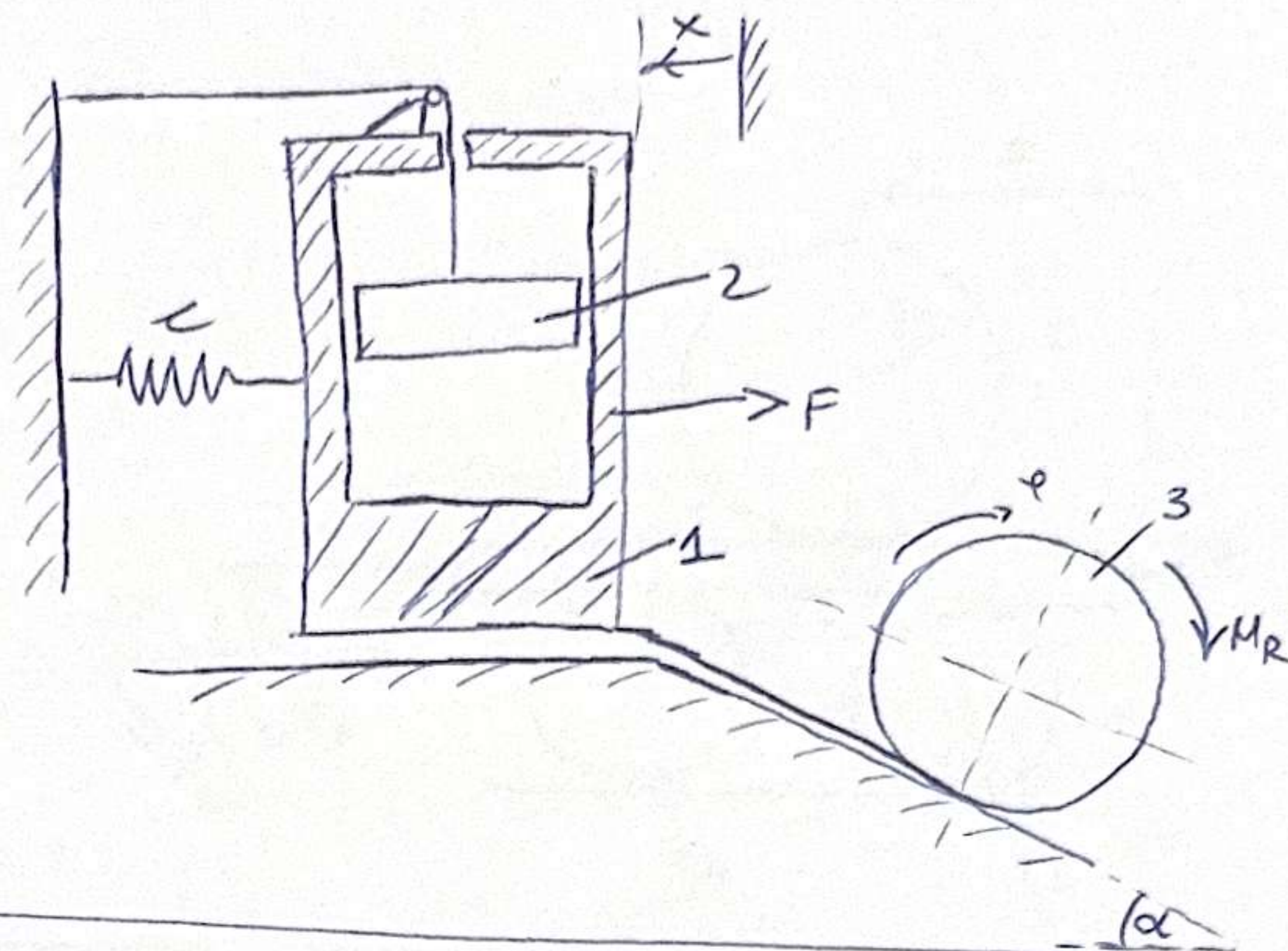
- ③ 1: $2m$
2: m
3: $2m, R$ (disk)

Opuga: c , za $x=0$ je neupregnuta

sila F

moment M_R

odl. j-ne kr. za x, φ ?



tebo 2 - ako se horizontalni deo
vrti shodi za dx , vertikalni
se produzi za dx , zato je:
 $\dot{y}_2 = -\dot{x}$

$$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}^2 = 2\dot{x}^2$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3$$

$$T_1 = \frac{1}{2} 2m \dot{x}^2 + 0 = m \dot{x}^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m 2\dot{x}^2 + 0 = m \dot{x}^2$$

$$T_3 = \frac{1}{2} 2m (R\dot{\varphi} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2} \frac{2mR^2}{2} \dot{\varphi}^2 = m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{x}) + \frac{1}{2} mR^2\dot{\varphi}^2 =$$

$$= m\dot{x}^2 + \frac{3}{2} mR^2\dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x}$$

$$T = 3m\dot{x}^2 + \frac{3}{2} mR^2\dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x}$$

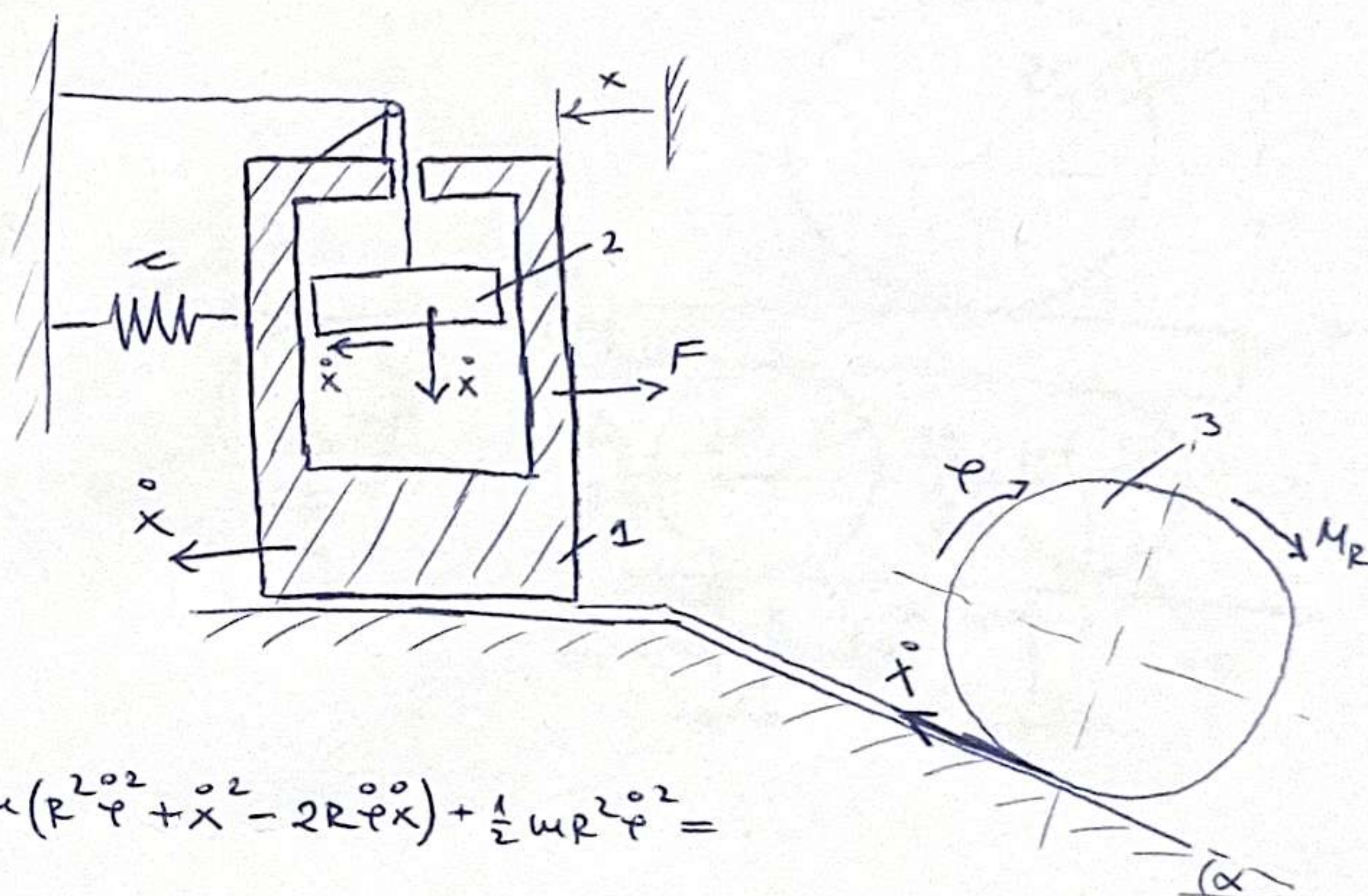
$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 6m\dot{x} - 2mR\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = 6m\ddot{x} - 2mR\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 3mR^2\dot{\varphi} - 2mR\dot{x}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 3mR^2\ddot{\varphi} - 2mR\ddot{x}$$

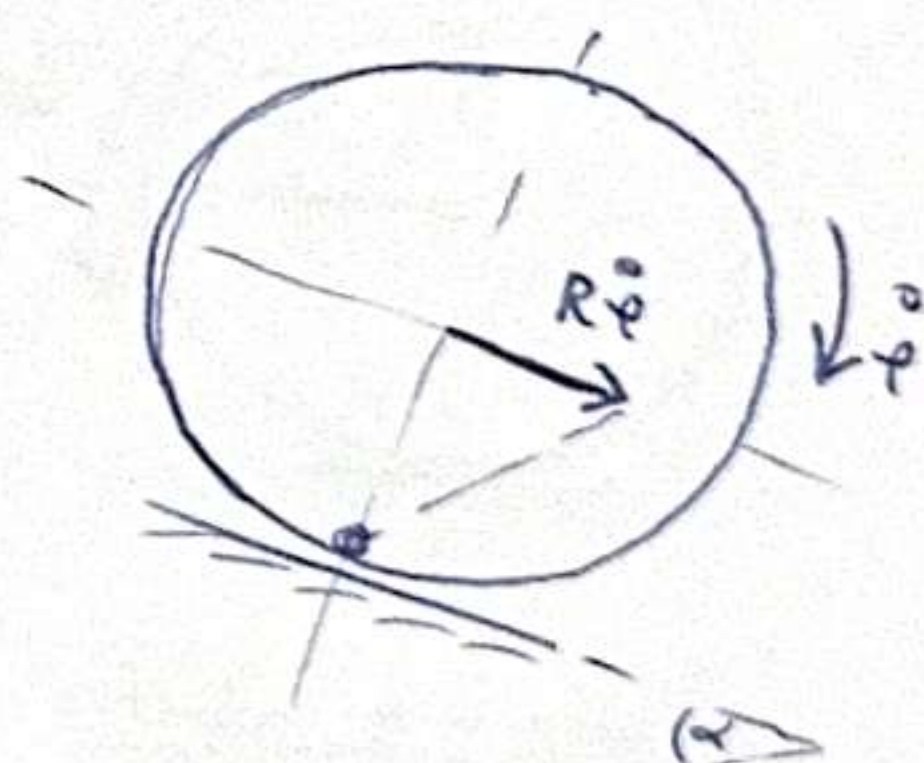
$$\Delta A = -cx\partial x + M_R\partial\varphi - F\partial x + mg\partial x - 2mg(R\partial\varphi - \partial x) \sin\alpha$$

$$6m\ddot{x} - 2mR\ddot{\varphi} = -cx - F + 2mg + 2mg \sin\alpha$$

$$3mR^2\ddot{\varphi} - 2mR\ddot{x} = M_R - 2mgR \sin\alpha$$



disk 3 - relativno



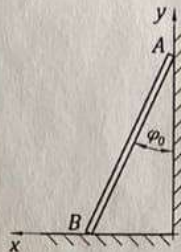
disk 3 - apsolutno

$$v_c = R\dot{\varphi} - \dot{x}$$

Mehanika 3

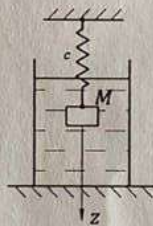
Februarski ispitni rok 2023. – grupa 2

1. Homogeni štap AB , dužine $\overline{AB} = 2l$, nalazi se u vertikalnoj ravni i oslanja se krajem A na glatki vertikalni zid, a krajem B o glatku horizontalnu ravan. U početnom trenutku štap miruje i sa vertikalnim zidom zaklapa ugao φ_0 i započinje kretanje pod dejstvom svoje težine. Pri kojoj vrednosti ugla φ će se kraj A štapa odvojiti od vertikalnog zida?



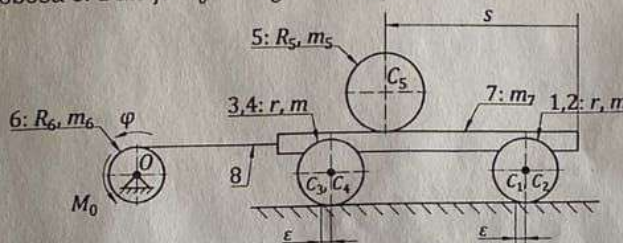
Slika uz zadatak 1.

2. Teret M , mase m i zanemarljivih dimenzija, okačen je o kraj opruge krutosti c i kreće se u otpornoj sredini u vertikalnoj ravni. Intenzitet sile otpora kretanju proporcionalan je prvom stepenu intenziteta brzine: $F_w = bv$, gde je b pozitivna realna konstanta. Odrediti konačnu jednačinu kretanja tereta $z(t)$, ako je u početnom trenutku teret bio pomeren iz položaja statičke ravnoteže vertikalno naniže za dužinu a i pušten da osciluje bez početne brzine. Dato je $m = 10 \text{ gr}$, $c = 10 \text{ gr/cm}$, $b = 1,6 \text{ gr} \cdot \text{s/cm}$, $a = 4 \text{ cm}$.



Slika uz zadatak 2.

3. Kolica (slika 3) se dovode u kretanje pomoću lakog, glatkog, neistegljivog užeta 8 namotanog na doboš 6, mase $m_6 = 2m$ i poluprečnika $R_6 = r/2$, na koji deluje spreg sila momenta M_0 . Na platformi (7) kolica nalazi se homogeni cilindar 5, mase $m_5 = 5m$ i poluprečnika $R_5 = 3r/2$, koji se pri kretanju kolica kotrlja se bez klizanja po platformi. Točkovi su vezani za kolica preko osovinu u svojim središtima. Masa **svakog od četiri točka** je m , a poluprečnik r . Masa platforme je $m_7 = 4m$. Odrediti apsolutno ubrzanje središta C_5 valjka i ugaono ubrzanje doboša 6. **Krak trenja kotrljanja točkova kolica po podlozi iznosi ε (za svaki od 4 točka)**. Otpor kotrljanju valjka 5 po platformi zanemariti. Točkovi kolica kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za generalisane koordinate uzeti relativan položaj centra C_5 valjka 5 u odnosu na kraj platforme s i ugao obrtanja φ doboša 6. Dato je $M_0 = 3mgr$ i $\varepsilon = 2r/13$.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

februar 23

③ 6: $2m, \frac{r}{2}$ (disk)

spring $M_0 = 3mgr$

5: $5m, \frac{3}{2}r$ (cilinder)

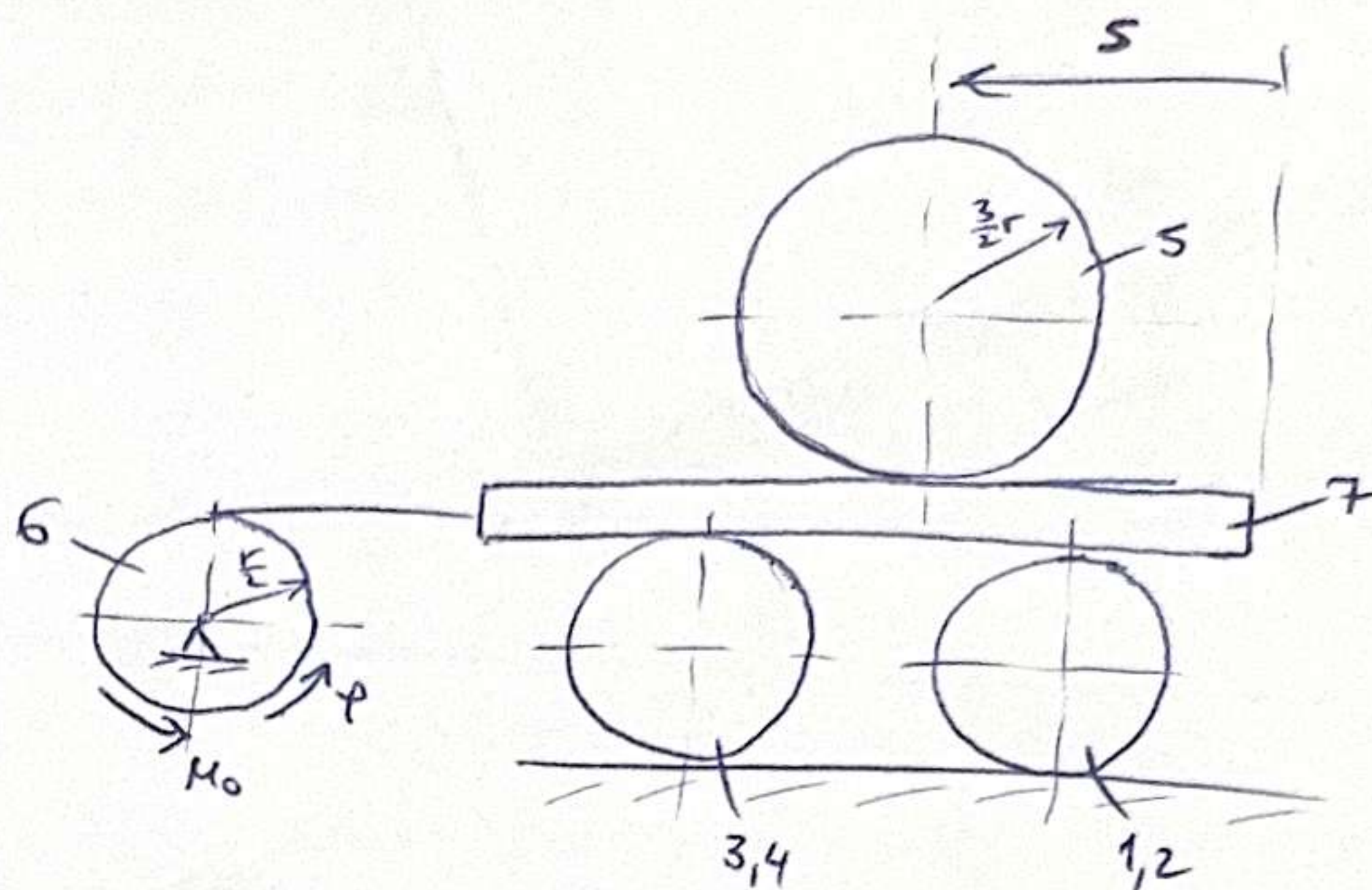
1,2,3,4: m, r

7: $4m$

$\ddot{s} = ?$, $\ddot{\varphi} = ?$

krak treznja kotrljanja

točkama 1,2,3,4 je: $\varepsilon = \frac{2}{13}r$



$$T = 4 \cdot T_1 + T_5 + T_6 + T_7$$

$$T_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{1}{4} r \ddot{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{m r^2}{2} \left(\frac{1}{4} \ddot{\varphi} \right)^2 = \frac{3}{64} m r^2 \ddot{\varphi}^2$$

$$T_5 = \frac{1}{2} 5m \left(\ddot{s} + \frac{1}{2} r \ddot{\varphi} \right)^2 + \frac{1}{2} 5m \left(\frac{3}{2} r \right)^2 \left(\frac{2}{13} \ddot{\varphi} \right)^2 =$$

$$= \frac{5}{2} m \left(\ddot{s}^2 + r \ddot{\varphi} \ddot{s} + \frac{1}{4} r^2 \ddot{\varphi}^2 \right) + \frac{5}{2} m \ddot{\varphi}^2 =$$

$$= 5m \ddot{s}^2 + \frac{5}{8} m r^2 \ddot{\varphi}^2 + \frac{5}{2} m r \ddot{\varphi} \ddot{s}$$

$$T_6 = 0 + \frac{1}{2} 2m \left(\frac{r}{2} \right)^2 \ddot{\varphi}^2 = \frac{1}{4} m r^2 \ddot{\varphi}^2$$

$$T_7 = \frac{1}{2} 4m \left(\frac{1}{2} r \ddot{\varphi} \right)^2 + 0 = \frac{1}{2} m r^2 \ddot{\varphi}^2$$

$$T = \frac{25}{16} m r^2 \ddot{\varphi}^2 + 5m \ddot{s}^2 + \frac{5}{2} m r \ddot{\varphi} \ddot{s}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 10m \dot{s} + \frac{5}{2} m r \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} \right) = 10m \ddot{s} + \frac{5}{2} m r \ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{25}{8} m r^2 \ddot{\varphi} + \frac{5}{2} m r \ddot{s}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{25}{8} m r^2 \ddot{\varphi} + \frac{5}{2} m r \ddot{s}$$

$$\partial A = M_0 \partial \varphi - N \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{4} \partial \varphi = 3mgr \partial \varphi - \frac{13}{4} mg \cdot \frac{2}{13} r \cdot \frac{1}{4} \partial \varphi = mgr \partial \varphi$$

$$10m \ddot{s} + \frac{5}{2} m r \ddot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad m \ddot{s} = -\frac{1}{4} m r \ddot{\varphi}$$

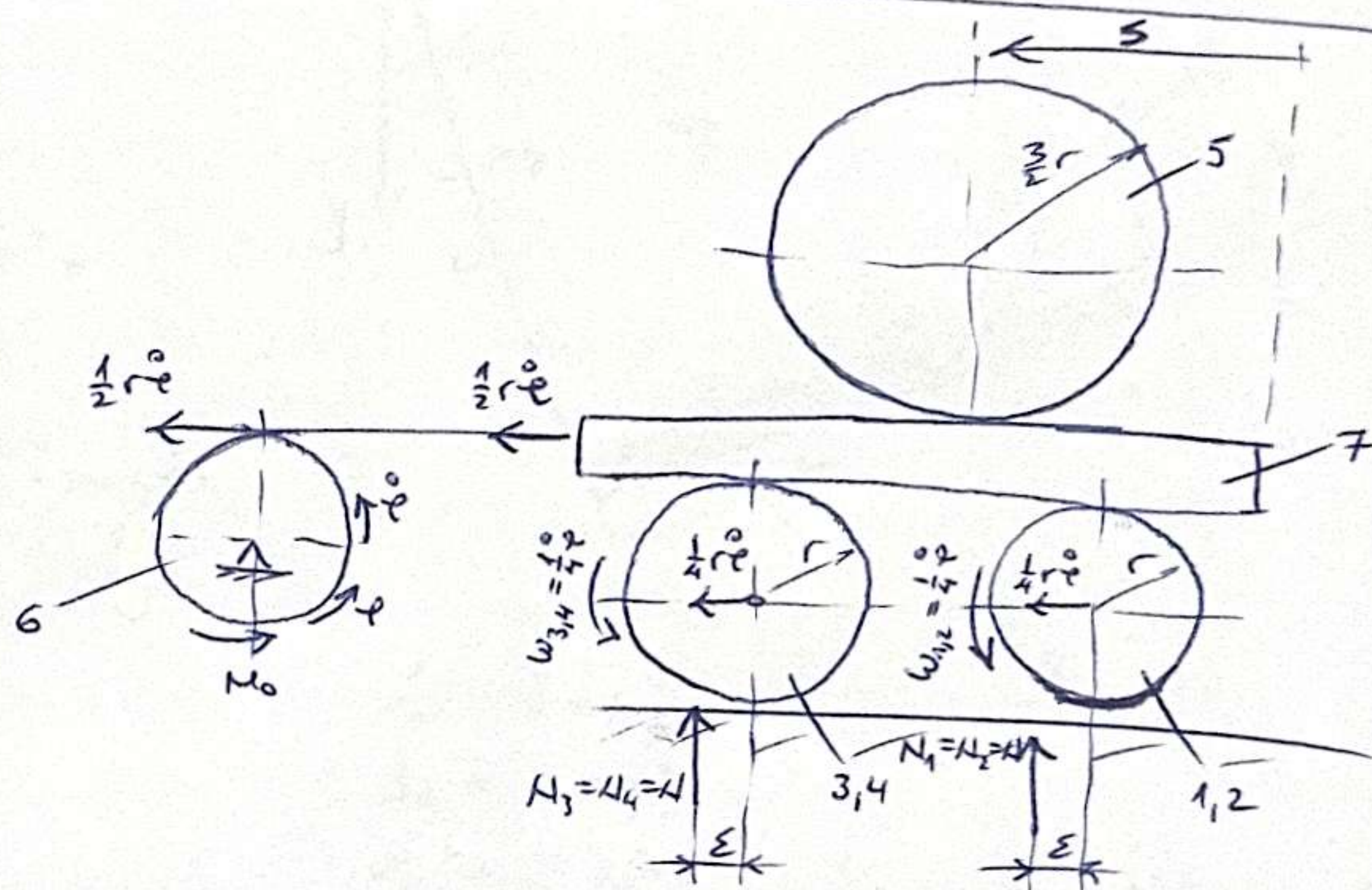
$$\frac{25}{8} m r^2 \ddot{\varphi} + \frac{5}{2} m r \ddot{s} = mgr$$

$$\frac{25}{8} m r^2 \ddot{\varphi} + \frac{5}{2} r \left(-\frac{1}{4} m r \ddot{\varphi} \right) = mgr$$

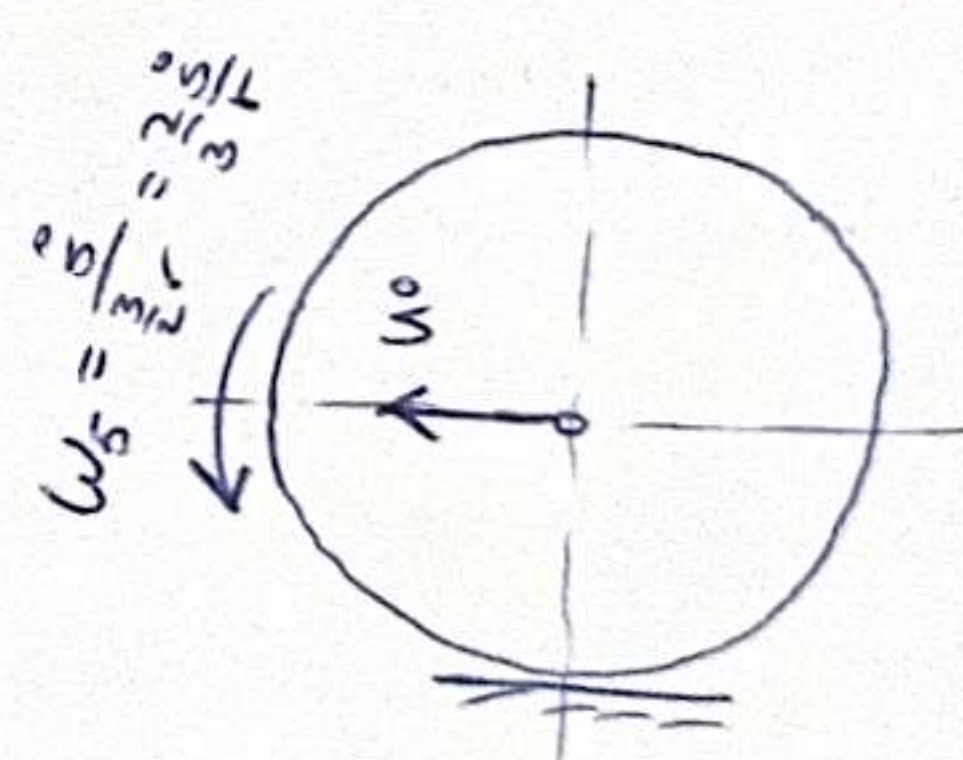
$$m r^2 \ddot{\varphi} \left(\frac{25}{8} - \frac{5}{4} \right) = mgr$$

$$\ddot{\varphi} \cdot \frac{15}{8} r = g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} = \frac{8}{15} \frac{g}{r}}$$

$$\ddot{s} = -\frac{1}{4} r \cdot \frac{8}{15} \frac{g}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{s} = -\frac{2}{15} g}$$



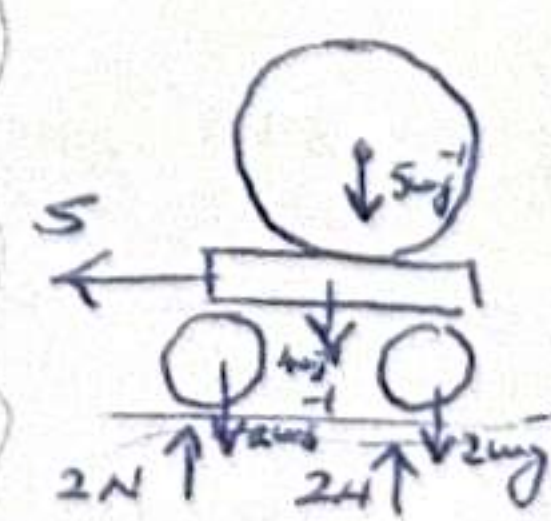
cilinder 5 - relativno



cilinder 5 - apsolutno

$$v_c = \ddot{s} + \frac{1}{2} r \ddot{\varphi}$$

izvedujemo podsystem (da ukažemo N)

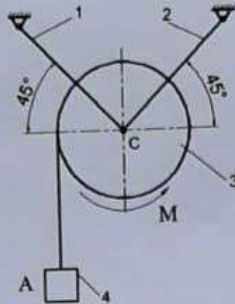


$$m \ddot{a} = \sum \vec{F}_i$$

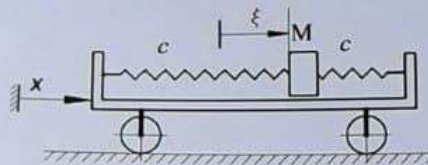
$$y: 0 = 13mg - 4N$$

$$N = \frac{13}{4} mg$$

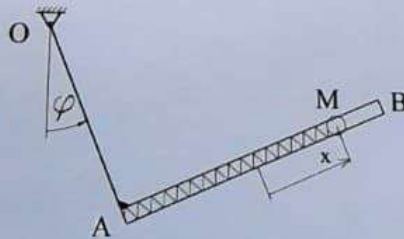
1. Na slici je prikazan sistem koji čine laki štapovi 1 i 2, disk 3 (poluprečnika R i mase m) i teg 4 mase $2m$. Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni u polju sile Zemljine teže. Na disk je namotano lako užo kojim se podiže teg 4 usled dejstva momenta sprega sile intenziteta $M=4mgR$, kao na slici. Odrediti ugaono ubrzanje diska i sile u štapovima.



2. Teret M , mase $m=1$ koji je oprugama krutosti $c=1$ vezan za zid pokretnih kolica, može da se kreće po podu kolica. U položaju $\xi=0$ opruge su nenapregnute. Točkovi kolica kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Kućište kolica kreće se po zakonu $x=\sin(t)$. U početnom trenutku sistem je mirovao i opruge su bile nenapregnute. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M .



3. Pravougli ugaonik OAB ($AB=2OA=2L$, $m_{AB}=m$, masu štapa OA zanemariti) može da se obrće oko horizontalne ose Oz tako da je položaj u odnosu na vertikalu određen uglom φ , kao na slici. Duž štapa može da klizi prsten M, mase m . Prsten je vezan oprugom krutosti c , čiji je drugi kraj vezan za tačku A. Položaj prstena u odnosu na štap određen je relativnom koordinatom x . yopruha je nenapregnuta u položaju $x=0$ kada je prsten na sredini štapa. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema za zadate generalisane coordinate.

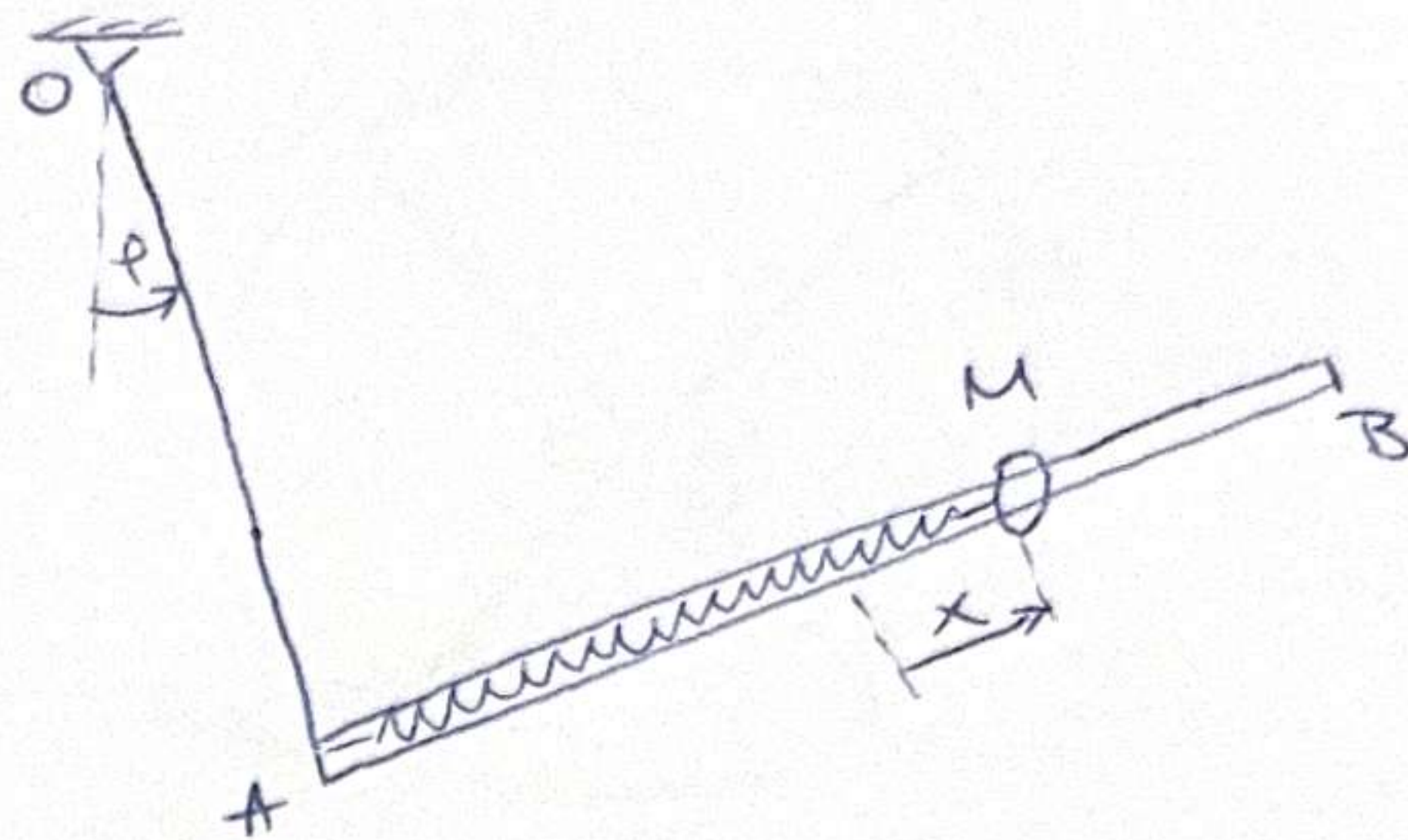


oktober 2 21

- ③ OA: ϕ, L
 AB: $m, 2L$
 $M: m$

opruha: c , za $x=0$ je neupregnjena
 (toda je prsten na sredini stepla)

daj $\ddot{\phi}$ -ne krakunja za x, ϕ ?



$$T = T_{AB} + T_M$$

$$T_{AB} = \frac{1}{2} m (L\sqrt{2}\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{L} m (2L)^2 \dot{\phi}^2 =$$

$$= mL^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\phi}^2 = \frac{7}{6} mL^2 \dot{\phi}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2} m \dot{u}_M^2 + 0 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mL^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m x^2 \dot{\phi}^2 +$$

$$+ mLx\dot{\phi}^2 + 2L\dot{\phi}\dot{x}$$

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{13}{6} mL^2 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m x^2 \dot{\phi}^2 + mLx\dot{\phi}^2 + 2mL\dot{\phi}\dot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{x}\dot{\phi}^2 + mL\dot{\phi}^2, \quad \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + 2mL\dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m\ddot{x} + 2mL\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = \frac{13}{3} mL\dot{\phi} + m\dot{x}L + 2mLx\dot{\phi} + 2mL\dot{x}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{13}{3} mL\ddot{\phi} + m\dot{x}L + 2mL\ddot{x} + 2mLx\ddot{\phi} + 2mL\ddot{x}$$

$$\partial A = -cx\partial x + mg\partial y_c + mg\partial y_M$$

$$y_c = L\cos\phi - L\sin\phi \rightarrow \frac{\partial y_c}{\partial \phi} = -L\dot{\phi}\sin\phi - L\dot{\phi}\cos\phi$$

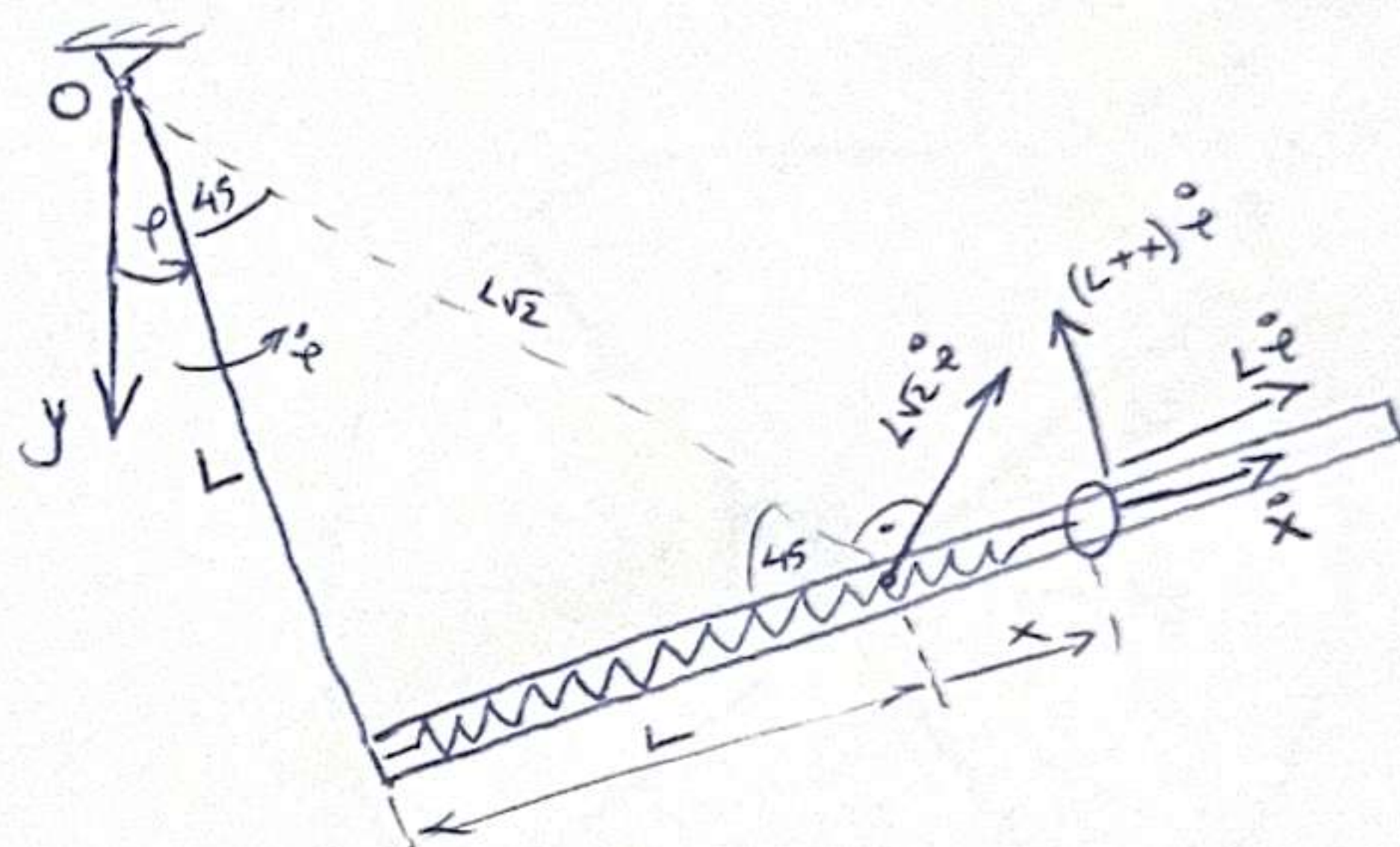
$$y_M = L\cos\phi - (L+x)\sin\phi \rightarrow \frac{\partial y_M}{\partial \phi} = -L\dot{\phi}\sin\phi - \dot{x}\sin\phi - (L+x)\dot{\phi}\cos\phi$$

$$\partial A = -cx\partial x + mg(-L\dot{\phi}\sin\phi - L\dot{\phi}\cos\phi) + mg(-L\dot{\phi}\sin\phi - \dot{x}\sin\phi - (L+x)\dot{\phi}\cos\phi) =$$

$$\partial A = -cx\partial x - 2mgL\sin\phi\dot{\phi} - 2mgL\cos\phi\dot{\phi} - mgx\cos\phi\dot{\phi} - mg\sin\phi\dot{x}$$

$$m\ddot{x} + 2mL\ddot{\phi} - m\dot{x}\dot{\phi}^2 - mL\dot{\phi}^2 = -cx - mg\sin\phi$$

$$\frac{13}{3} mL\ddot{\phi} + m\dot{x}L + 2mL\ddot{x} + 2mLx\ddot{\phi} + 2mL\ddot{x} = -2mgL\sin\phi - 2mgL\cos\phi - mgx\cos\phi$$



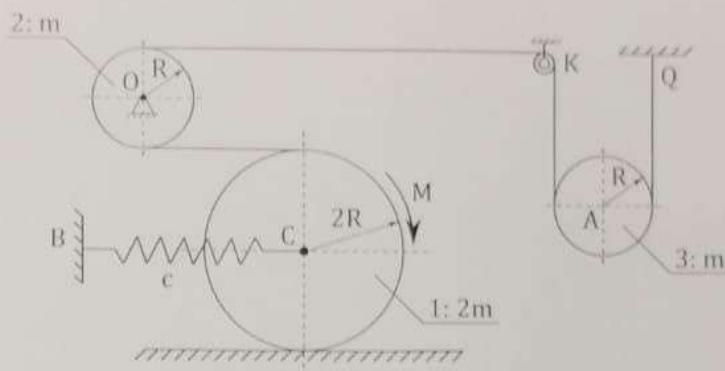
$$\dot{x}_M = \dot{x} + L\dot{\phi}$$

$$\dot{y}_M = (L+x)\dot{\phi}$$

$$u_M^2 = \dot{x}^2 + L^2\dot{\phi}^2 + 2L\dot{\phi}\dot{x} + L^2\dot{\phi}^2 + x^2\dot{\phi}^2 + 2Lx\dot{\phi}^2$$

$$u_M^2 = \dot{x}^2 + 2L\dot{\phi}^2 + x^2\dot{\phi}^2 + 2Lx\dot{\phi}^2 + 2L\dot{\phi}\dot{x}$$

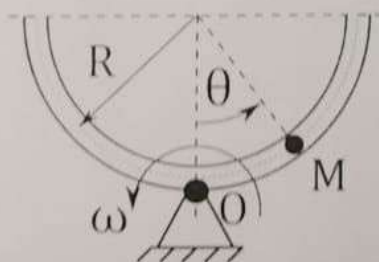
1. Диск 1 полупречника $2R$ и масе $2m$ може да се котрља без клизања по непокретној подлози, под дејством спрега сила интензитета момента спрега $M = 4m g R$. За центар диска C је везана опруга крутости $c = \frac{mg}{4\pi R}$, чији је други крај везан за непокретну тачку B . На диск 1 је намотано уље, чији други крај је пребачен преко котура (диска 2) полупречника R и масе m , а затим преко котура K занемарљиве масе и димензија, и коначно пребачено преко котура (диска 3) полупречника R и масе m и везано за непокретну тачку Q . У почетном тренутку систем је мировао у почетном положају приказаном на Слици 1, а опруга је била ненапрегнута. Одредити угаону брзину диска 1 у тренутку када се диск 3 обрне за два пуна круга.



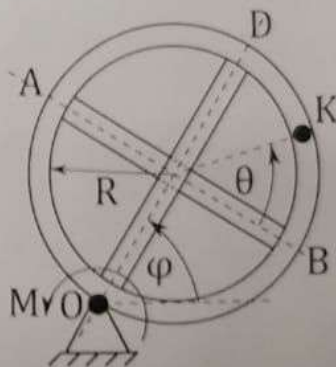
Слика 1

2. На Сл. 2 приказана је танка полукружна цев (полупречника кружице R) која је везана непокретним ослоном на оси симетрије цеви (у тачки O) и може да се обрће око вертикалне осе Oz константном угаоном брзином ω . Кроз цев може да се креће тачка M масе m , која се у почетном тренутку налазила у тачки O и имала почетну релативну брзину интензитета $V_{r0} = \sqrt{2R\omega}$. Одредити вектор укупне реакције цеви на тачку M за произвољан положај тачке одређен углом θ .

3. Танки хомогени прстен полупречника R и масе m може да се обрће око непокретне вертикалне осе Oz под дејством спрега сила интензитета момента спрега M . Дуж оса симетрије прстена налазе се два штапа OD и AB , једнаких дужина $2R$ и маса $2m$, који су својим крајевима круто везани за прстен. По прстену може да се креће без трења тачка K масе $4m$, као што је приказано на Слици 3. Одредити диференцијалне једначине кретања система. За генерализане координате усвојити $q_1 = \theta$ и $q_2 = \varphi$.



Слика 2



Слика 3

jun 22

③ prsten: m, R

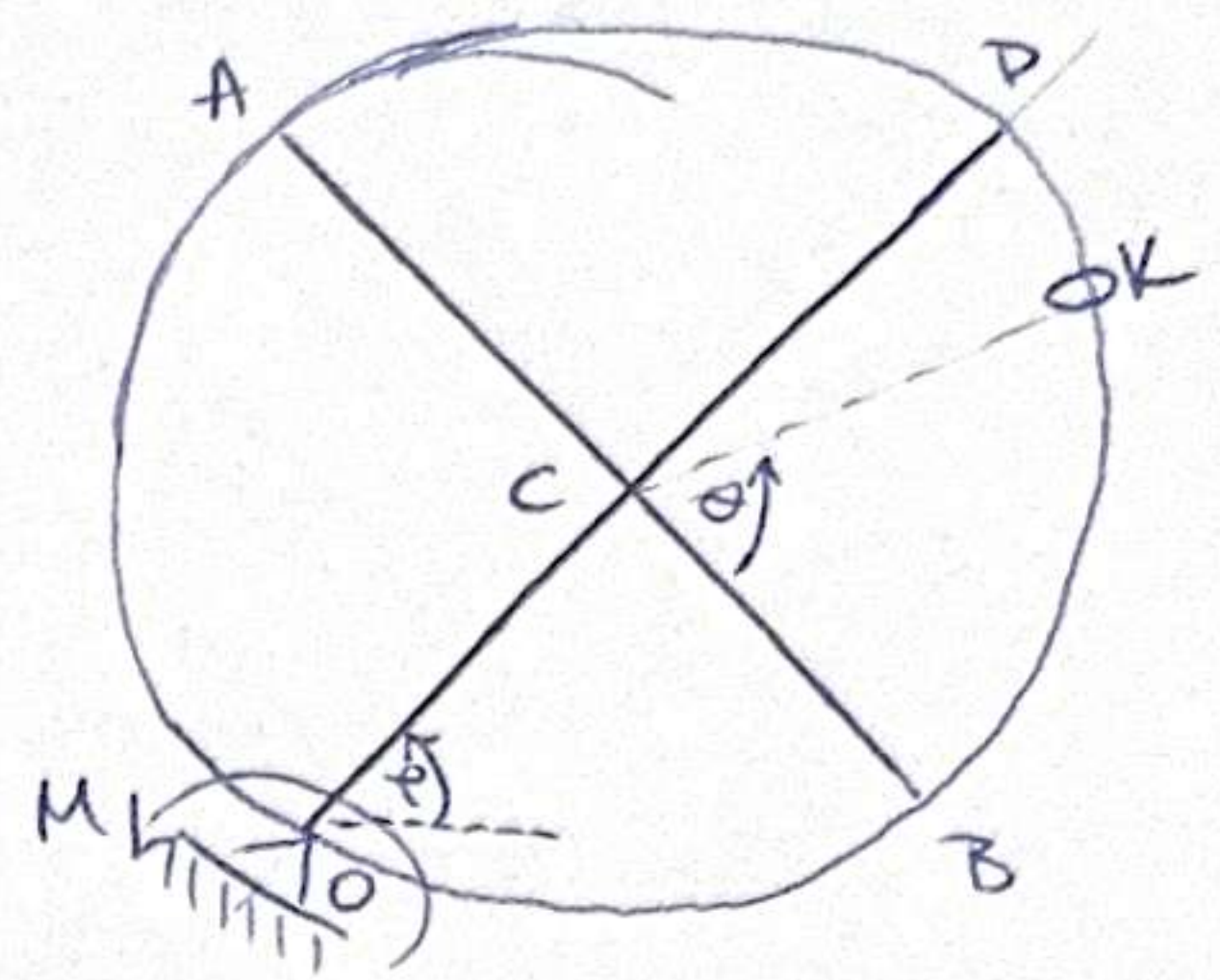
moment M

OD: $2m, 2R$

AB: $2m, 2R$

K: $4m$

dt. j-ne za θ, φ ?



$$T = T_p + T_{OD} + T_{AB} + T_M$$

$$T_p = \frac{1}{2} m (R\ddot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m R^2 \ddot{\varphi}^2 = m R^2 \ddot{\varphi}^2$$

$$T_{OD} = T_{AB} = \frac{1}{2} 2m (R\ddot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} 2m (2R)^2 \ddot{\varphi}^2 = m R^2 \ddot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} m R^2 \ddot{\varphi}^2 = \frac{4}{3} m R^2 \ddot{\varphi}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2} 4m v_M^2 + 0 = 4m R^2 \dot{\varphi}^2 + 2m R^2 \dot{\theta}^2 + 4m R^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta + 4m R^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta$$

$$T = \frac{23}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2 + 2m R^2 \dot{\theta}^2 + 4m R^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta + 4m R^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta + 4m R^2 \dot{\theta} \dot{\varphi} \sin \theta, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 4m R^2 \dot{\theta} + 4m R^2 \dot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\varphi} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) = 4m R^2 \ddot{\theta} + 4m R^2 \ddot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\varphi} \sin \theta + 4m R^2 \dot{\theta} \cos \theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{46}{3} m R^2 \dot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\theta} + 8m R^2 \dot{\varphi} \sin \theta + 4m R^2 \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{46}{3} m R^2 \ddot{\varphi} + 4m R^2 \ddot{\theta} + 8m R^2 \dot{\varphi} \sin \theta + 8m R^2 \dot{\theta} \cos \theta + 4m R^2 \dot{\theta} \sin \theta + 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta$$

$$\partial A = M \partial \varphi - 5m R \cos \varphi \partial \varphi - 4m R \sin \varphi \partial \varphi$$

$$\frac{\partial y_C}{\partial t} = R \dot{\varphi} \cos \varphi$$

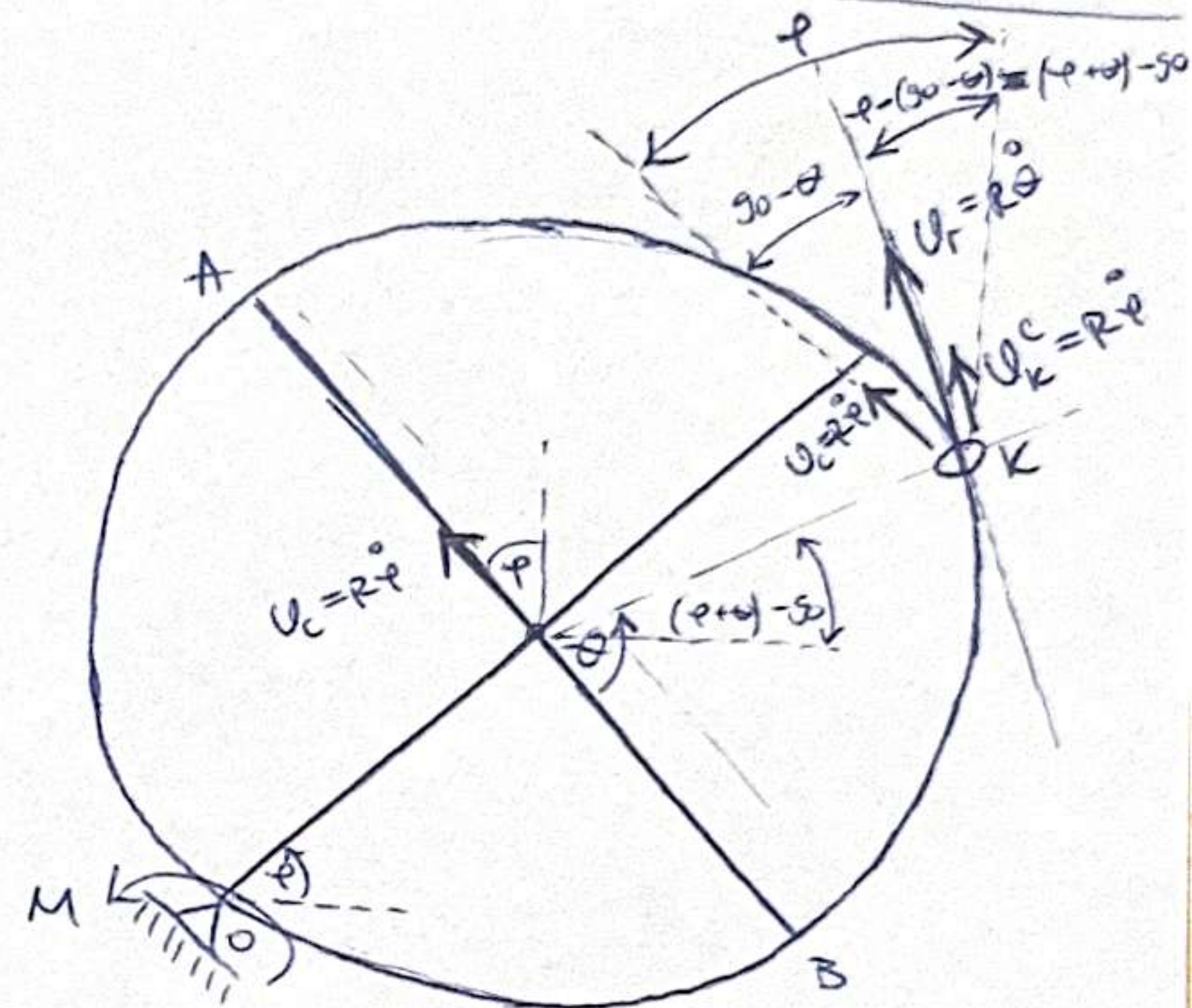
$$y_K = R \sin \varphi + R \sin((\varphi + \theta) - 90) = R \sin \varphi - R \cos(\varphi + \theta) \rightarrow \frac{\partial y_K}{\partial t} = R \dot{\varphi} \cos \varphi + R(\dot{\varphi} + \dot{\theta}) \sin(\varphi + \theta)$$

$$\partial A = M \partial \varphi - 5m R \cos \varphi \partial \varphi - 4m R \cos \varphi \partial \varphi - 4m R \sin(\varphi + \theta) \partial \varphi - 4m R \sin(\varphi + \theta) \partial \theta$$

$$\partial A = M \partial \varphi - 9m R \cos \varphi \partial \varphi - 4m R \sin(\varphi + \theta) \partial \varphi - 4m R \sin(\varphi + \theta) \partial \theta$$

$$4m R^2 \ddot{\theta} + 4m R^2 \ddot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\varphi} \sin \theta - 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta = -4m R \sin(\varphi + \theta)$$

$$\frac{46}{3} m R^2 \ddot{\varphi} + 4m R^2 \ddot{\theta} + 8m R^2 \dot{\varphi} \sin \theta + 8m R^2 \dot{\theta} \cos \theta + 4m R^2 \dot{\theta} \sin \theta + 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \cos \theta = M - 9m R \cos \varphi - 4m R \sin(\varphi + \theta)$$



$$\dot{x}_K = R \dot{\varphi} + R \dot{\theta} + R \dot{\varphi} \cos(90 - \theta) \rightarrow \sin \theta$$

$$\dot{y}_K = R \dot{\varphi} \sin(90 - \theta) \rightarrow \cos \theta$$

$$v_K^2 = R^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + 2R^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta + 2R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + 2R^2 \dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + 2R^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta + R^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta$$

$$v_K^2 = 2R^2 \dot{\varphi}^2 + R^2 \dot{\theta}^2 + 2R^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} + 2R^2 \dot{\varphi}^2 \sin \theta + 2R^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta + 2R^2 \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin \theta$$