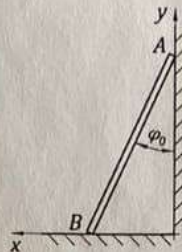


Mehanika 3

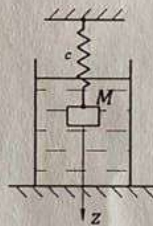
Februarski ispitni rok 2023. – grupa 2

1. Homogeni štap AB , dužine $\overline{AB} = 2l$, nalazi se u vertikalnoj ravni i oslanja se krajem A na glatki vertikalni zid, a krajem B o glatku horizontalnu ravan. U početnom trenutku štap miruje i sa vertikalnim zidom zaklapa ugao φ_0 i započinje kretanje pod dejstvom svoje težine. Pri kojoj vrednosti ugla φ će se kraj A štapa odvojiti od vertikalnog zida?



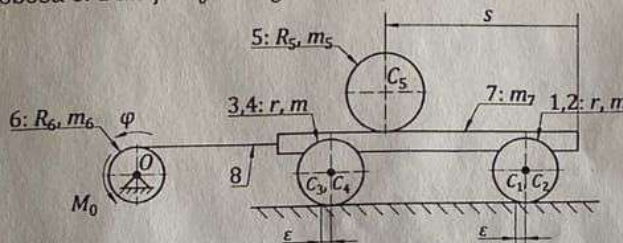
Slika uz zadatak 1.

2. Teret M , mase m i zanemarljivih dimenzija, okačen je o kraj opruge krutosti c i kreće se u otpornoj sredini u vertikalnoj ravni. Intenzitet sile otpora kretanju proporcionalan je prvom stepenu intenziteta brzine: $F_w = bv$, gde je b pozitivna realna konstanta. Odrediti konačnu jednačinu kretanja tereta $z(t)$, ako je u početnom trenutku teret bio pomeren iz položaja statičke ravnoteže vertikalno naniže za dužinu a i pušten da osciluje bez početne brzine. Dato je $m = 10 \text{ gr}$, $c = 10 \text{ gr/cm}$, $b = 1,6 \text{ gr} \cdot \text{s/cm}$, $a = 4 \text{ cm}$.



Slika uz zadatak 2.

3. Kolica (slika 3) se dovode u kretanje pomoću lakog, glatkog, neistegljivog užeta 8 namotanog na doboš 6, mase $m_6 = 2m$ i poluprečnika $R_6 = r/2$, na koji deluje spreg sila momenta M_0 . Na platformi (7) kolica nalazi se homogeni cilindar 5, mase $m_5 = 5m$ i poluprečnika $R_5 = 3r/2$, koji se pri kretanju kolica kotrlja se bez klizanja po platformi. Točkovi su vezani za kolica preko osovine u svojim središtima. Masa **svakog od četiri točka** je m , a poluprečnik r . Masa platforme je $m_7 = 4m$. Odrediti apsolutno ubrzanje središta C_5 valjka i ugaono ubrzanje doboša 6. **Krak trenja kotrljanja točkova kolica po podlozi iznosi ε (za svaki od 4 točka)**. Otpor kotrljanju valjka 5 po platformi zanemariti. Točkovi kolica kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za generalisane koordinate uzeti relativan položaj centra C_5 valjka 5 u odnosu na kraj platforme s i ugao obrtanja φ doboša 6. Dato je $M_0 = 3mgr$ i $\varepsilon = 2r/13$.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

februar 22

2) M: m, zanemarljive dimenzije

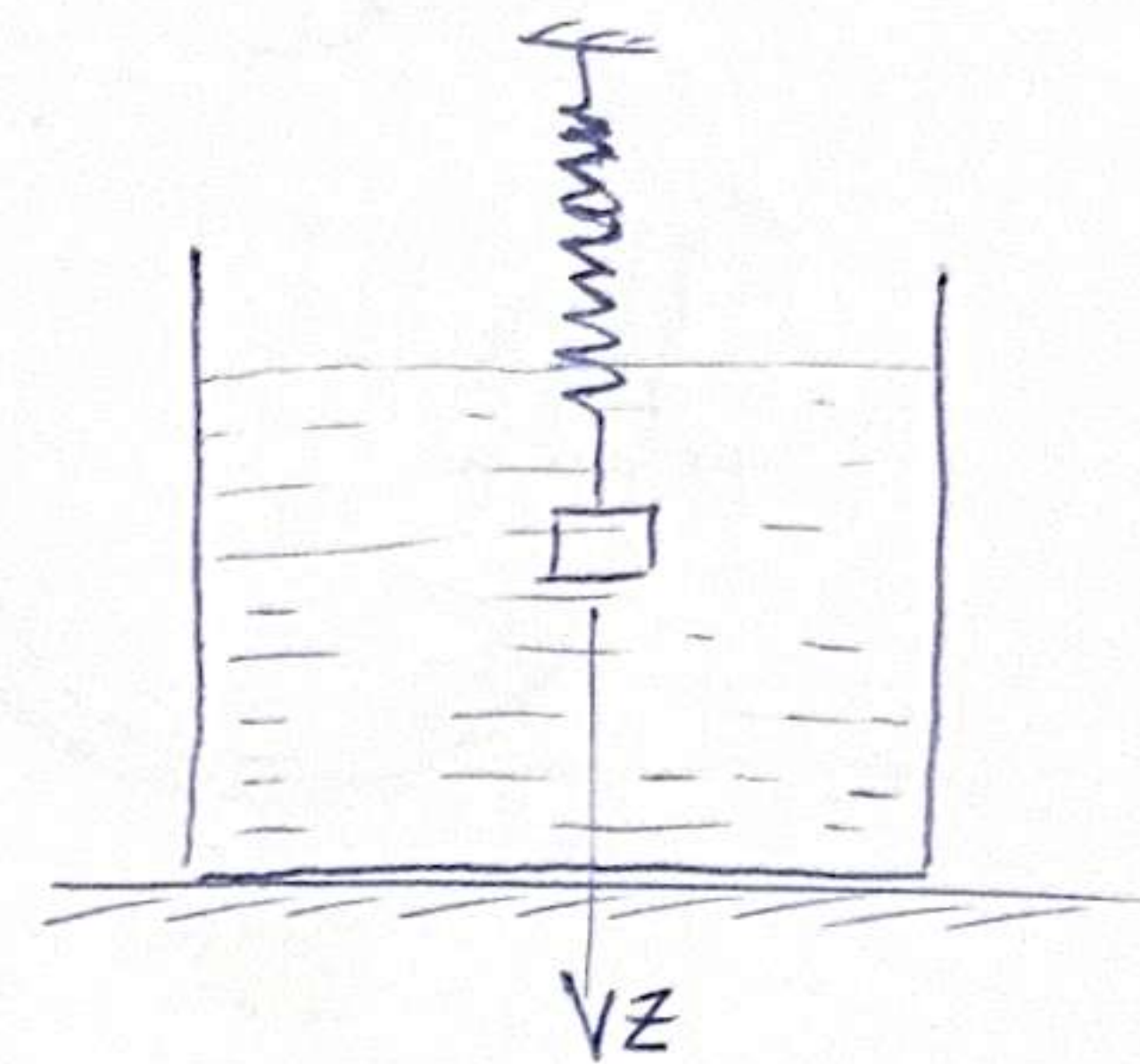
opruga: τ

sila otpora: proporcionalna prvom stepenu brzine
 $F_w = b \cdot v$

$z(t) = ?$

to: telo pomereuo iz staja ravnoteže za a (nanite)
 pušten bet poč. brzine

$m = 10 \text{ gr}$, $\tau = 10 \frac{\text{gr} \cdot \text{s}}{\text{cm}}$, $b = 1,6 \frac{\text{gr} \cdot \text{s}}{\text{cm}}$, $a = 4 \text{ cm}$



zanemarljive dimenzije tela $\Rightarrow$ sila potiska jednaka nuli
 (nema istisnute tečnosti) (sila potiska = težina istisnute tečnosti)

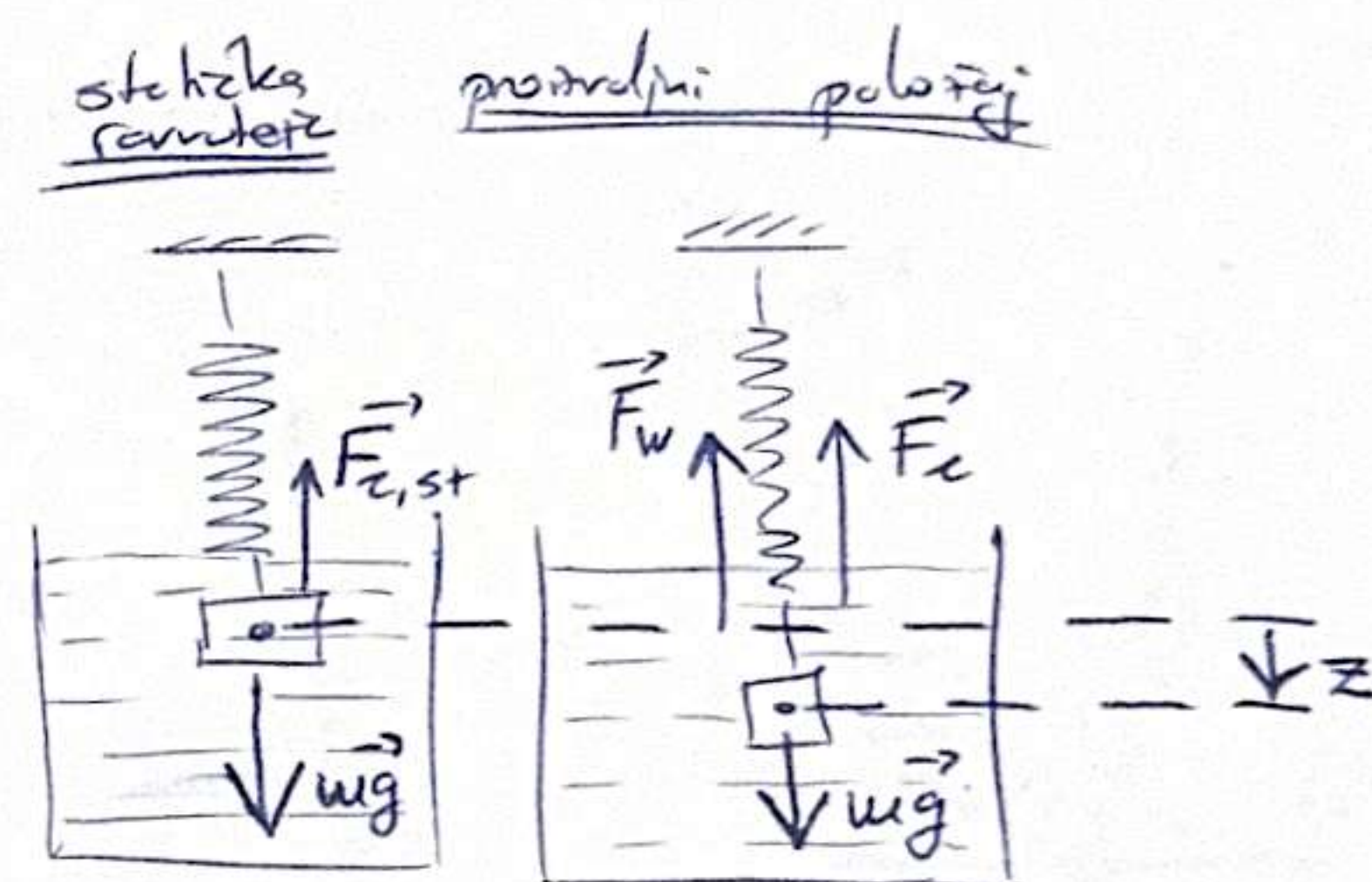
statička ravnoteža:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{e,st}$$

$z: 0 = mg - \tau - f_{st}$

proizvoljni položaj

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_w$$



$z: m\ddot{z} = mg - \tau(\frac{\tau}{mg} + z) - b\dot{z} \quad | :m$

$$\ddot{z} + \frac{b}{m}\dot{z} + \frac{\tau}{m}z = 0, \quad 2\delta = \frac{b}{m} = 0,16, \quad \omega^2 = \frac{\tau}{m} = 1$$

$$\ddot{z} + 2\delta\dot{z} + \omega^2 z = 0$$

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4\delta^2 - 4\omega^2}}{2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_{1,2} = -0,16 \pm i \cdot 0,987$$

$$z = e^{-0,16t} (C_1 \cos(0,987t) + C_2 \sin(0,987t))$$

$$\dot{z} = -0,16 e^{-0,16t} (C_1 \cos(0,987t) + C_2 \sin(0,987t)) + e^{-0,16t} \cdot 0,987 (-C_1 \sin(0,987t) + C_2 \cos(0,987t))$$

$$z(t_0) = 1 \cdot C_1 = a = 4 \quad \rightarrow \quad C_1 = 4$$

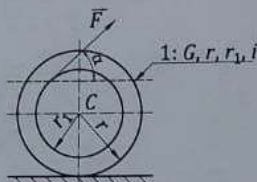
$$\dot{z}(t_0) = -0,16 \cdot C_1 + 0,987 \cdot C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = \frac{0,16 \cdot 4}{0,987} = 0,65$$

$$z(t) = e^{-0,16t} (4 \cos(0,987t) + 0,65 \sin(0,987t))$$

Mehanika 3

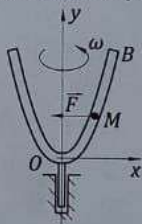
Januarski ispitni rok 2023. – grupa 1

1. Kalem težine G i poluprečnika r , dovodi se u kretanje preko lakog neistegljivog konca koji se odmotava sa njega, i koji zaklapa ugao α sa horizontalom za sve vreme kretanja. Na konac deluje konstantna sila $\vec{F}$. Odrediti brzinu centra inercije C kalema, kada se on pomeri za dužinu s . Poluprečnik inercije kalema, za osu koja prolazi kroz centar inercije C i upravna je na ravan materijalne simetrije, jednak je i . Kalem se kotrlja bez klizanja a krak otpora kotrljanju je ϵ . Poluprečnik dela kalema na koji je namotan konac iznosi r_1 . U početnom trenutku sistem se nalazio u miru.



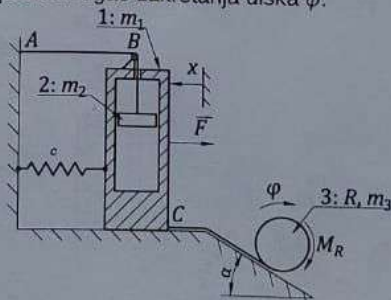
Slika uz zadatak 1.

2. Glatka tanka cev savijena u oblik parabole $y = \frac{\omega^2}{g} x^2$, obrće se oko vertikalne ose Oy ugaonom brzinom konstantnog intenziteta ω . U cevi kretanje započinje kuglica zanemarljivih dimenzija i mase m iz tačke $M_0 = O$. Na kuglicu za sve vreme kretanje deluje horizontalna sila $\vec{F}$, smer kao na slici, intenziteta proporcionalnog normalnom rastojanju kuglice od ose Oy sa koeficijentom proporcionalnosti $b = m \frac{\omega^2}{2}$. Odrediti najmanji intenzitet početne brzine v_0 koju treba saopštiti kuglici kako bi ona došla u položaj $B(\frac{g}{\omega^2}, y_B)$. Odrediti intenzitet ukupne normalne reakcije cevi u tački B za određenu početnu brzinu v_0 . Koordinatni sistem Oxy vezan je za cev.



Slika uz zadatak 2.

3. Sistem se sastoji od prizme 1 mase $m_1 = 2m$, vezane oprugom krutosti c za nepokretni zid, tega 2 mase $m_2 = m$ koji može da klizi u glatkom vertikalnom kanalu prizme 1 i diska 3 poluprečnika R i mase $m_3 = 2m$. Za teg je zakačeno lako neistegljivo uže koje je prebačeno preko lakog kotura u tački B i vezano za nepokretni zid u tački A . Pravac AB je horizontalan. U položaju $x = 0$ opruga je bila nenapregnuta. U tački C prizme 1 koja može da klizi bez trenja po glatkoj horizontalnoj podlozi, na zanemarljivom rastojanju od podloge, jednim krajem vezano je lako neistegljivo uže. Uže je drugim krajem namotano na disk 3 i bez trenja može da klizi niz strmu ravan nagibnog ugla α . Ako na prizmu 1 deluje horizontalna sila intenziteta F , smer kao na slici, a na disk 3 spreg sila momenta M_R , smer kao na slici, odrediti diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na horizontalnu koordinatu x i apsolutni ugao zakretanja diska φ .



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

januar 23

② $y = \frac{\omega^2}{g} x^2$

vertikalna ravan

$\omega = \text{const.}$

$M: m$

to: M je u O

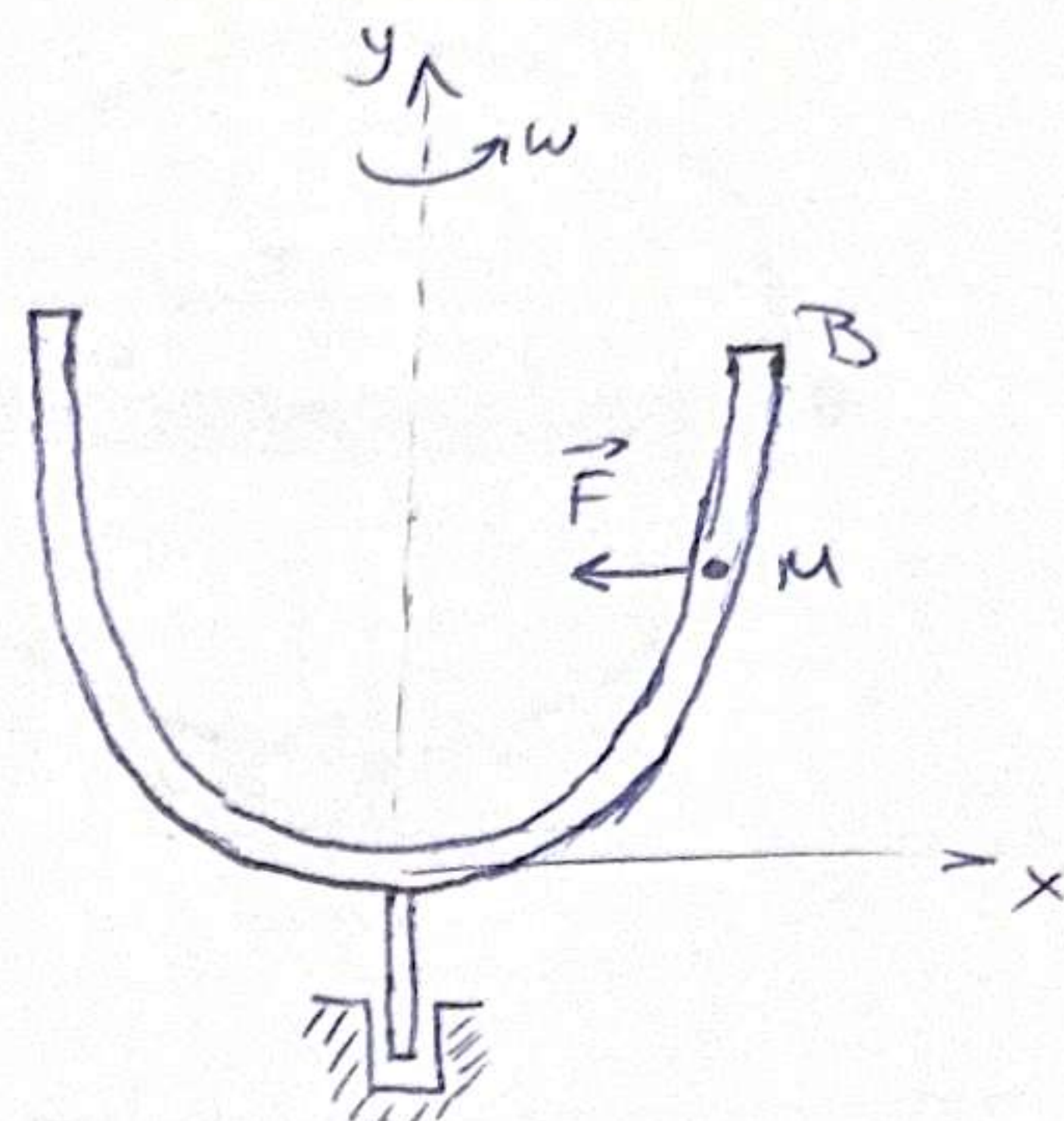
U_0

F - proporcionalna rastojanju do O_y
 konst. proporc: $G = m \frac{\omega^2}{2}$

ta: M je u $B(\frac{g}{\omega^2}, y_B)$

$U_0 = ?$

$\Delta l(t_n) = ?$



$$\vec{m}\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{cor}^m + \vec{L}_n + \vec{L}_G$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

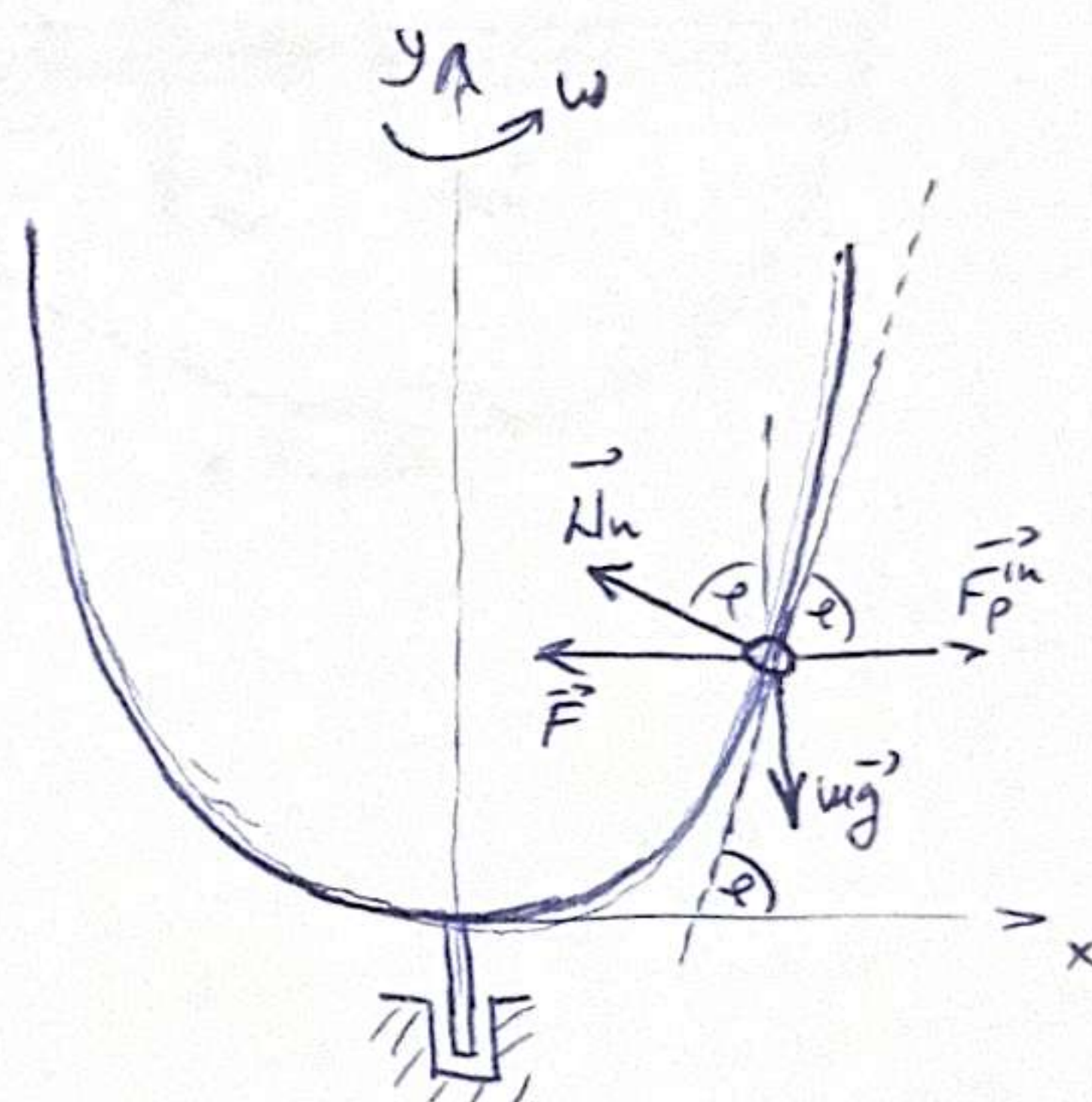
$$\vec{F} = G \cdot x \cdot (-\vec{i}) = \frac{1}{2} m \omega^2 x \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\vec{g}_{\text{rel}} + \vec{v} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m \omega^2 x \cdot (\vec{i})$$

$$\vec{F}_{cor}^m = -2m \vec{\omega} \times \vec{v} = 2m \omega \cdot \dot{x} \cdot (\vec{k})$$

$$\vec{L}_n = L_n \cdot (\vec{n})$$

$$\vec{L}_G = L_G \cdot (-\vec{k})$$



$$\vec{T}_B - T_0 = A_{OB}$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m U_0^2$$

$$T_B = 0$$

$$A_{OB} = \int_0^{y_B} -mg dy + \int_0^{x_B} -F dx + \int_0^{x_B} F_p^m dx =$$

$$A_{OB} = -mg y_B + \int_0^{\frac{g}{\omega^2}} -\frac{1}{2} m \omega^2 x dx + \int_0^{\frac{g}{\omega^2}} m \omega^2 x dx =$$

$$A_{OB} = -mg \frac{\omega^2}{g} \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 + \int_0^{\frac{g}{\omega^2}} \frac{1}{2} m \omega^2 x dx =$$

$$A_{OB} = -\frac{mg^2}{\omega^2} + \frac{1}{4} m \omega^2 \left(\frac{g}{\omega^2}\right)^2 =$$

$$A_{OB} = -\frac{mg^2}{\omega^2} + \frac{1}{4} \frac{mg^2}{\omega^2} = -\frac{3}{4} \frac{mg^2}{\omega^2}$$

$$0 - \frac{1}{2} m U_0^2 = -\frac{3}{4} \frac{mg^2}{\omega^2}$$

$$U_0^2 = \frac{3}{2} \frac{g^2}{\omega^2}$$

$$n: m \frac{U_0^2}{R_k} = -mg \cos \varphi + F \sin \varphi - F_p^m \sin \varphi + L_n$$

postavimo ta: $U_{OB} = 0$

$$0 = -mg \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_B \sin \varphi_1 - m \omega^2 x_B \sin \varphi_1 + L_n$$

$$L_n = mg \cos \varphi_1 + \frac{1}{2} m \omega^2 x_B \sin \varphi_1, \quad \sin \varphi_1 = ?, \quad \cos \varphi_1 = ?$$

$$\tan \varphi = y' = \frac{\omega^2}{g} \cdot 2x, \quad \tan \varphi_1 = \frac{\omega^2}{g} \cdot 2 \cdot \frac{g}{\omega^2} = 2$$

$$\sin \varphi_1 = \frac{\tan \varphi_1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos \varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \varphi_1}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$L_n = mg \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{2} m \omega^2 \frac{g}{\omega^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{mg}{\sqrt{5}} + \frac{mg}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} mg$$

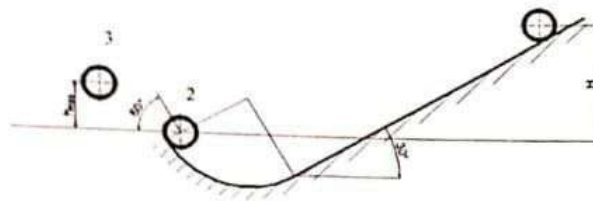
$$z: 0 = F_{cor}^m - L_G \Rightarrow L_G = F_{cor}^m = 2\omega \cdot \omega x$$

$$\text{postavimo ta: } U_{OB} = 0 \rightarrow \dot{x}_B = 0 \rightarrow L_G = 0$$

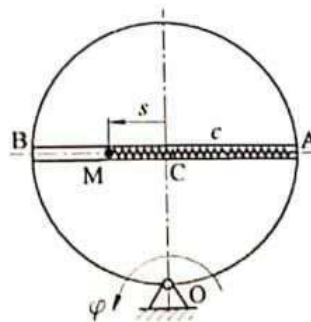
$$\Rightarrow \boxed{L_{n1} = L_{G1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} mg}$$

Mehanika 3, jul 2021.

1. Koaksijalni disk mase m , spoljašnjeg poluprečnika R i poluprečnika inercije za svoju glavnu centralnu osu inercije $I = 2R^2$ započinje kretanje iz položaja "1" prikazanog na slici iz stanja mirovanja. Prsten se kotrlja bez klizanja po neposkretnoj podlozi. U položaju "2" prsten napušta podlogu kao na slici. Odrediti maksimalnu visinu (položaj "3") koju će dostići centar mase prstena nakon napuštanja veze. $H = 5R$.

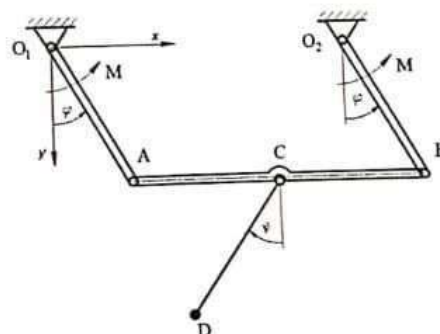


2. Sistem prikazan na slici čine: disk poluprečnika R koji može da se okreće u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose Oz po poznatom zakonu $\varphi = 2t$ i materijalna tačka M koja se kreće unutar glatkog kanala AB . Tačka M , mase m je vezana oprugom krutosti $c = 8m$ za tačku A diska. Dužina nenapregnute opruge jednaka je poluprečniku diska. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tačke M ($s(t) = ?$) ako je u početnom trenutku opruga bila nenapregnuta, a tačka M imala relativnu brzinu $\dot{s}_0 = 1$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.



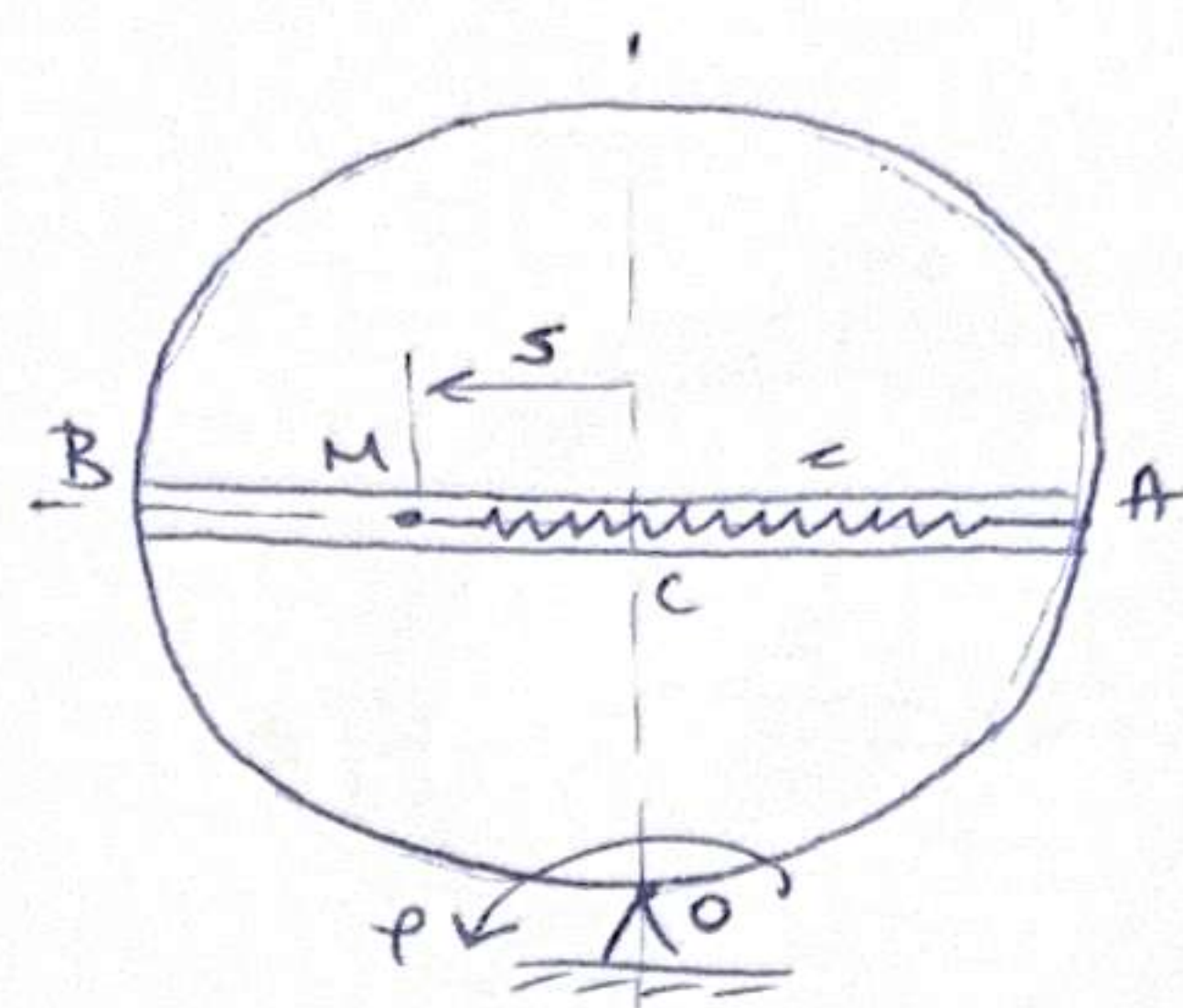
CS CamScanner

3. Sistem prikazan na slici sastoji se od štapova O_1A , O_2B , AB , CD i materijalne tačke D i može da se kreće u vertikalnoj ravni. Veze u tačkama O_1 , O_2 , A , B i C su zglobne. Poznate su dužine štapova $O_1A = O_2B = CD = l$, i $AB = 2l$ i $AC = CB$. Štap O_1A je mase $3m$, O_2B je mase $3m$, AB je mase $2m$ i tačka D je mase $2m$. Masu štapa CD možemo zanemariti. Na štapove O_1A i O_2B dejstvuju spregovi sila momenata M kao na slici. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema s obzirom na generalisane koordinate φ i ψ .



Jul 21

- ② disk: R
 horizontalna ravnina
 $\varphi = 2t$
 $M: m$
 opruga: $\tau = 8m$
 $\ell_0 = R$



$s(t) = ?$

$t_0: s_0 = 0, \dot{s}_0 = 1$

$$\varphi = 2t \rightarrow \dot{\varphi} = 2 \rightarrow \ddot{\varphi} = 0$$

$$\vec{m}\vec{a}_r = \vec{m}\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{cor} + \vec{N}_h + \vec{N}_c$$

$$\vec{m}\vec{g} = m\vec{g} \cdot (\vec{k})$$

$$\vec{F}_c = \tau \cdot \Delta \ell \cdot (\vec{i}) = \tau \cdot s \cdot (\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\vec{a}_c + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) =$$

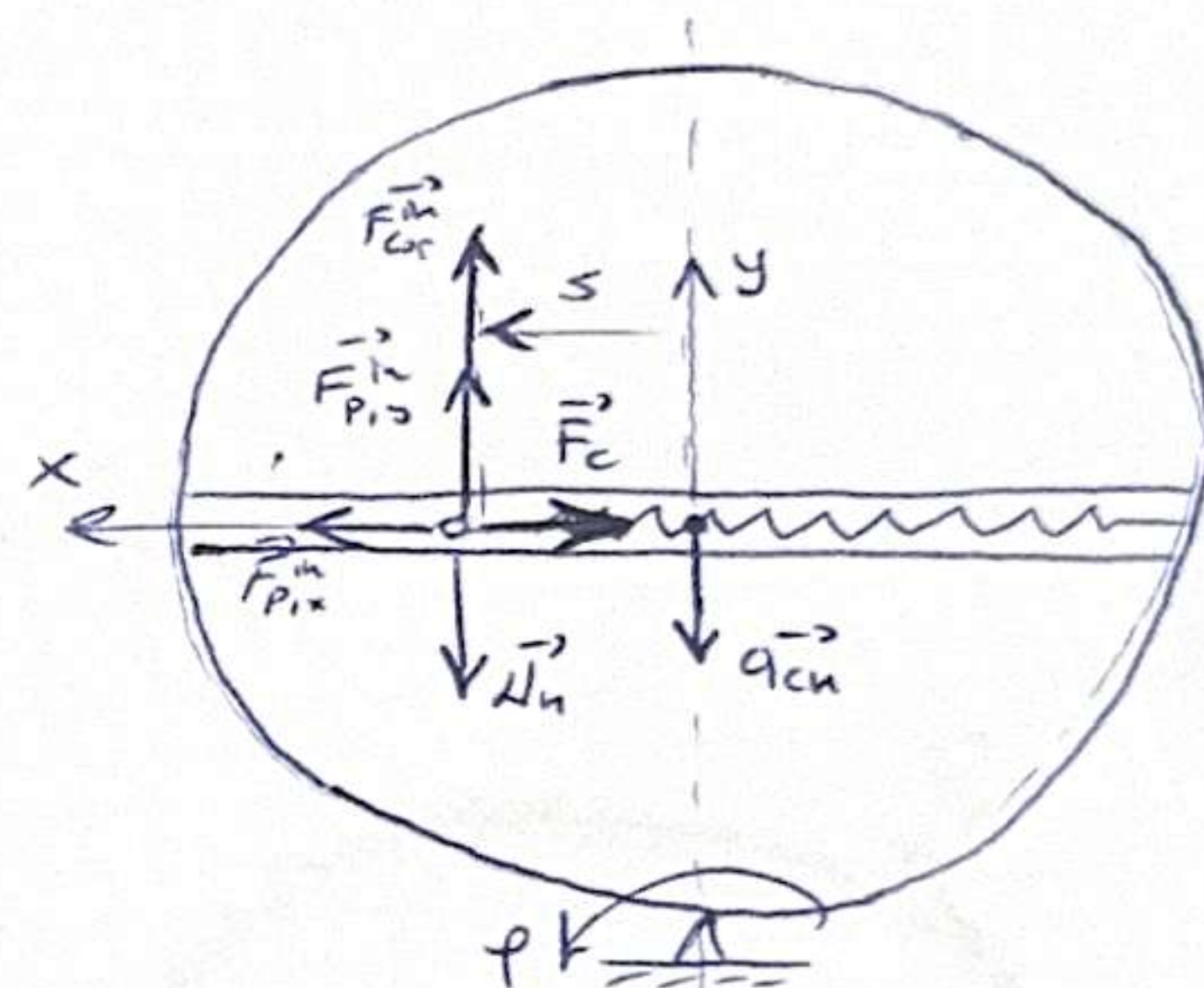
$$\vec{a}_c = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_{ct} = R\ddot{\varphi}(-\vec{j}) = 4R \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_p^m = 4mR(\vec{j}) + m\omega^2 s \cdot (\vec{i}) = \underbrace{4mR \cdot (\vec{j})}_{\vec{F}_{p,x}^m} + \underbrace{4ms \cdot (\vec{i})}_{\vec{F}_{p,y}^m}$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega \cdot \dot{s} \cdot (\vec{j})$$

$$\vec{N}_h = N_h \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{N}_c = N_c \cdot (-\vec{k})$$



$$t: m\ddot{s} = -F_c + F_{p,x}^m$$

$$m\ddot{s} = -\tau s + 4ms$$

$$m\ddot{s} = -8ms + 4ms$$

$$\ddot{s} + 4s = 0$$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm 2i$$

$$s = C_1 \cos(2t) + C_2 \sin(2t)$$

$$\dot{s} = -2C_1 \sin(2t) + 2C_2 \cos(2t)$$

$$s(t_0) = C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

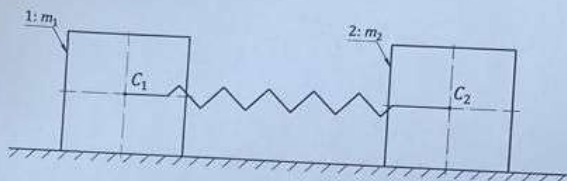
$$\dot{s}(t_0) = 2C_2 = 1 \rightarrow C_2 = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{s = \frac{1}{2} \sin(2t)}$$

Mehanika 3

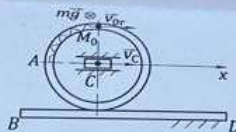
Junski ispitni rok 2023. – grupa 1

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase $m_1 = 4m$ i prizme 2 mase $m_2 = 2m$, čija su težišta spojena oprugom krutosti $c_1 = 8c$. Prizme mogu da klize bez trenja po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Odrediti pomeranje prizme 1 do trenutka kada se prizma 2 pomerila za dužinu $k/2$ udesno, ako je u početnom trenutku sistem mirovao a opruga bila sabijena za $\Delta l_0 = -k$ u odnosu na nenapregnutu dužinu. Odrediti i brzinu prizme 1 u istom trenutku.



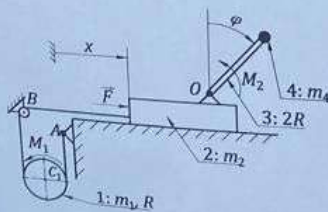
Slika uz zadatak 1.

2. Disk poluprečnika R leži u horizontalnoj ravni i svojim središtem je zglobovno vezan za klizač C , koji se kreće brzinom V_C konstantnog intenziteta u pravcu ose x . Disk se za sve vreme kretanja kotrlja bez klizanja po nepokretnom štapu BD koji je paralelan sa osom x (slika 2, pogled odozgo). U disk je urezan tanak žleb u koji je stavljena kuglica M zanemarljivih dimenzija i mase m , koja je oprugom krutosti $c = mg/R$ vezana za tačku A cevi. Vektor sile težine kuglice označen je na slici 2. Ako je u početnom trenutku opruga bila nenapregnuta a kuglici u položaju M_0 saopštena relativna brzina intenziteta $v_{r0} = \sqrt{gR}$, smeru kao na slici, odrediti položaj kuglice na relativnoj putanji u kom ona prvi put menja smer relativnog kretanja.



Slika uz zadatak 2.

3. Platforma 2 mase $m_2 = m$ može da klizi po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za platformu je u tački O zglobovno vezan laki štap 3 dužine $2R$, na čijem kraju se nalazi teg 4 mase $m_4 = m/2$ i zanemarljivih dimenzija. Za platformu je jednim krajem vezano lako neistegljivo uže koje je prebačeno preko lakog kotura u tački B i preko tankog cilindra 1 mase $m_1 = m$ i poluprečnika R , dok je drugim krajem zakačeno za nepokretni oslonac u tački A . Između cilindra 1 i užeta nema proklizavanja. Ako na cilindar 1 deluje spreg sila intenziteta $M_1 = 2mgR$, smeru kao na slici, na laki štap spreg sila intenziteta $M_2 = mgR$, smeru kao na slici, a na platformu horizontalna sila intenziteta $F = mg$, smeru kao na slici, napisati Lagranževe diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na zadate generalisane koordinate x i φ .

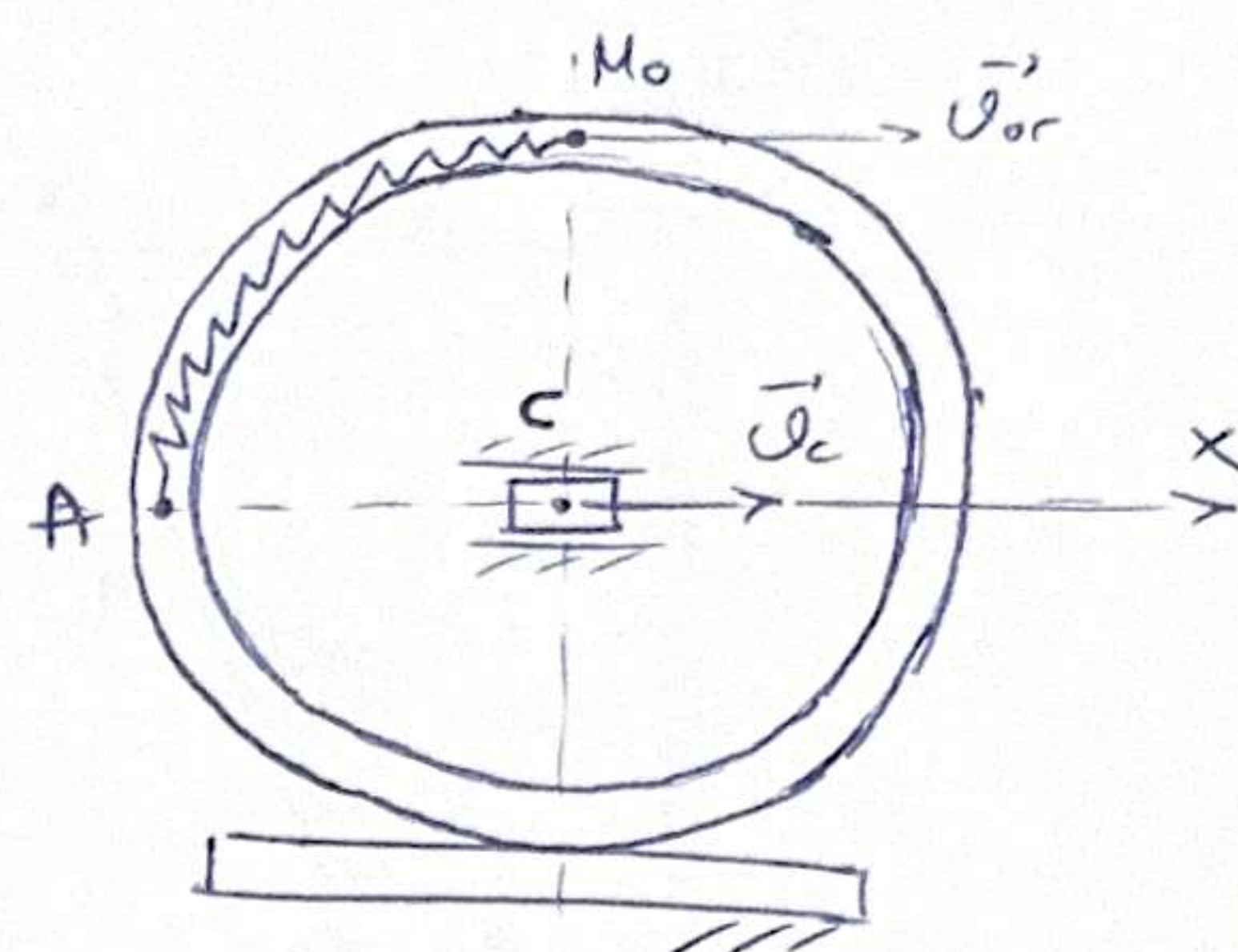


Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

jun 23

- ② horizontalna ravan
 disk: R , centar vezan za klzaci C
 C : $v_c = \text{const.}$
 M : m
 opruga: $\kappa = \frac{mg}{R}$
 t_0 : opruga neupregnuta
 $v_0 = \sqrt{gR}$
 položaj M_0
 t_1 : kuglica prvi put međa smer relativnog kretanja
 odrediti relatiivni položaj kuglice u trenutku t_1 ?



$$\vec{m}\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{cor}^m + \vec{A}_n^m + \vec{A}_c^m$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{k})$$

$$\vec{F}_c = \kappa \cdot \Delta l \cdot (-\vec{t}) = \kappa \cdot R\theta \cdot (-\vec{t})$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\vec{a}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m \cdot \omega^2 \cdot R \cdot (-\vec{n})$$

$$\vec{F}_{cor}^m = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_c = 2m\omega \cdot v_c \cdot (-\vec{n})$$

$$\vec{A}_n^m = A_n \cdot (\vec{n})$$

$$\vec{A}_c^m = A_c \cdot (\vec{k})$$

$$\vec{T}_1 - \vec{T}_0 = A_{on} \quad (\text{rel})$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} mgR$$

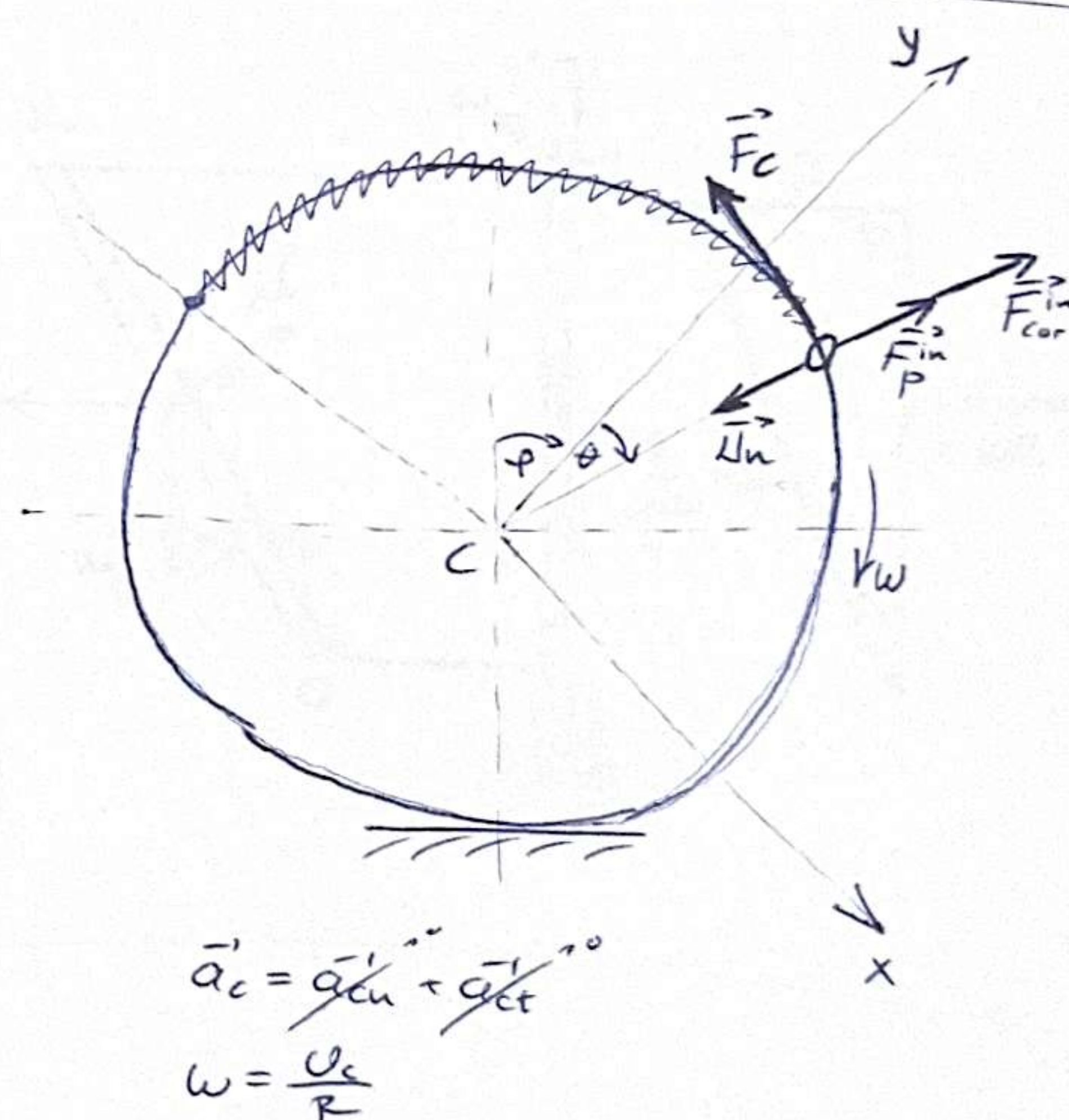
$$T_1 = 0$$

$$A_{on} = \int_{s_0}^{s_1} -F_z ds = \int_{\theta_0=0}^{\theta_1} -\kappa R\theta d(R\theta) = -\int_0^{\theta_1} \kappa R^2 \theta d\theta = -\frac{1}{2} \kappa R^2 \theta_1^2$$

$$0 - \frac{1}{2} mgR = -\frac{1}{2} \kappa R^2 \theta_1^2$$

$$\theta_1 = \sqrt{\frac{mg}{\kappa R}} = \sqrt{\frac{mg}{\frac{mg}{R} R}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\boxed{\theta_1 = 1 \text{ rad}}$$



$$\vec{a}_c = \vec{a}_{cn} + \vec{a}_{ct}$$

$$\omega = \frac{v_c}{R}$$

Mehanika 3

Izolski ispitni rok, II grupa

June 30, 2023

1. Teret 1, mase m vezan je lakim glatkim i nerastegljivim užetom koji je prebačeno preko lakog kotura 2 i drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 3 mase $2m$. Cilindar se kotrlja po nepokretnoj strmoj ravni nagiba α . Odrediti maksimalni ugao α pri kome je moguće kotrljanje cilindra bez klizanja, ako je koeficijent trenja klizanja između cilindra i strme ravni $\mu = 0.1$. Otpor kotrljanja zanemariti. Takođe zanemariti trenje u osovini kotura 2. Deo užeta između cilindra 3 i debla 2 paralelan je strmoj ravni.

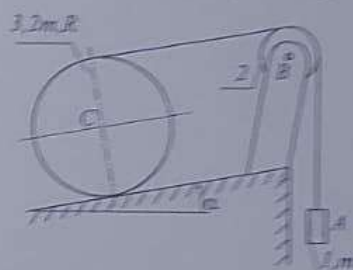


Figure 1: Slika uz zadatak 1

2. Kuglica M , mase m , zanemarljivih dimenzija može da se kreće unutar glatke cevi OK koja se okreće konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose O_1O_2 (dimenzije na slici). U početnom trenutku kuglica se nalazila u položaju O u stanju relativnog mirovanja. Odrediti intenzitet vertikalne komponente apsolutne brzine materijalne tačke u položaju K . Dato je:

$$\alpha = 30^\circ \quad \text{ i } \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{R \tan \alpha}}$$

3. Laki štap 1 dužine l zglobno je vezan krajovima A i B za klizac 3 i 4 jednakih masa m . Klizac 3 kreće se po vertikalnoj vodjici, dok se klizac 4 kreće po horizontalnoj vodjici. Za klizac 3 vezano je jednim krajem glatko, lako i nerastegljivo uže, koje je drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 2, mase M . Cilindar 2 kreće se tako da viseći deo užeta, koje se odmotava sa cilindra, stalno ostaje vertikalan. Primenom Lagranđevih jednačina druge vrste napisati diferencijalne jednačine kretanja opisnog materijalnog sistema. Generalisane koordinate su: s i φ . Sva trenja zanemariti.

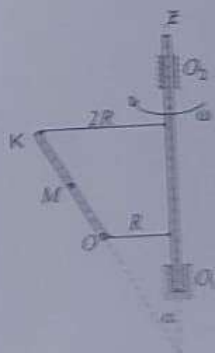


Figure 2: Slika uz zadatak 2

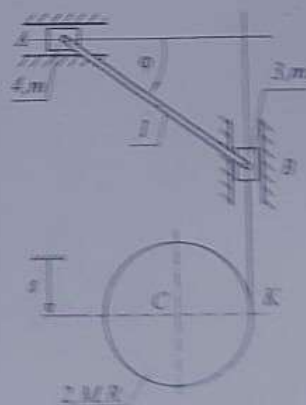


Figure 3: Slika uz zadatak 3

Iz Kabineta za Mehaniku

jul 23

2) M: m

$\omega = \text{const}$

vertikalno ravan

t_0 : M je u O

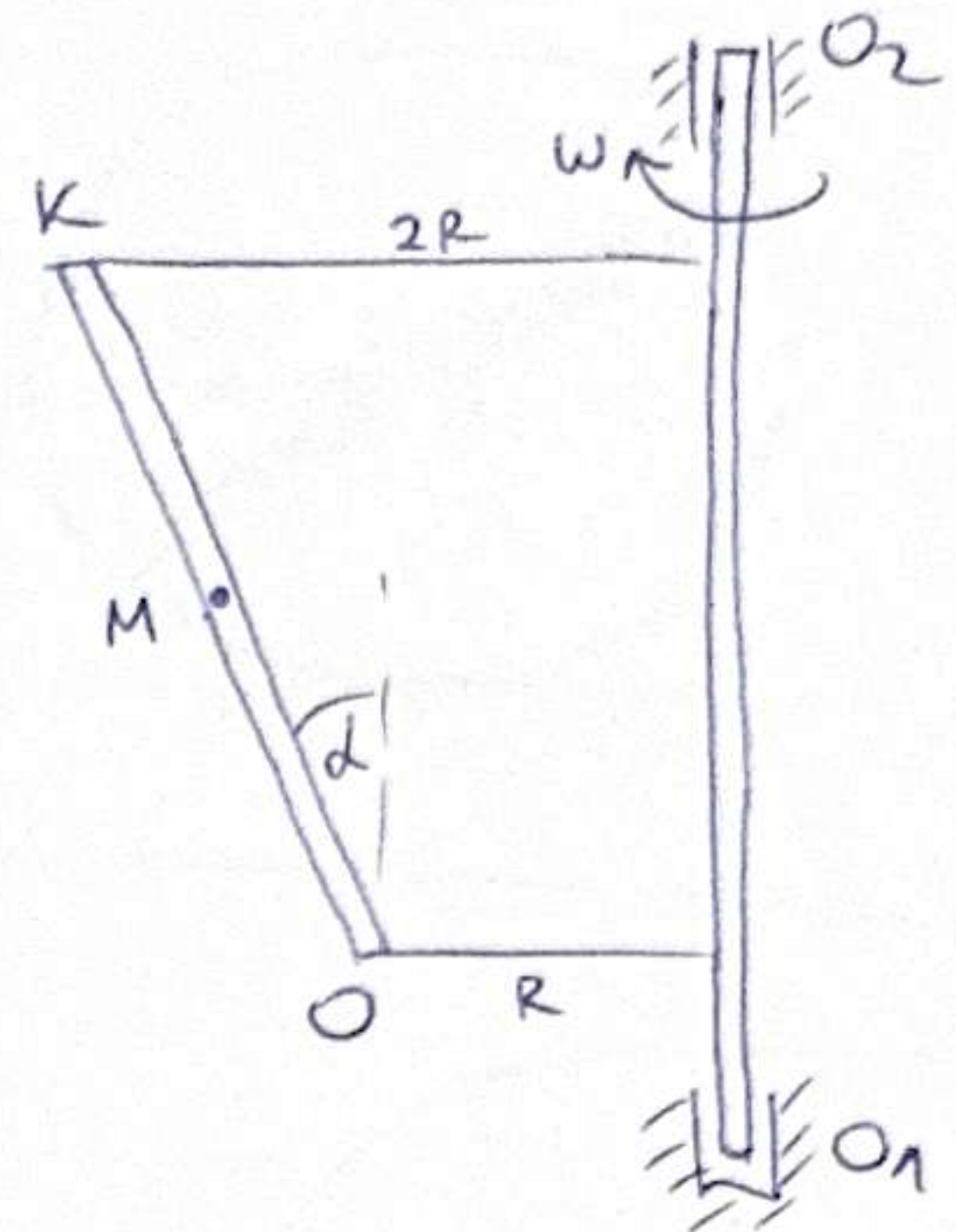
relativno mirovanje

$\alpha = 30^\circ$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R \tan \alpha}}$$

t_1 : M je u K

odrediti intenzitet vertikalne komponente
apsolutne brzine točke M u položaju K



$$\tan \alpha = \tan 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2g}{R \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{3}g}{R}}$$

$$\vec{m}\vec{a}_r = \vec{m}\vec{g} + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{cor}^m + \vec{N}_n + \vec{N}_e$$

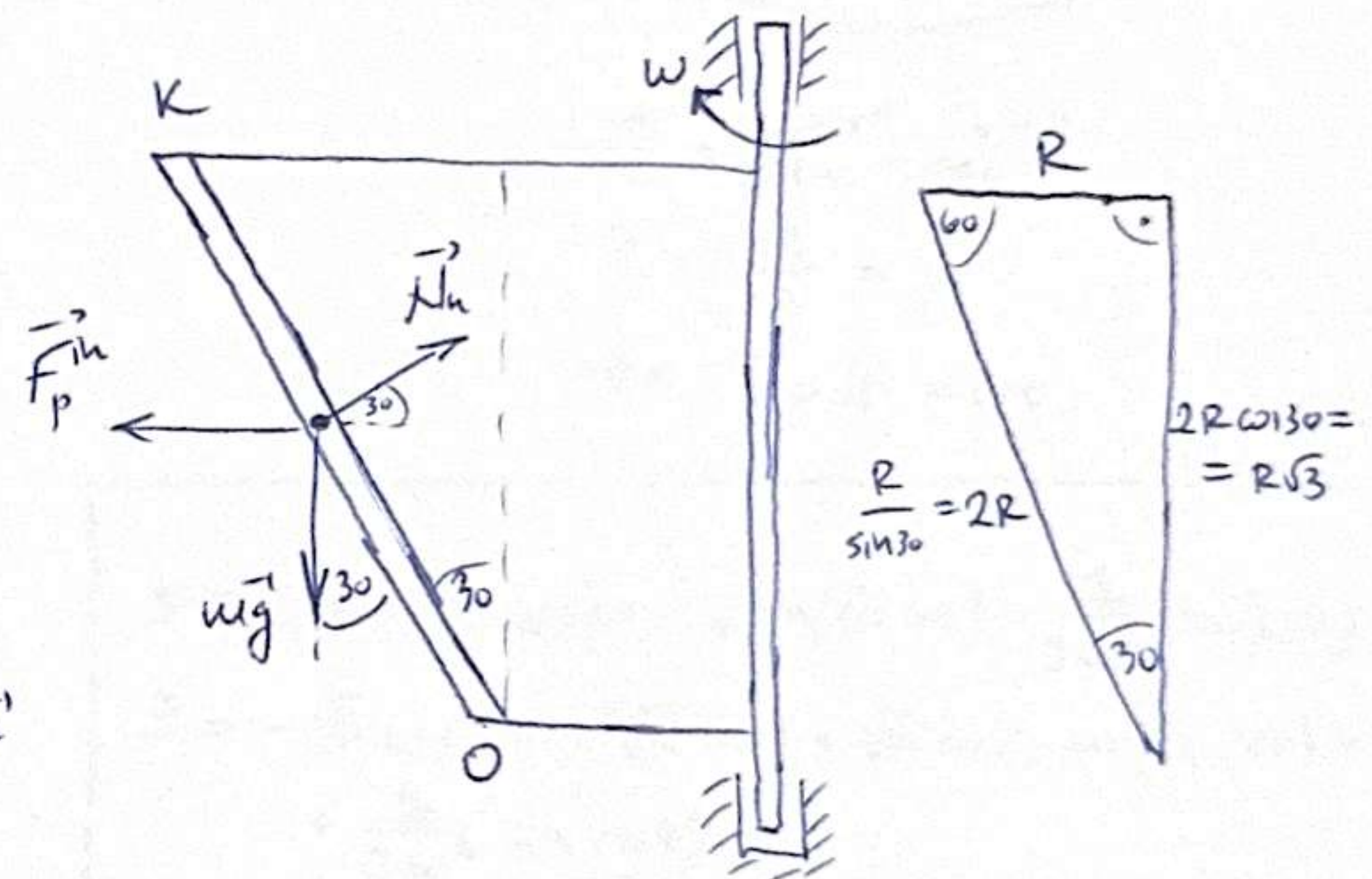
$$\vec{m}\vec{g} = m\vec{g} \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m \cdot \omega^2 x \cdot \vec{i}$$

$$\vec{F}_{cor}^m = -2m \cdot \vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega \dot{x} \cdot (-\vec{k})$$

$$\vec{N}_n = N_n \cdot \vec{n}$$

$$\vec{N}_e = N_e \cdot \vec{k}$$



$$T_K - T_0 = A_{ok} \quad (\text{rel})$$

$$T_0 = 0$$

$$T_K = \frac{1}{2} m v_{rk}^2$$

$$A_{ok} = \int_0^{R\sqrt{3}} -mg dy + \int_R^{2R} F_p^m dx = -mgR\sqrt{3} + \int_R^{2R} m\omega^2 x dx = -mgR\sqrt{3} + \frac{1}{2} m \omega^2 (4R^2 - R^2) =$$

$$A_{ok} = -mgR\sqrt{3} + \frac{3}{2} m \frac{2\sqrt{3}g}{R} R^2 = mgR(-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} mgR$$

$$\frac{1}{2} m v_{rk}^2 - 0 = 2\sqrt{3} mgR$$

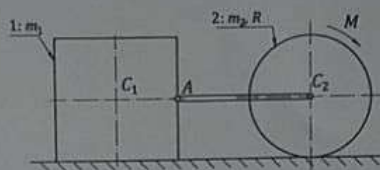
$$v_{rk} = \sqrt{4\sqrt{3}gR} = 2\sqrt{\sqrt{3}gR}$$

$$v_{yrk} = v_{rk} \cdot \cos 30^\circ = 2\sqrt{\sqrt{3}gR} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$$

$$v_{yrk} = \sqrt{3\sqrt{3}gR}$$

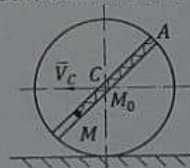
Mehanika 3
Februarski ispitni rok – grupa 2

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase m_1 i diska 2 mase $m_2 = 2m$ i poluprečnika R , na koji deluje spreg sila momenta $M = mgR$. Centar C_2 diska vezan je lakim štapom za tačku A prizme. Veze u tačkama A i C_2 su zglobove. Prizma može da klizi po horizontalnoj nepokretnoj podlozi sa koeficijentom trenja klizanja $\mu_1 = 1/4$. Ako je koeficijent trenja klizanja između diska i podloge $\mu_2 = 1/2$, odrediti najveću moguću vrednost mase m_1 prizme 1 pri kojoj neće doći do proklizavanja diska 2. Otpor trenja kotrljanja diska zanemariti.



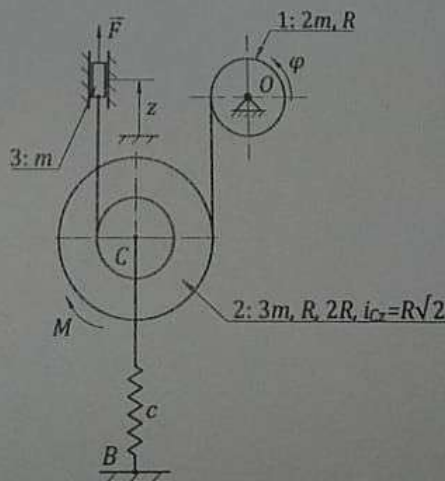
Slika uz zadatak 1.

2. Disk poluprečnika R , kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj podlozi tako da mu je brzina središta konstantnog intenziteta $V_C = R\omega$. Na disku je urezan žleb po kome se kreće tačka M , mase m . Tačka M je oprugom krutosti $c = 10m\omega^2$ vezana za kraj A žleba. U početnom trenutku žleb je bio horizontalan i tačka je relativno mirovala u centru diska pri čemu je opruga tada bila nenapregnuta. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tačke po žlebu u odnosu na početni položaj i reakciju veze između žleba i tačke u zavisnosti od vremena.



Slika uz zadatak 2.

3. Homogeni disk 1 mase $2m$ i poluprečnika R može da se obrće oko središnje horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O . Lako neistegljivo uže namotano je jednim krajem na disk 1, a drugim krajem na veći disk koaksijalnog kotura 2. Na manji disk koaksijalnog kotura namotano je drugo lako neistegljivo uže, koje je vezano za klizač 3 mase m , na koji deluje konstantna vertikalna sila $\vec{F}$, intenziteta $F = 6mg$. Koaksijalni kotur 2 ima masu $3m$, poluprečnike diskova R i $2R$ i poluprečnik inercije, u odnosu na horizontalnu osu Cz , $I_{Cz} = R\sqrt{2}$. Na kotur deluje spreg sila momenta M , a za njegov centar C vezana je vertikalna opruga krutosti $c = 27mg/R$. U početnom trenutku ($z(0) = 0, \varphi(0) = 0$), kada je sistem mirovao, opruga je bila nenapregnuta. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema po generalisanim koordinatama z i φ .



Slika uz zadatak 3.

februar 24

② vertikalna rovan

disk: R

$$U_c = R\omega$$

M: m

opruga: $\kappa = 10 m \omega^2$

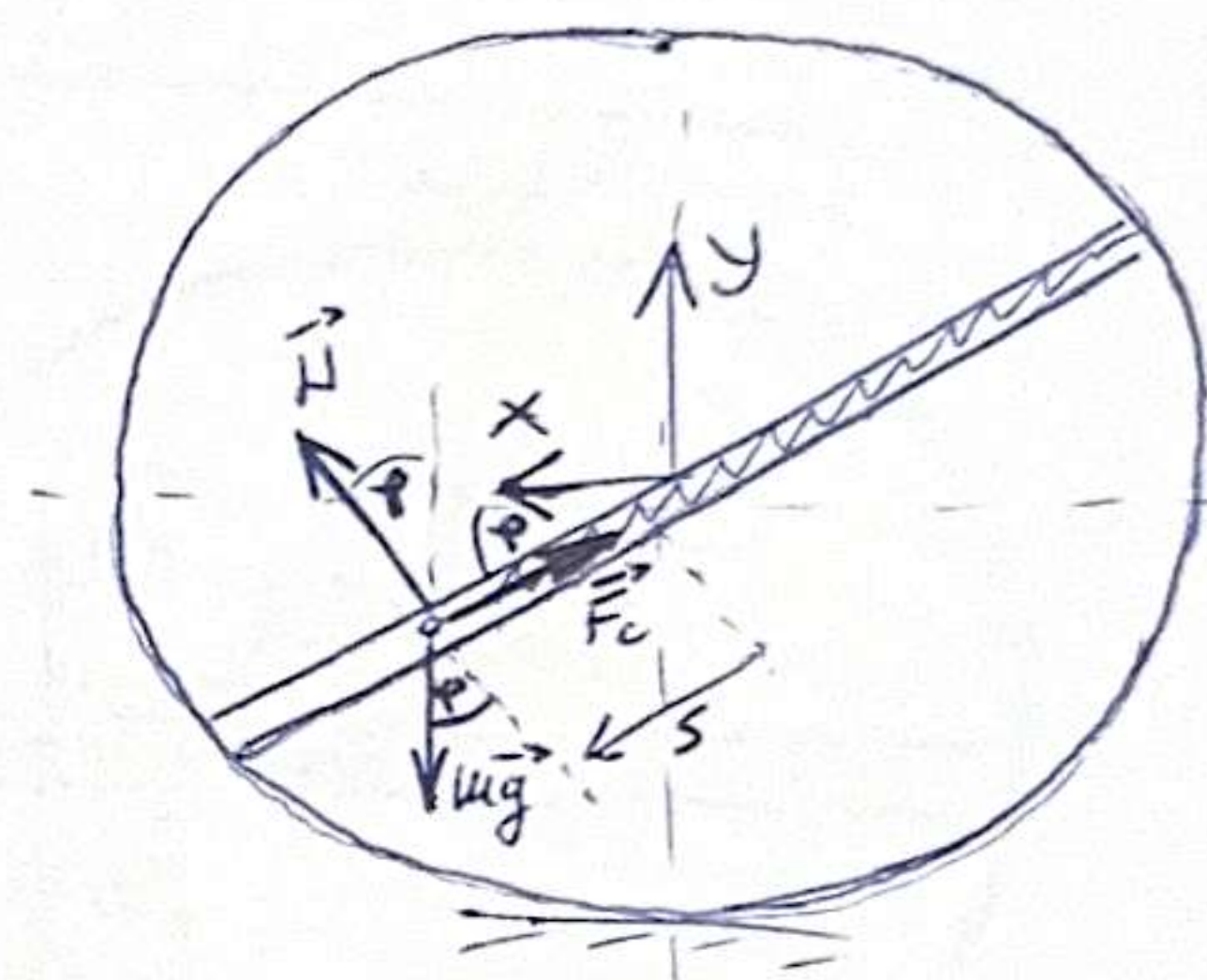
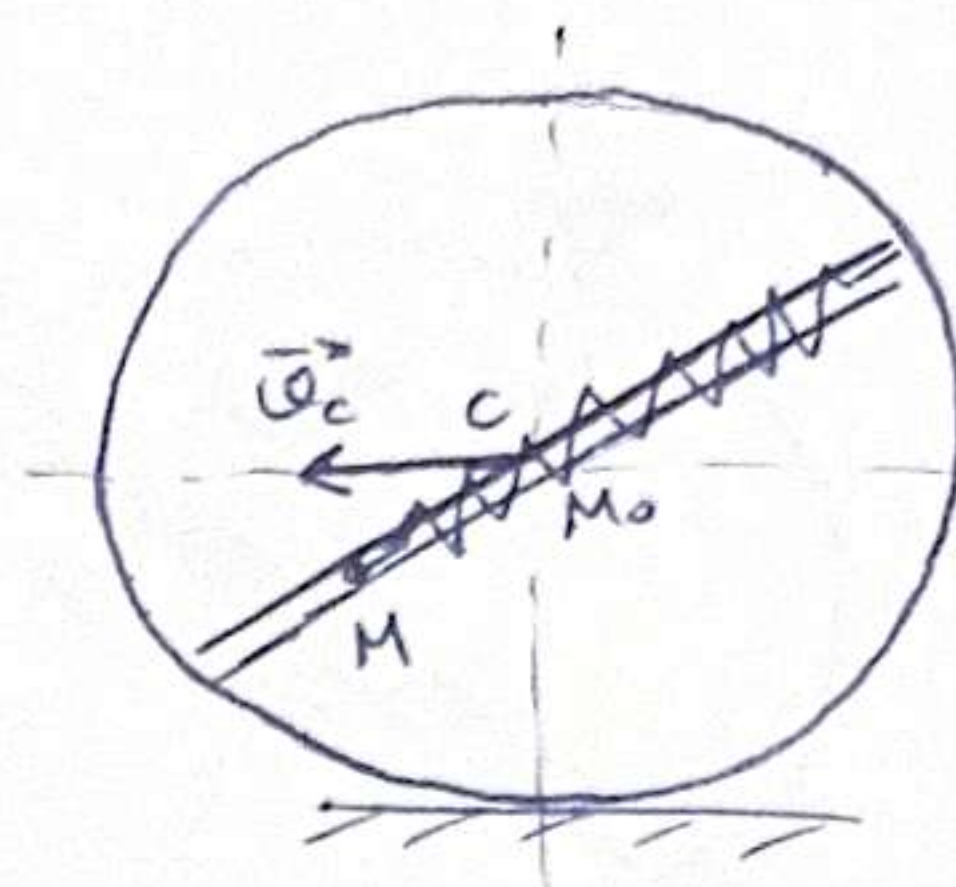
to: žlebov horizontalan

$$U_0 = 0$$

M v C

opruga nenapregnuta

j-ina relativnog kretanja tačke po žlebu?
 $x(t) = ?$



Translaciono pokretni koordinatni sistem
(nije vezan za telo, tj. ne rotira se)

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p + \vec{F}_{cor} + \vec{N}_n + \vec{N}_c$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_c = \kappa \cdot \Delta l \cdot (-\vec{r}) = \kappa \cdot s \cdot (-\vec{r})$$

$$\vec{F}_p = -m(\vec{g}_{ct} + \vec{E} \times \vec{v} + \omega \times (\vec{v} \times \vec{r})) = 0$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v} = 0$$

$$\vec{N}_n = N \cdot (\vec{n}) = \vec{N}$$

$$t: m\ddot{s} = mg \sin \varphi - \kappa s$$

$$m\ddot{s} = mg \sin(\omega t) - 10 m \omega^2 s$$

$$\ddot{s} + 10 \omega^2 s = g \sin(\omega t), \quad \omega_1^2 = 10 \omega^2, \quad h_1 = g, \quad (\omega_1 = \sqrt{10} \omega), \quad \Omega_1 = \omega$$

$$\ddot{s} + \omega_1^2 s = h_1 \sin(\Omega_1 t)$$

$$\# : \lambda^2 + \omega_1^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \omega_1 = 0 \pm i \cdot \sqrt{10} \omega \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = \sqrt{10} \omega \end{matrix} \right)$$

$$s_h = C_1 \cos(\sqrt{10} \omega t) + C_2 \sin(\sqrt{10} \omega t)$$

$$p: \phi(t) = e^{0t} (0 \cos \Omega_1 t + h_1 \sin \Omega_1 t) \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = \Omega_1 = \omega \end{matrix} \right)$$

$$s_p = t^0 e^{0t} (A \cos \Omega_1 t + B \sin \Omega_1 t)$$

$$\ddot{s}_p = -\Omega_1^2 (A \cos \Omega_1 t + B \sin \Omega_1 t)$$

$$\cos(\Omega_1 t) (-\Omega_1^2 A + \omega^2 A) + \sin(\Omega_1 t) (-\Omega_1^2 B + \omega^2 B) = 0 \cos(\Omega_1 t) + h_1 \sin(\Omega_1 t)$$

$$\rightarrow A = 0, \quad B = \frac{h_1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} = \frac{g}{10 \omega^2 - \omega^2} = \frac{g}{9 \omega^2}$$

$$s_p = \frac{g}{9 \omega^2} \sin \omega t$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_{cu} + \vec{a}_{ct}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{U_c}{R} = \omega$$

$$\varphi = \int \omega dt = \omega t$$

$$s = C_1 \cos(\sqrt{10} \omega t) + C_2 \sin(\sqrt{10} \omega t) + \frac{g}{9 \omega^2} \sin(\omega t)$$

$$\dot{s} = -\sqrt{10} \omega C_1 \sin(\sqrt{10} \omega t) + \sqrt{10} \omega C_2 \cos(\sqrt{10} \omega t) + \frac{g}{9 \omega} \cos(\omega t)$$

$$s(t_0) = C_1 + \frac{g}{9 \omega^2} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{g}{9 \omega^2}$$

$$\dot{s}(t_0) = \sqrt{10} \omega C_2 + \frac{g}{9 \omega} = 0 \rightarrow C_2 = \frac{g}{9 \sqrt{10} \omega^2}$$

$$s = \frac{g}{9 \omega^2} \left(-\cos(\sqrt{10} \omega t) + \frac{\sqrt{10}}{10} \sin(\sqrt{10} \omega t) + \sin(\omega t) \right)$$

$$n: 0 = -mg \cos \varphi + N$$

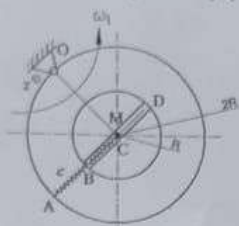
$$N = mg \cos(\omega t)$$

МЕХАНИКА 3

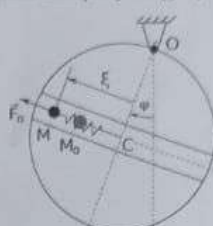
Јануарски испитни рок, 19. Јануар 2024. године.

Друга група

1. Тело које се састоји од два круто спојена коаксијална диска полупречника R и $2R$, укупне масе m и полупречника инерције $i_0 = 3R$ може да се обрће око вертикалне осе Ox управне на раван цртежа. По каналу BD креће се тачка M масе m , која је опрутом крутости c везана за тачку A плоче. У почетном тренутку, када се тачка M налазила у положају D систем је мировао. Одредити угаону брзину плоче ω_1 у тренутку t_1 када тачка M стигне у тачку C (положај приказан на слици 1). Везе наметнуте систему су наслане, а дужина ненапрегнуте опруте је R .

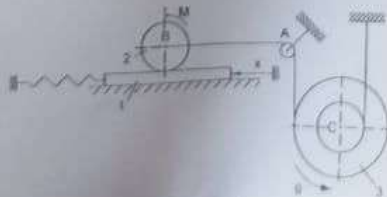


Слика 1



Слика 2

2. На слици 2 приказан је диск полупречника R који може да се обрће око вертикалне осе Ox , управне на раван цртежа, по закону $\varphi = \alpha t$, $\alpha = \text{const}$. Дуж централне осе диска је урезан жлеб по коме може да се креће тачка M масе m . Тачка M је везана опрутом крутости c , чији је други крај везан за центар диска C . На тачку M , такође, дејствује сила F_0 , интензитета $F_0 = \beta \sin(\Omega t + \gamma)$; (β, γ и Ω су константе), правца и смера приказаног на слици. У почетном тренутку тачка M је мирovala на растојању $\overline{CM}_0 = l$, а опрута је била ненапрегнута. Одредити коначну јединичну релативну кретања материјалне тачке, као и укупну реакцију жлеба на тачку M у произвољном тренутку, ако је $\sqrt{(c - m\alpha^2)/m} = \Omega$.
3. Механички систем налази се у вертикалној равни и састоји се од платформе 1 масе $2m$, хомогеног диска 2 масе m и полупречника R , и коаксијалног цилиндра 3 масе m и полупречника R и $2R$. Полупречник инерције цилиндра за осу управну на раван цртежа, а која пролази кроз средиште маса C , износи $i_C = \sqrt{2}R$. Тачка C за све време кретања задржава вертикалан правец. Диск 2 може да се котрља без клизања по платформи 1, која може да клизи без трења по хоризонталној подлози. Платформа је везана опрутом крутости c , чији је други крај везан за непокретни зид. Систем је спојен неистегљивим ужадима занемарљиве масе као што је приказано на слици 3. Масу котура A занемарити. На диск 2 дејствује спрег сила момента интензитета M у назначеном смеру. За дате генералисане координате (θ, x) одредити диференцијалне једначине кретања материјалног система. Опрута је ненапрегнута у положају $x = 0$.



Слика 3

januar 24

② disk: R

horizontalna ravan

$$\varphi = \alpha t$$

$$M: m$$

opruga: c

$$F_{\Omega} = \beta \sin(\Omega t + \varphi)$$

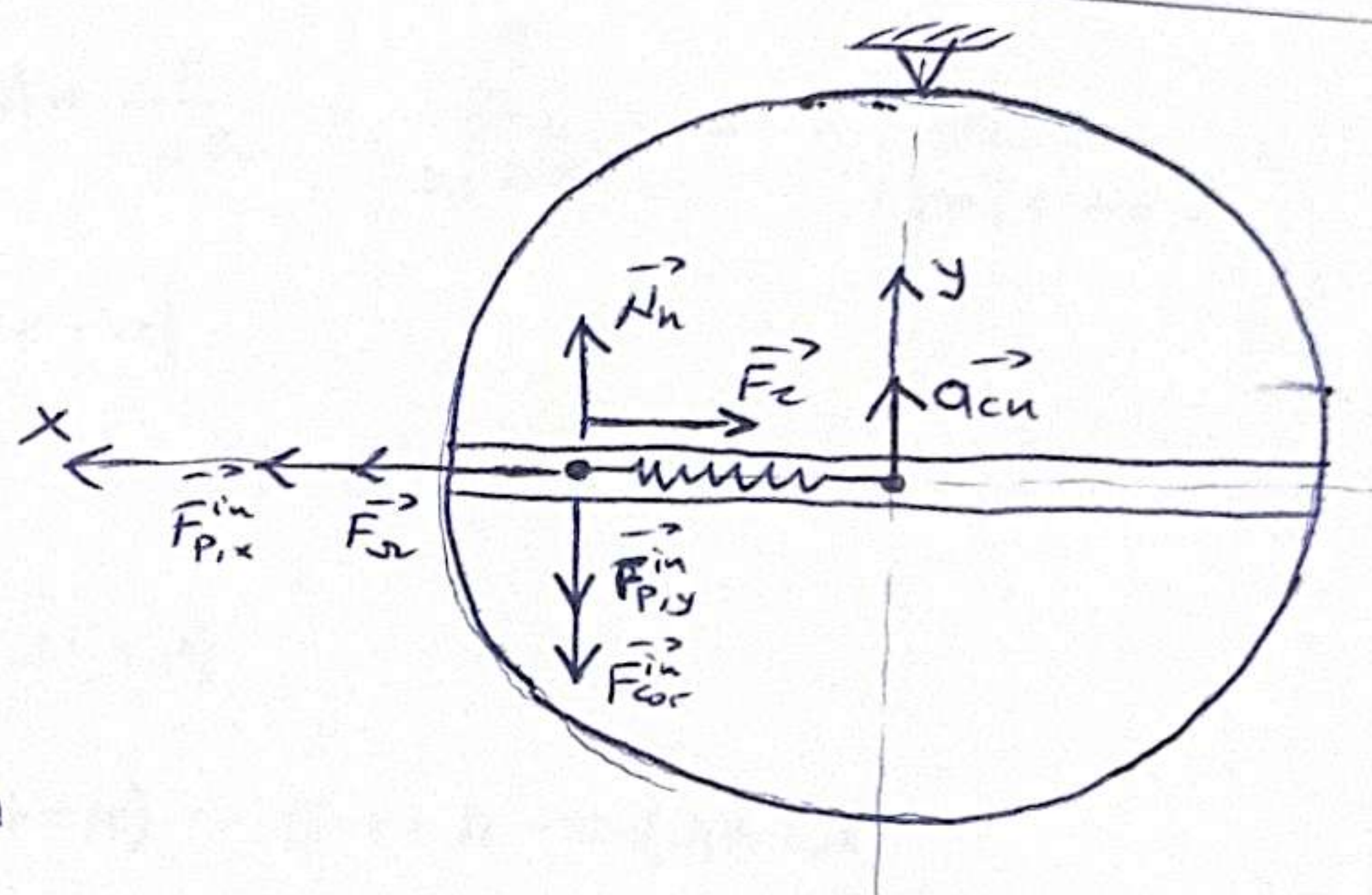
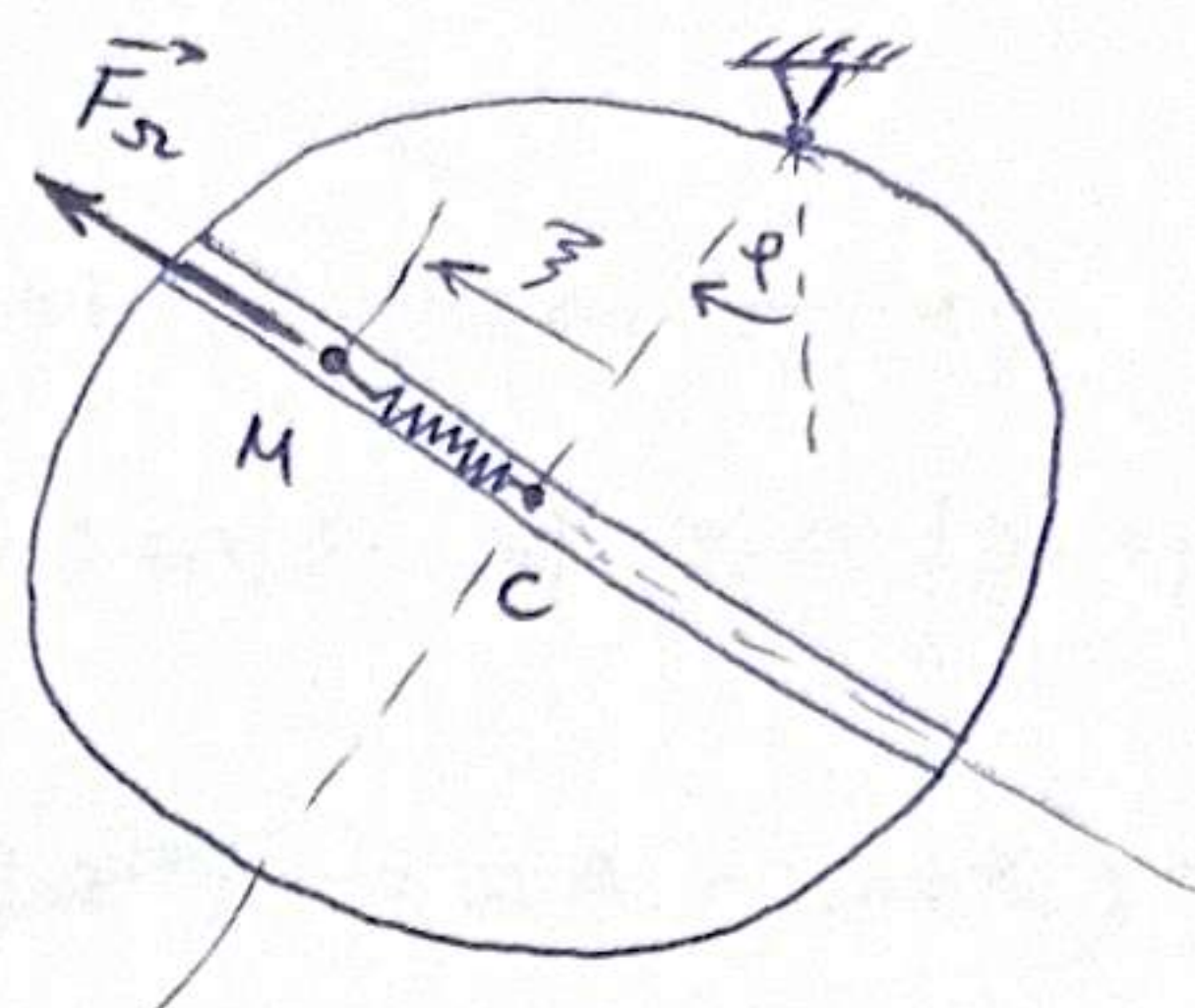
to: M je mirovala

$$\vec{CM}_0 = e$$

opruga neupregnjuta

$$\vec{z}(t) = ? , \quad x(t) = ?$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{c - m\alpha^2}{m}}$$



$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_{\Omega} + \vec{F}_p^{\text{in}} + \vec{F}_{\text{cor}} + \vec{N}_n + \vec{N}_g$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{k})$$

$$\vec{F}_c = c \cdot \Delta l \cdot (-\vec{i}) = c \cdot (\vec{z} - e) \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_{\Omega} = \beta \cdot \sin(\Omega t + \varphi) (\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^{\text{in}} = -m(\vec{a}_c + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_{cm} + \vec{a}_{ct} = \dot{\varphi}^2 R \cdot (\vec{j}) = \alpha^2 R \cdot (\vec{j})$$

$$\vec{F}_p^{\text{in}} = m\alpha^2 R(-\vec{j}) + m\alpha^2 \vec{z} \cdot (\vec{i}) = \vec{F}_{p,y}^{\text{in}} + \vec{F}_{p,x}^{\text{in}}$$

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\alpha \cdot \vec{z} \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{N}_n = N_n \cdot (\vec{j})$$

$$\vec{N}_g = N_g \cdot (\vec{k})$$

$$\vec{z}: m\ddot{\vec{z}} = -\vec{F}_c + \vec{F}_{\Omega} + \vec{F}_{p,x}^{\text{in}}$$

$$m\ddot{\vec{z}} = -c(\vec{z} - e) + \beta \sin(\Omega t + \varphi) + m\alpha^2 \vec{z} \quad | : m$$

$$\ddot{\vec{z}} + \left(\frac{c}{m} - \alpha^2\right)\vec{z} = \frac{c}{m}e + \frac{\beta}{m}\sin(\Omega t + \varphi)$$

signa je $\frac{c - m\alpha^2}{m} > 0$ jer je $\Omega = \sqrt{\frac{c - m\alpha^2}{m}}$
(sto obezbavuje oscilatorno kretanje)

$$\omega^2 = \frac{c - m\alpha^2}{m}, \quad \omega = \sqrt{\frac{c - m\alpha^2}{m}}, \quad h_1 = \frac{ce}{m}, \quad h_2 = \frac{\beta}{m}$$

$$\ddot{\vec{z}} + \omega^2 \vec{z} = h_1 + h_2 \sin(\Omega t + \varphi)$$

$$H: \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i\omega = 0 \pm i \cdot \sqrt{\frac{c - m\alpha^2}{m}} \\ (\alpha = 0, \beta = \sqrt{\frac{c - m\alpha^2}{m}})$$

$$\vec{z}_h = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c - m\alpha^2}{m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{c - m\alpha^2}{m}} t\right)$$

$$P_1: \vec{z}_p(t) = e^{0t} (h_1 \cos(\omega t) + 0 \sin(\omega t)) \quad \left(\begin{matrix} \alpha=0 \\ \varphi=0 \end{matrix}\right)$$

$$\vec{z}_{p1} = t^0 e^{0t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = A, \quad \ddot{\vec{z}}_{p1} = 0$$

$$0 + \omega^2 A = h_1 \rightarrow A = \frac{h_1}{\omega^2} = \frac{ce}{\frac{c - m\alpha^2}{m}} = \frac{ce}{c - m\alpha^2}$$

$$\vec{z}_{p1} = \frac{ce}{c - m\alpha^2} = D \quad (\text{da otkrijemo zapis})$$

$$P2: \quad \zeta_2(t) = e^{\omega t} (0 \cos(\Omega t + \mu) + h_2 \sin(\Omega t + \mu)) \quad \left(\begin{array}{l} a=0 \\ b=\Omega = \sqrt{\frac{\epsilon - \omega d^2}{\omega}} \end{array} \right) \Rightarrow \text{rezonanca}$$

$$\zeta_{p2} = t^1 e^{\omega t} (A \cos(\Omega t + \mu) + B \sin(\Omega t + \mu))$$

$$\dot{\zeta}_{p2} = A \cos(\Omega t + \mu) + B \sin(\Omega t + \mu) + t \Omega (-A \sin(\Omega t + \mu) + B \cos(\Omega t + \mu))$$

$$\ddot{\zeta}_{p2} = \Omega (-A \sin(\Omega t + \mu) + B \cos(\Omega t + \mu)) \cdot 2 + t \Omega^2 (-A \cos(\Omega t + \mu) - B \sin(\Omega t + \mu))$$

$$\cos(\Omega t + \mu) (-t \Omega^2 A + 2 \Omega B + \omega^2 t A) + \sin(\Omega t + \mu) (-t \Omega^2 B - 2 \Omega A + \omega^2 t B) = 0 \cos(\Omega t + \mu) + h_2 \sin(\Omega t + \mu)$$

$$\Rightarrow B=0, \quad -2 \Omega A = h_2 \quad \rightarrow \quad A = \frac{h_2}{-2 \Omega} = \frac{\frac{\beta}{\omega}}{-2 \sqrt{\frac{\epsilon - \omega d^2}{\omega}}} = - \frac{\beta}{2 \sqrt{\omega(\epsilon - \omega d^2)}} = E$$

$$\zeta_{p2} = - \frac{\beta \cdot t}{2 \sqrt{\omega(\epsilon - \omega d^2)}} \cos(\Omega t + \mu) = E t \cos(\Omega t + \mu)$$

(de oloksim zapis)

$$\zeta = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) + D + E t \cos(\Omega t + \mu)$$

$$\dot{\zeta} = -c_1 \omega \sin(\omega t) + c_2 \omega \cos(\omega t) + E \cos(\Omega t + \mu) - E \cdot t \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t + \mu)$$

$$\zeta(0) = c_1 + D = \ell \quad \rightarrow \quad c_1 = \ell - D = \ell - \frac{\ell \ell}{\epsilon - \omega d^2}$$

$$\dot{\zeta}(0) = c_2 \cdot \omega + E \cos \mu = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = - \frac{E \cos \mu}{\omega} = \frac{\beta}{2 \sqrt{\omega(\epsilon - \omega d^2)}} \cdot \frac{\cos \mu}{\sqrt{\frac{\epsilon - \omega d^2}{\omega}}} = \frac{\beta \cos \mu}{2(\epsilon - \omega d^2)}$$

$$\boxed{\zeta = \left(\ell - \frac{\ell \ell}{\epsilon - \omega d^2} \right) \cos \left(\sqrt{\frac{\epsilon - \omega d^2}{\omega}} t \right) + \frac{\beta \cos \mu}{2(\epsilon - \omega d^2)} \sin \left(\sqrt{\frac{\epsilon - \omega d^2}{\omega}} t \right) + \frac{\ell \ell}{\epsilon - \omega d^2} - \frac{\beta \cdot t}{2 \sqrt{\omega(\epsilon - \omega d^2)}} \cos \left(\sqrt{\frac{\epsilon - \omega d^2}{\omega}} t + \mu \right)}$$

$$y: \quad 0 = -F_{py}^{in} + F_{cor}^{in} + \Delta L_n$$

$$\Delta L_n = F_{py}^{in} + F_{cor}^{in}$$

$$\Delta L_n = \omega d^2 p + 2 \omega d \dot{\zeta} = \dots$$

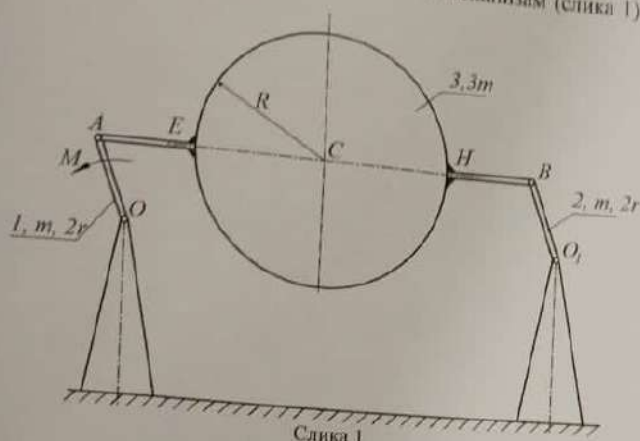
$$z: \quad 0 = -\omega y + \Delta L_c$$

$$\Delta L_c = \omega y$$

$$\boxed{L = \sqrt{\Delta L_n^2 + \Delta L_c^2} = \dots}$$

МЕХАНИКА 3, шифра предмета МЕХ-210-0799, 15.09.2023., друга група, ИТ

Задатак 1. Зглобно-паралелограмни механизам (слика 1) који се налази у вертикалној равни, чине хомогени штапови (криваје) 1 и 2 (истих дужина $OA = OB = 2r$, и истих маса, m) и тело 3 (које чине круто везани штапови AE и HB и диск са центром у тачки C чији је полупречник $R = 3r$), масе $3m$. Штапови 1 и 2 обрћу се око непокретних оса које пролазе кроз тачке O и O_1 , респективно, и управне су на раван кретања механизма (на раван цртежа). Систем (механизам) се доводи у кретање помоћу спрега сила момента интензитета $M = 40mgr$, који дејствује на хомогени штап OA . Одредити брзину центра диска C , након што криваја OA , полазећи из стања мировања, направи три пуна обрта.



Слика 1

Задатак 2. Тело M , масе m , обешено је о доњи крај редно везаних опруга крутости c_1 и c_2 . На тело делује принудна сила $F_\Omega = F_0 \sin(\Omega t)$.

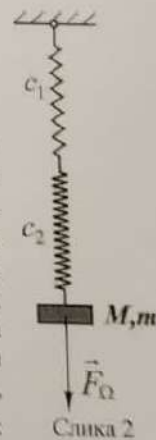
А) Одредити једначину принудних осцилација тела M .

Б) Одредити период слободних осцилација тела M .

В) Одредити коначну једначину кретања тела M , ако је кретање започето из положаја статичке равнотеже из стања мировања.

Дато је: $m = 1 \text{ kg}$, $c_1 = c$, $c_2 = 2c$, $\Omega = \sqrt{\frac{2c}{3m}}$, $F_0 = \text{const}$.

Координатни почетак узети у положају статичке равнотеже тела.



Слика 2

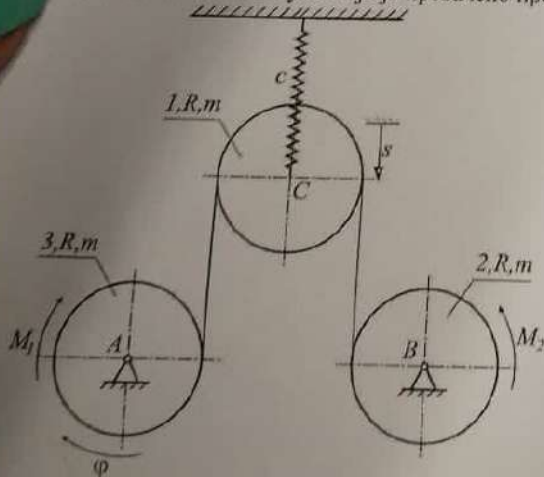
Задатак 3. Котурови 2 и 3, једнаких маса, m , и полупречника, R , могу да се обрћу око хоризонталних оса које пролазе кроз непокретне тачке A и B , услед дејства спрегова сила момената константних интензитета M_1 и M_2 (слика 3). На котурове 2 и 3 намотано је гупко, лако и неистегливо уже које је пребачено преко котура 1, масе m , полупречника R . За центар C , котура 1, везана је једним крајем опруга крутости c , која је другим крајем везана за непокретни плафон. Опруга је била ненапрегнута у почетном положају. Одредити закон кретања центра C , котура 1, ($s = s(t) = ?$), ако су почетни услови:

$$s(0) = 0, \dot{s}(0) = 0.$$

За генералисане координате усвојити:

s (положај тачке C) и φ (угао обртања котура 3).

Проклизавања нема, трење занемарити. При кретању система уже је увек затегнуто. Котурове 1, 2 и 3 сматрати хомогеним дисковима. Систем се креће у вертикалној равни.



Слика 3

oktober 23

② M: u

$$F_{\Omega} = F_0 \sin(\Omega t)$$

- 1) j-na privodnih oscilacija
- 2) period slobodnih oscilacija
- 3) končna j-na ako je kretnje započeto iz stanja mirovanja

$$\omega = 1, \quad c_1 = c, \quad c_2 = 2c, \quad \Omega = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{c}{m}$$



$$\frac{1}{c_e} = \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{c_2 + c_1}{c_1 c_2}$$

$$c_e = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{c \cdot 2c}{c + 2c} = \frac{2}{3} c$$

stat. ravn:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_e$$

$$x: \quad 0 = m g - c_e \cdot f_{st}$$

protiv. poluzj:

$$m \vec{a} = m \vec{g} + \vec{F}_e + \vec{F}_{\Omega}$$

$$x: \quad m \ddot{x} = m g - c_e (f_{st} + x) + F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + c_e x = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\ddot{x} + \frac{2}{3} c x = F_0 \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} c t\right)$$

$$\omega^2 = \frac{2}{3} c, \quad h = F_0$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2}{3}} c, \quad \Omega = \sqrt{\frac{2}{3}} c$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin(\Omega t)$$

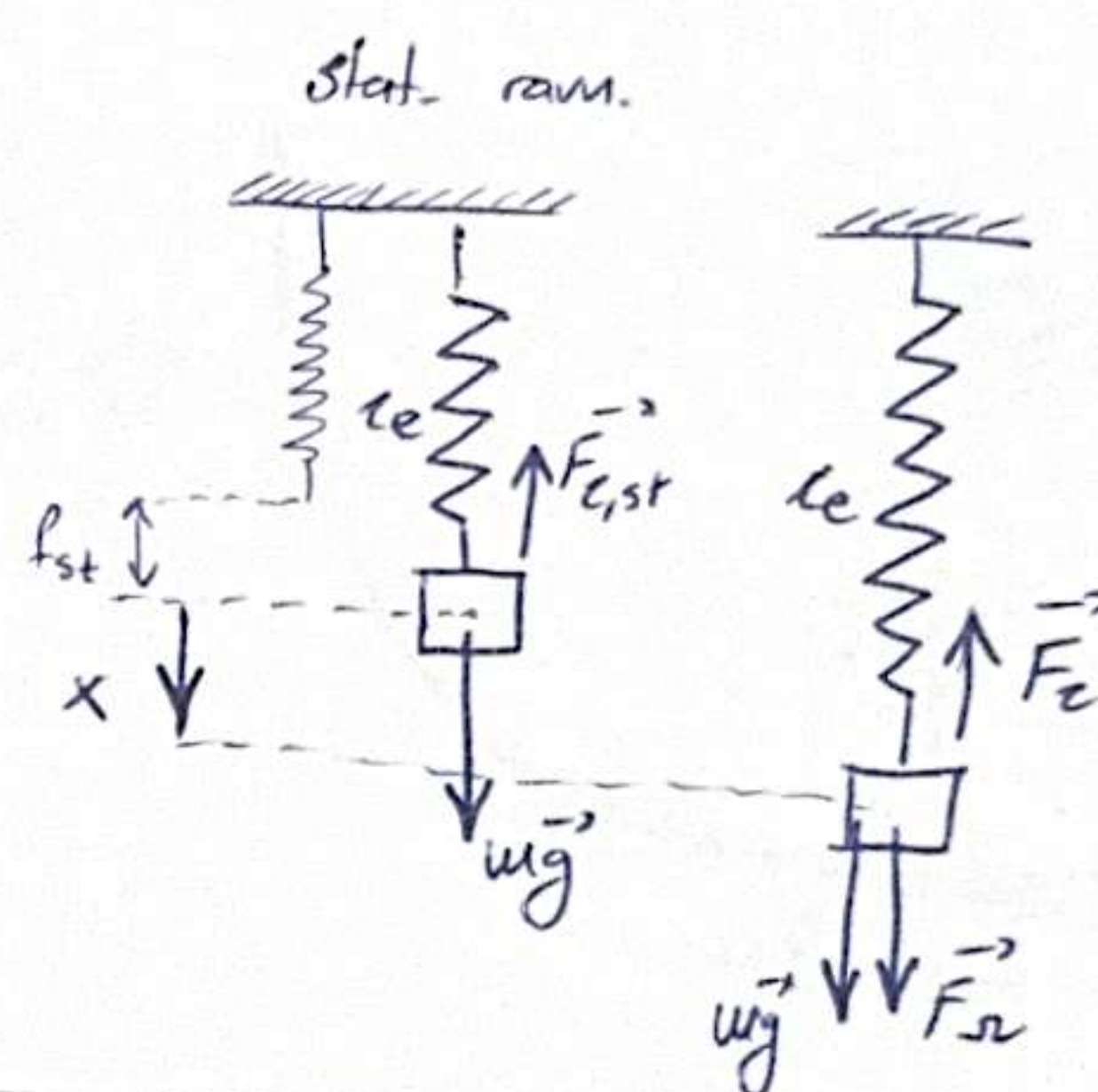
$$H: \quad \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i\omega = 0 \pm i\sqrt{\frac{2}{3}} c$$

$$(\alpha = 0, \beta = \sqrt{\frac{2}{3}} c)$$

$$x_h = C_1 \cos(\sqrt{\frac{2}{3}} c t) + C_2 \sin(\sqrt{\frac{2}{3}} c t)$$

$$P: \quad \phi(t) = e^{\alpha t} (a \cos(\Omega t) + b \sin(\Omega t))$$

$$(\alpha = 0, \Omega = \sqrt{\frac{2}{3}} c) \Rightarrow \text{rezonanca!}$$



$$x_p = t^1 e^{\alpha t} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

$$\dot{x}_p = t \Omega (-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)) + (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

$$\ddot{x}_p = t \Omega^2 (-A \cos(\Omega t) - B \sin(\Omega t)) + \Omega (-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)) \cdot 2$$

$$\cos(\Omega t) (-t \Omega^2 A + 2 B \Omega + \omega^2 t A) + \sin(\Omega t) (-t \Omega^2 B - 2 \Omega A + \omega^2 t B) = 0 \cos(\Omega t) + h \sin(\Omega t)$$

$$\Rightarrow B = 0, \quad -2 \Omega A = h \rightarrow A = \frac{h}{-2 \Omega} = -\frac{F_0}{2 \sqrt{\frac{2}{3}} c}$$

$$x_{p2} = -\frac{F_0}{2 \sqrt{\frac{2}{3}} c} t \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}} c t\right) - j\text{-na privodnih oscilacija}$$

$$T_w = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T_w = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{2}{3}} c} \rightarrow \text{period slobodnih oscilacija}$$

$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + A t \cos \Omega t$$

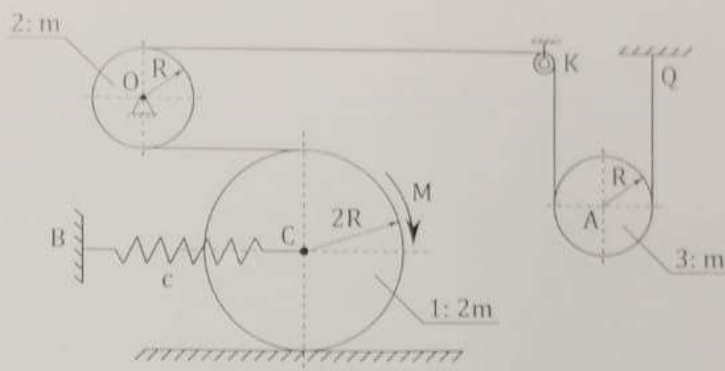
$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t - A t \Omega \sin \Omega t + A \cos \Omega t$$

$$x(t) = C_1 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

$$\dot{x}(t) = C_2 \omega + A = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{A}{\omega} = \frac{F_0}{2 \left(\sqrt{\frac{2}{3}} c\right)^2} = \frac{3}{4} \frac{F_0}{c}$$

$$x(t) = \frac{3}{4} \frac{F_0}{c} \sin\left(\sqrt{\frac{2}{3}} c t\right) - \frac{F_0}{2 \sqrt{\frac{2}{3}} c} t \cos\left(\sqrt{\frac{2}{3}} c t\right)$$

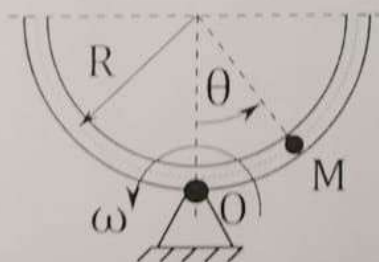
1. Диск 1 полупречника $2R$ и масе $2m$ може да се котрља без клизања по непокретној подлози, под дејством спрега сила интензитета момента спрега $M = 4m g R$. За центар диска C је везана опруга крутоги $c = \frac{mg}{4R}$, чији је други крај везан за непокретну тачку B . На диск 1 је намотано ужу, чији други крај је пребачен преко котура (диска 2) полупречника R и масе m , а затим преко котура K занемарљиве масе и димензија, и коначно пребачено преко котура (диска 3) полупречника R и масе m и везано за непокретну тачку Q . У почетном тренутку систем је мировао у почетном положају приказаном на Слици 1, а опруга је била ненапрегнута. Одредити угаону брзину диска 1 у тренутку када се диск 3 обрне за два пуна круга.



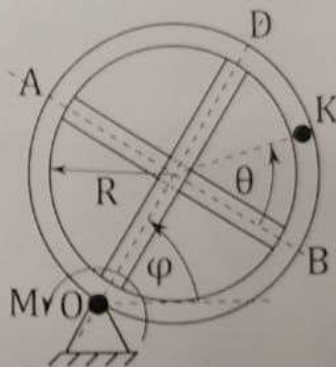
Слика 1

2. На Сл. 2 приказана је танка полукружна цев (полупречника кружице R) која је везана непокретним ослоном на оси симетрије цеви (у тачки O) и може да се обрће око вертикалне осе Oz константном угаоном брзином ω . Кроз цев може да се креће тачка M масе m , која се у почетном тренутку налазила у тачки O и имала почетну релативну брзину интензитета $V_0 = \sqrt{2}R\omega$. Одредити вектор укупне реакције цеви на тачку M за произвољан положај тачке одређен углом θ .

3. Танки хомогени прстен полупречника R и масе m може да се обрће око непокретне вертикалне осе Oz под дејством спрега сила интензитета момента спрега M . Дуж оса симетрије прстена налазе се два штапа OD и AB , једнаких дужина $2R$ и маса $2m$, који су својим крајевима круто везани за прстен. По прстену може да се креће без трења тачка K масе $4m$, као што је приказано на Слици 3. Одредити диференцијалне једначине кретања система. За генерализане координате усвојити $q_1 = \theta$ и $q_2 = \varphi$.



Слика 2



Слика 3

jun 22

② horizontalna ravan

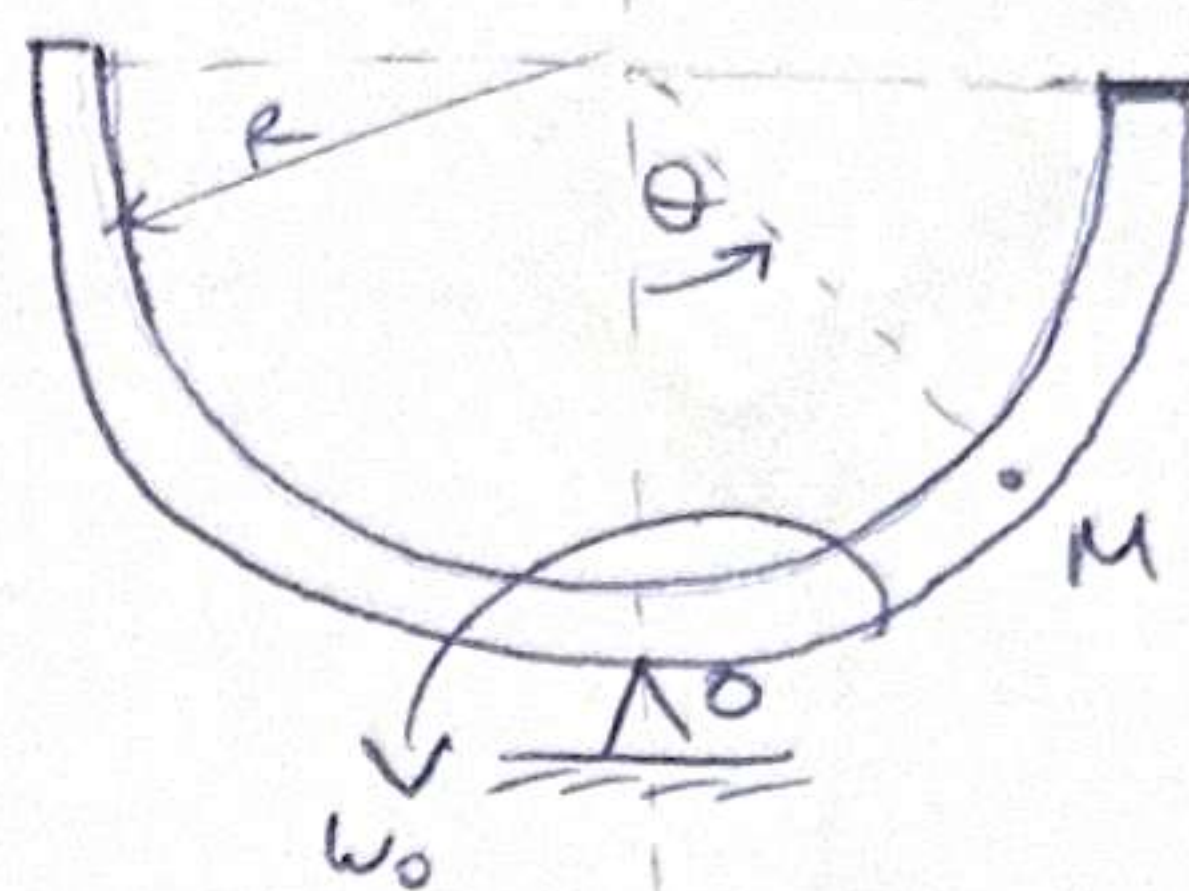
$\omega = \text{const.}$

$M: m$

to: M, r, v, O

$\omega_0 = \sqrt{2} R \omega$

$\vec{L}(\theta) = ?$



$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{cor} + \vec{N}_n + \vec{N}_g$$

$$m\vec{g}' = m\vec{g} - (-\vec{e})$$

$$\vec{F}_p^{in} = -m(\vec{a}_{on} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m\omega^2 \cdot \overline{OM} \cdot (\vec{\lambda})$$

$$\overline{OM} = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\vec{F}_p^{in} = 2m\omega^2 R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{\lambda}$$

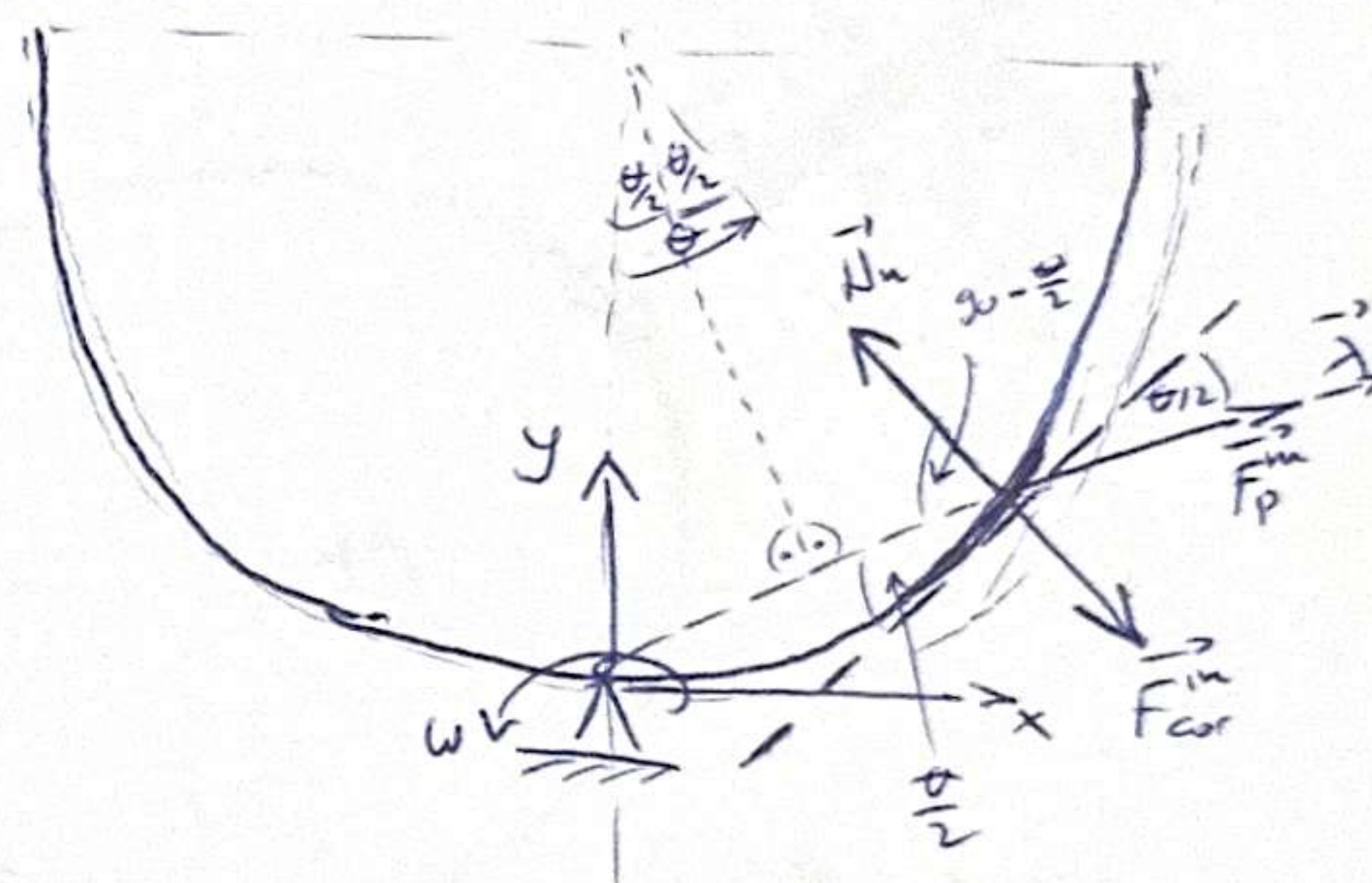
$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega \cdot \omega_r \cdot (-\vec{n})$$

$$\vec{N}_n = N_n \cdot \vec{n}$$

$$\vec{N}_g = N_g \cdot \vec{e}$$

tehnički gledano, slika bi trebala da bude istaknuta za ugao θ , ali pošto je horizontalna ravan ovala uvek okom

istaknuti vektor pravca $\vec{om}$



$$n: m \cdot a_n = -F_p^{in} \cdot \sin\frac{\theta}{2} - F_{cor} + N_n$$

$$m \cdot \frac{\omega_r^2}{R} = -2m\omega^2 R \sin^2\frac{\theta}{2} - 2m\omega \cdot \omega_r + N_n, \quad \omega_r = ?$$

$$T - T_0 = A \quad (\text{reel})$$

$$T_0 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 = \frac{1}{2} m \cdot 2R^2 \omega^2 = mR^2 \omega^2$$

$$T = \frac{1}{2} m \omega_r^2$$

$$A = \int_{s_0=R\theta_0=0}^{s=R\theta} F_p^{in} \cos\frac{\theta}{2} ds = \int_0^\theta 2m\omega^2 R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d(R\theta) = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin\frac{\theta}{2} \\ du = \frac{1}{2} \omega \frac{\theta}{2} d\theta \end{array} \right\} =$$

$$A = \sin\frac{\theta}{2} \int_0^{\sin\frac{\theta}{2}} 2m\omega^2 R^2 \cdot 2u du = 2m\omega^2 R^2 u^2 \Big|_0^{\sin\frac{\theta}{2}} = 2m\omega^2 R^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\frac{1}{2} m \omega_r^2 - mR^2 \omega^2 = 2m\omega^2 R^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \rightarrow \omega_r^2 = 2R^2 \omega^2 + 4\omega^2 R^2 \sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$N_n = m \cdot \frac{2R^2 \omega^2 + 4\omega^2 R^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}{R} + 2m\omega^2 R \sin^2\frac{\theta}{2} + 2m\omega \cdot \sqrt{2R^2 \omega^2 + 4\omega^2 R^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$N_n = 2mR\omega^2 + 6mR\omega^2 \sin^2\frac{\theta}{2} + 2m\omega \cdot \sqrt{2R^2 \omega^2 + 4\omega^2 R^2 \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

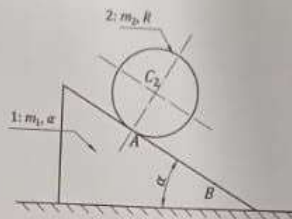
$$z: 0 = -mg + N_g \Rightarrow N_g = mg$$

$$N = N_n \cdot \vec{n} + N_g \cdot \vec{e}$$

Mehanika 3

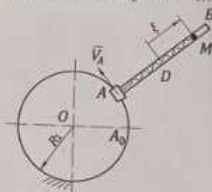
Julski ispitni rok 2024. – grupa 2

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase $m_1 = m$ i nagibnog ugla $\alpha = 30^\circ$ i diska 2 mase $m_2 = 2m$ i poluprečnika R . Prizma može da klizi bez trenja po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi, a disk 1 može da se kotrlja bez klizanja po strmoj stranici prizme. U početnom trenutku sistem miruje, a disk dodiruje prizmu u tački A . Odrediti pomeranje prizme do trenutka kada se disk nađe u tački B prizme, ako je dužina $\overline{AB} = 4\sqrt{3}R$. U istom trenutku odrediti brzinu prizme i ugaonu brzinu diska.



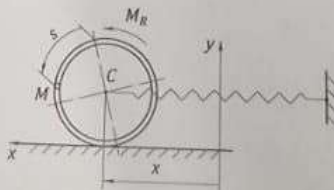
Slika uz zadatak 1.

2. Klizač A kreće se brzinom konstantnog intenziteta $V_A = \omega_0 R$, smeru kao na slici, po nepokretnoj kružnoj vodici poluprečnika $R_1 = R$, koja se nalazi u vertikalnoj ravni. Za klizač A kruto je vezana cev AB upravno na tangentu vodice. U cevi AB nalazi se kuglica M zanemarljivih dimenzija i mase m , koja je oprugom krutosti $c = 5m\omega_0^2$ vezana za tačku A cevi. Ako se klizač A u početnom trenutku nalazio u položaju A_0 prikazanom na slici, a kuglica u tački D cevi, pri čemu je opruga u tom položaju nenapregnuta, odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja kuglice u odnosu na tačku D cevi i reakciju cevi u funkciji vremena. Dato je $\overline{AD} = R$.



Slika uz zadatak 2.

3. Disk 1 mase $m_1 = 4m$ i poluprečnika R može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za središte diska C vezana je opruga krutosti c . Po tankom žlebu diska može da klizi bez trenja kuglica M mase $m_2 = m$, gde se relativan položaj kuglice na disku meri lučnom koordinatom s . Na disk deluje spreg sila momenta intenziteta M_R , smeru kao na slici. Ako su se u početnom trenutku središte C diska i kuglica M nalazili na y osi i opruga bila nenapregnuta, odrediti Lagranževe diferencijalne jednačine druge vrste u odnosu na generalisane koordinate s i x .



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

jul 24

2) $v_A = \omega_0 R = \text{const}$

$R_1 = R$

vertikalna ravan

$M: m$

opruga: $c = 5m\omega_0^2$

$t_0 \equiv A$ je u A_0

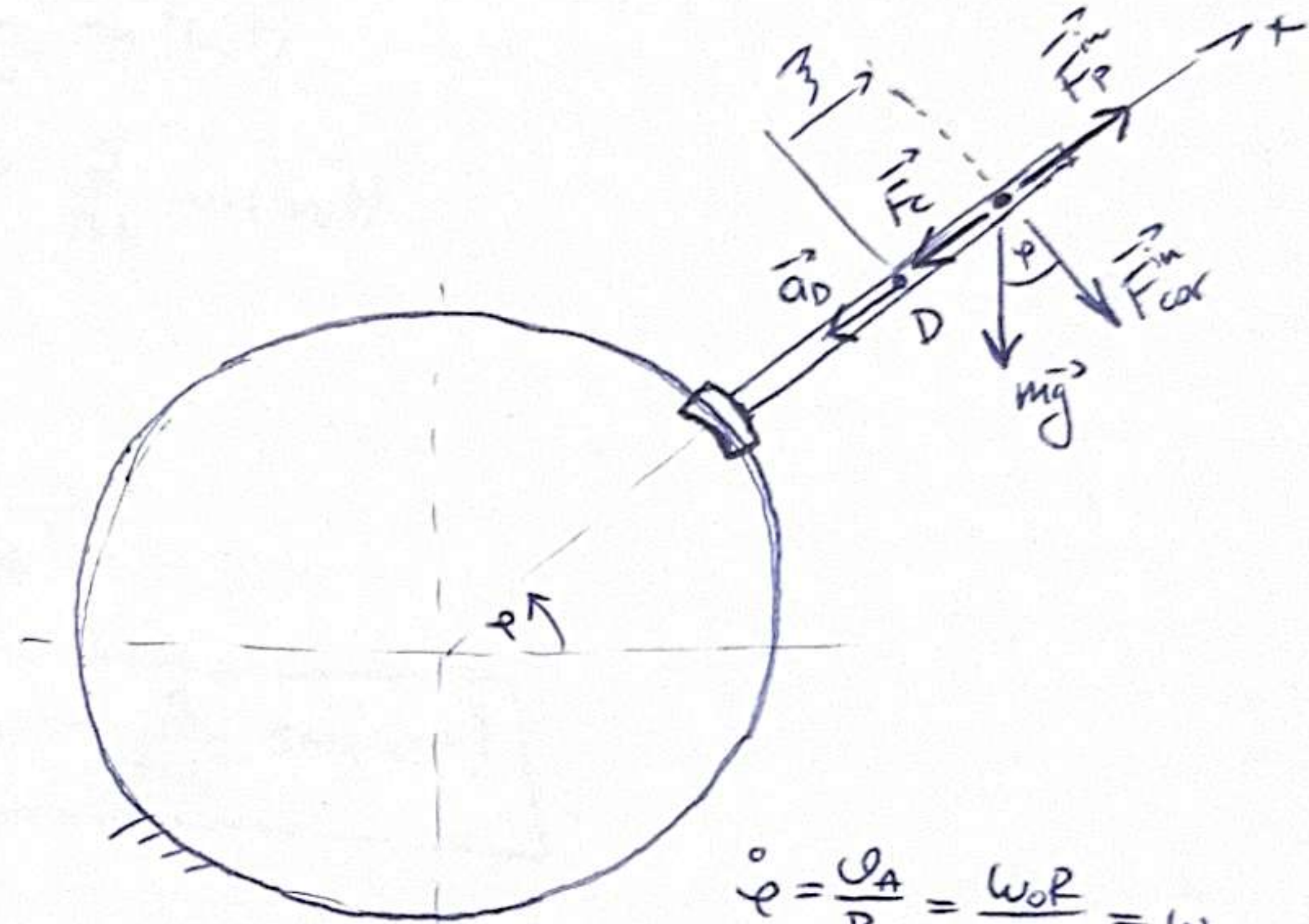
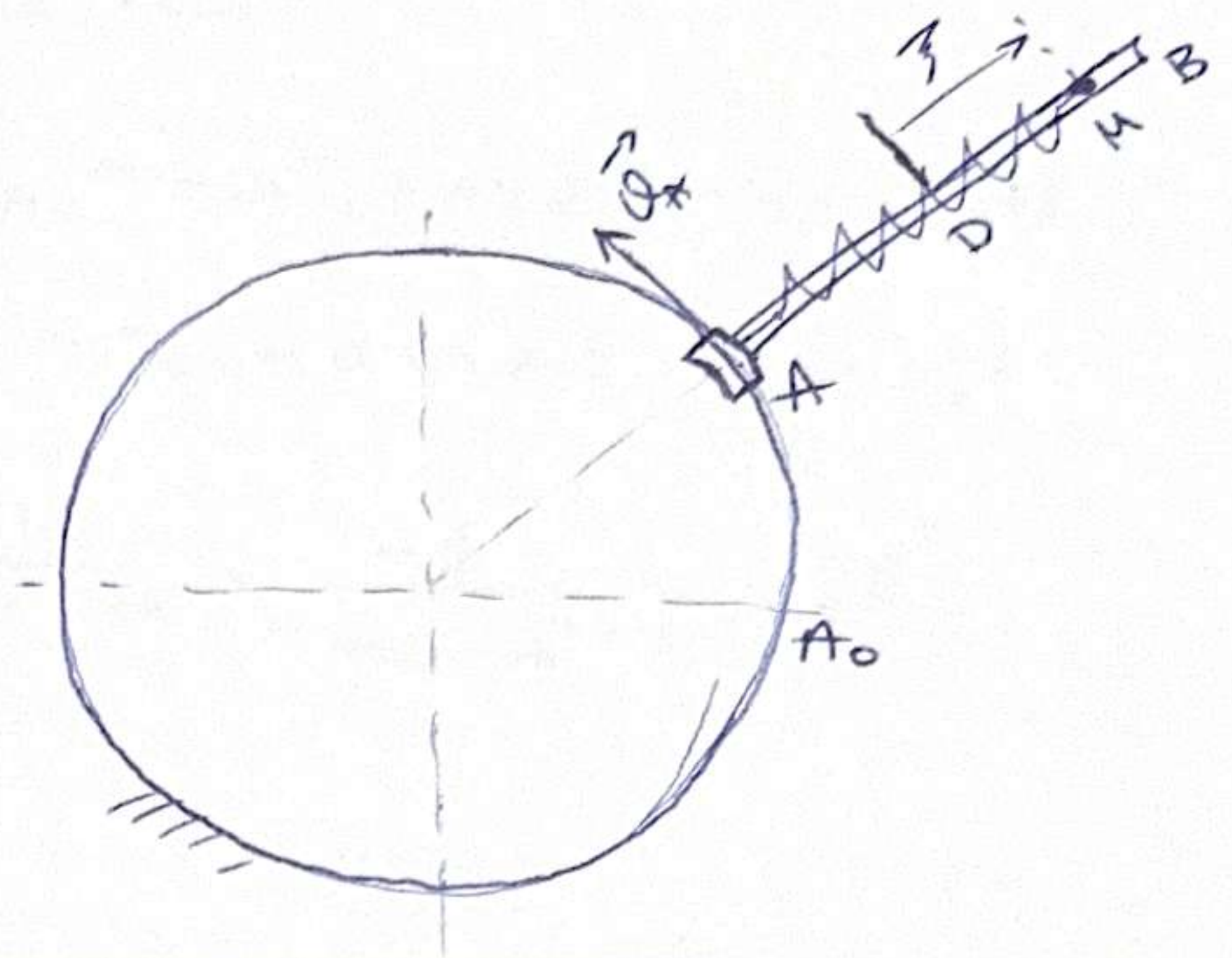
M je u D

opruga nenapregnuta

$\overline{AD} = R$

$\vec{z}(t) = ?$

$N(t) = ?$



$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p + \vec{F}_{cor} + \vec{N}_n + \vec{N}_e$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_c = c \cdot \Delta l \cdot (-\vec{z}) = 5m\omega_0^2 \vec{z} \cdot (-\vec{z})$$

$$\vec{F}_p = -m(\vec{a}_D + \vec{z} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{z})) = m \cdot 2\omega_0^2 R \cdot (\vec{z}) + m\omega_0^2 \vec{z} \cdot (\vec{z})$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega_0 \cdot \vec{z} \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{N}_n = N \cdot (\vec{j}) = \vec{N}$$

$$\vec{N}_e = 0$$

$$\dot{\varphi} = \frac{v_A}{R} = \frac{\omega_0 R}{R} = \omega_0$$

$$\vec{a}_D = \vec{a}_{Dn} + \vec{a}_{Dt} =$$

$$\vec{a}_D = \dot{\varphi}^2 \cdot 2R \cdot (-\vec{z}) =$$

$$\vec{a}_D = 2\omega_0^2 R \cdot (-\vec{z})$$

$$\vec{z}: m\ddot{\vec{z}} = -mg \sin \varphi - F_c + F_p$$

$$m\ddot{\vec{z}} = -mg \sin(\omega_0 t) - 5m\omega_0^2 \vec{z} + 2m\omega_0^2 R + m\omega_0^2 \vec{z} \quad | : m$$

$$\ddot{\vec{z}} + 4\omega_0^2 \vec{z} = 2\omega_0^2 R - g \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{\vec{z}} + \omega^2 \vec{z} = h_1 + h_2 \sin(\omega_2 t) \quad , \quad \omega^2 = 4\omega_0^2 \quad , \quad h_1 = 2\omega_0^2 R \quad , \quad h_2 = -g \quad , \quad \omega_2 = \omega_0$$

$$\# : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega = 0 \pm i \cdot 2\omega_0 \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 2\omega_0 \end{matrix} \right)$$

$$\vec{z}_h = C_1 \cos(2\omega_0) + C_2 \sin(2\omega_0)$$

$$P_1: C_1(t) = e^{\alpha t} (h_1 \cos \omega t + h_2 \sin \omega t) \quad \left(\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{matrix} \right) \quad , \quad \vec{z}_{p1} = t^0 e^{\alpha t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = A \quad , \quad \ddot{\vec{z}}_{p1} = 0$$

$$0 + \omega^2 A = h_1 \rightarrow A = \frac{h_1}{\omega^2} = \frac{2\omega_0^2 R}{4\omega_0^2} = \frac{1}{2} R \rightarrow \vec{z}_{p1} = \frac{1}{2} R$$

$$P_2: \quad \zeta_2(t) = e^{\omega t} (0 \cos \omega_2 t + h_2 \sin \omega_2 t) \quad \left(\begin{array}{l} a=0 \\ \omega = \omega_2 = \omega_0 \end{array} \right)$$

$$\ddot{\zeta}_2 = t^0 e^{\omega t} (A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t), \quad \ddot{\zeta}_2 = -\omega^2 (A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t)$$

$$\cos \omega_2 t (-\omega^2 A + \omega^2 A) + \sin \omega_2 t (-\omega^2 B + \omega^2 B) = 0 \cos \omega_2 t + h_2 \sin \omega_2 t$$

$$A=0, \quad B(\omega^2 - \omega_2^2) = h_2 \rightarrow B = \frac{h_2}{\omega^2 - \omega_2^2} = \frac{-g}{4\omega_0^2 - \omega_0^2} = -\frac{g}{3\omega_0^2}$$

$$\ddot{\zeta}_2 = -\frac{g}{3\omega_0^2} \sin(\omega_0 t)$$

$$\ddot{\zeta} = C_1 \cos(2\omega_0 t) + C_2 \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}R - \frac{g}{3\omega_0^2} \sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{\zeta} = -2\omega_0 C_2 \sin(2\omega_0 t) + 2\omega_0 C_1 \cos(2\omega_0 t) - \frac{g}{3\omega_0} \cos(\omega_0 t)$$

$$\zeta(t_0) = C_1 + \frac{1}{2}R = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{1}{2}R$$

$$\dot{\zeta}(t_0) = 2\omega_0 C_2 - \frac{g}{3\omega_0} = 0 \rightarrow C_2 = \frac{g}{6\omega_0^2}$$

$$\boxed{\zeta = -\frac{1}{2}R \cos(2\omega_0 t) + \frac{g}{6\omega_0^2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{2}R - \frac{g}{3\omega_0^2} \sin(\omega_0 t)}$$

$$y: \quad 0 = -mg \cos \varphi - F_{\text{cor}}^m + N$$

$$0 = -mg \cos(\omega_0 t) - 2m\omega_0 \dot{\zeta} + N$$

$$N = mg \cos(\omega_0 t) + 2m\omega_0 \dot{\zeta}$$

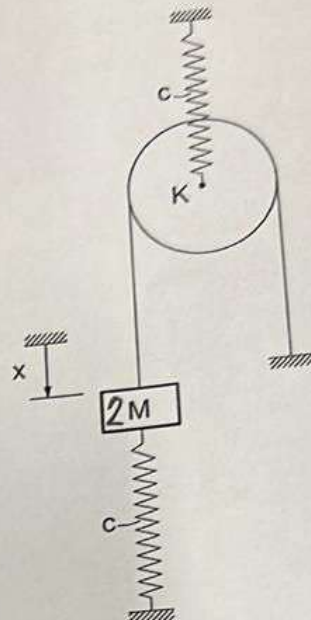
$$N = mg \cos(\omega_0 t) + 2m\omega_0 \left(R\omega_0 \sin(2\omega_0 t) + \frac{g}{3\omega_0} \cos(2\omega_0 t) - \frac{g}{3\omega_0} \cos(\omega_0 t) \right)$$

$$\boxed{N = \frac{1}{3}mg \cos(\omega_0 t) + \frac{2}{3}mg \cos(2\omega_0 t) + 2m\omega_0^2 R \sin(2\omega_0 t)}$$

2. GRUPA

MEHANIKA 3

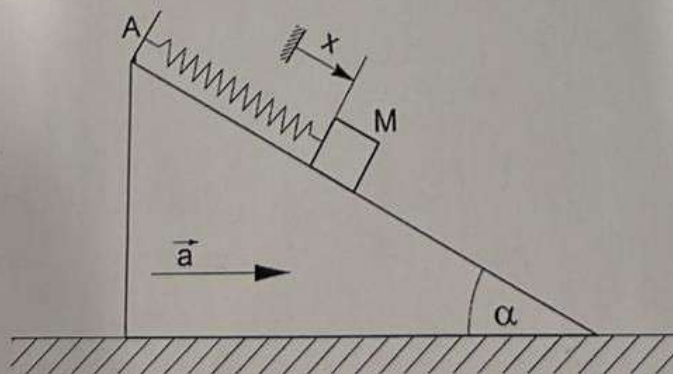
1. Mehanički sistem prikazan na slici sastoji se od kotura K zanemarljive mase i tege M mase $2m$. Centar kotura vezan je za oprugu krutosti c čiji je drugi kraj vezan za nepokretan zid. Centar kotura može da se kreće pravolinijski duž vertikalnog pravca. Teg M vezan je sa donje strane za oprugu krutosti c čiji je drugi kraj vezan za nepokretnu podlogu. Sa gornje strane teg je vezan neistegljivim užetom koje je prebačeno preko kotura K i vezano za nepokretnu podlogu. Položaj tege meri se koordinatom x kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku $t_0 = 0$ sistem je mirovao, opruge su bile nenapregnute i tada je $x = 0$.



- Odrediti pomeranje x_1 tela M u trenutku t_1 , gde je t_1 prvi pozitivan trenutak kada se telo M ponovo zaustavi.
- Odrediti ubrzanje tela M u tom istom trenutku t_1 .

2. Trougaona prizma kreće se translatorno po horizontalnoj nepokretnoj ravni ubrzanjem $\vec{a}$ koje se menja po zakonu $a = \sqrt{3}g \sin(3t) \frac{m}{s^2}$ (g je ubrzanje sile Zemljine teže). Po strmoj strani prizme može da klizi bez trenja telo M mase m . Telo M je vezano oprugom krutosti c , dok je drugi kraj opruge vezan za prizmu u tački A . U početnom trenutku telo M je bilo u relativnom miru u položaju u kome je opruga nenapregnuta, i tada je $x = 0$. Dato je: $\alpha = 30^\circ$ i $\frac{c}{m} = 3 \frac{1}{s^2}$.

- Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja $x(t)$ tela M duž strme ravni.
- Odrediti reakciju veze između tela M i prizme u funkciji vremena.

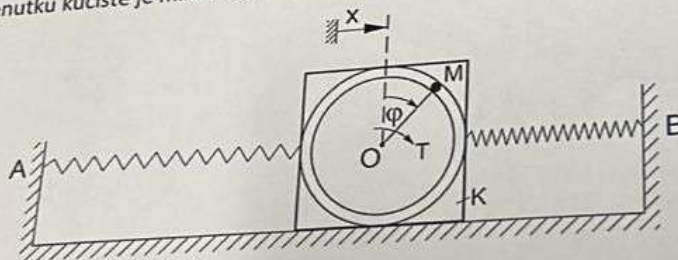


JUN 2024

2. GRUPA

MEHANIKA 3

3. Kućište K mase 3 kg može da se kreće po glatkoj horizontalnoj podlozi. Kućište je vezano za dve identične opruge krutosti $c = 8 \frac{\text{kg}}{\text{s}^2}$ čiji su suprotni krajevi vezani za nepokretne tačke A i B . Položaj kućišta određen je koordinatom x (kada je $x = 0$ opruge su nenapregnute). U kućištu je urezan žleb poluprečnika $R = 1 \text{ m}$ po kome može da se kreće bez trenja materijalna tačka M mase 1 kg . Tačka M dovodi se u kretanje posredstvom poluge OM zanemarljive mase ($OM = R$), a položaj tačke meri se uglom φ , kao što je prikazano na slici. Na polugu deluje spreg sila momenta intenziteta T .
- a) Za date generalisane koordinate x i φ napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.
- b) Odrediti $x(t)$ u slučaju da se poluga OM obrće konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 4 \frac{1}{\text{s}}$. U početnom trenutku kućište je mirovalo i važio je $x_0 = \varphi_0 = 0$.



jun 24

② $a = \sqrt{3} g \sin(3t)$

$M = m$

opruga: c

to: relativno mirovanje
opruga neupregnuta
 $x=0$

$\alpha = 30^\circ$, $\frac{c}{m} = 3$

1) $x(t) = ?$

2) $\lambda(t) = ?$

$$m \vec{a}_r = m \vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{cor}^m + \vec{N}_n + \vec{A}_g^m$$

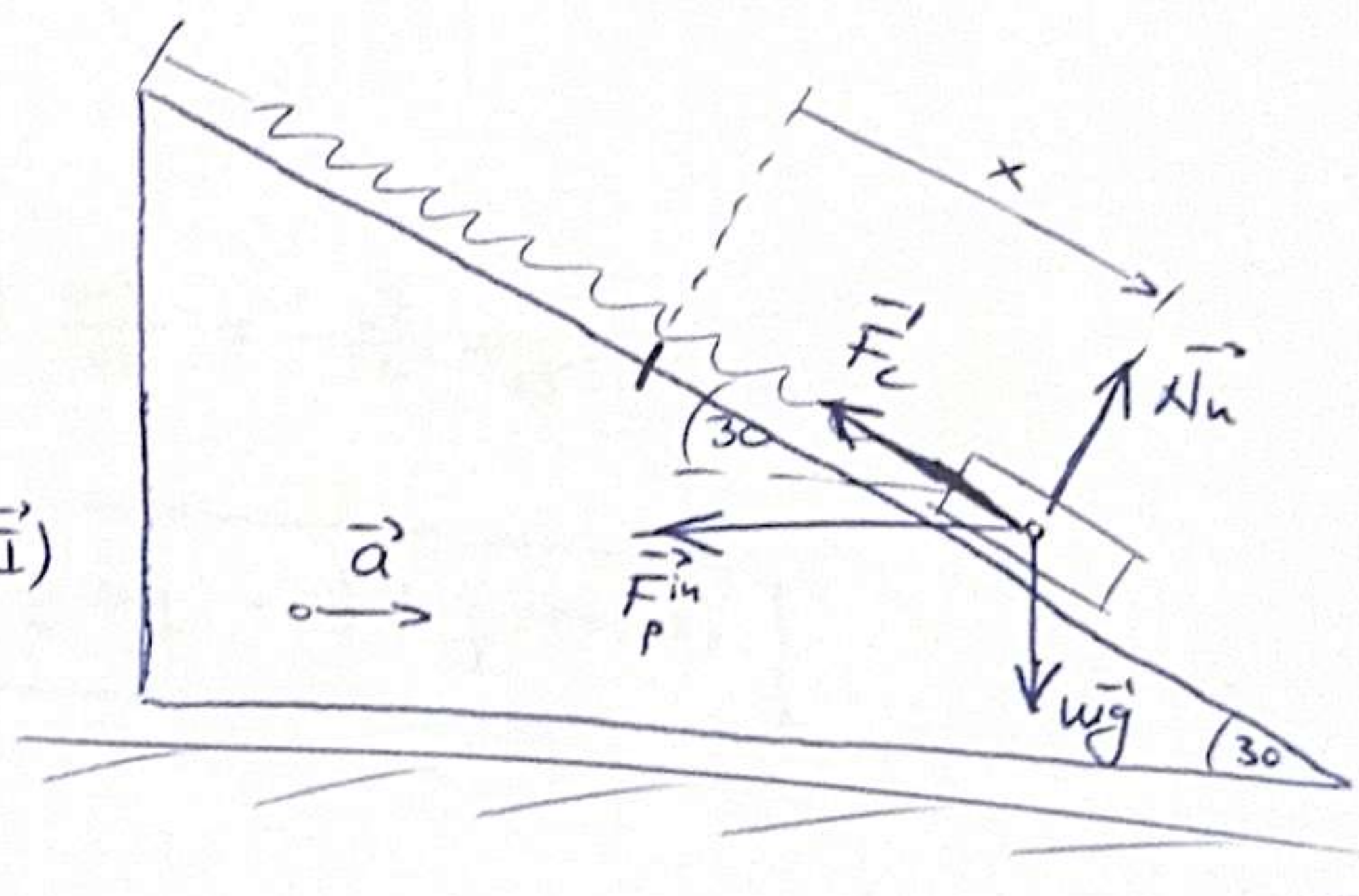
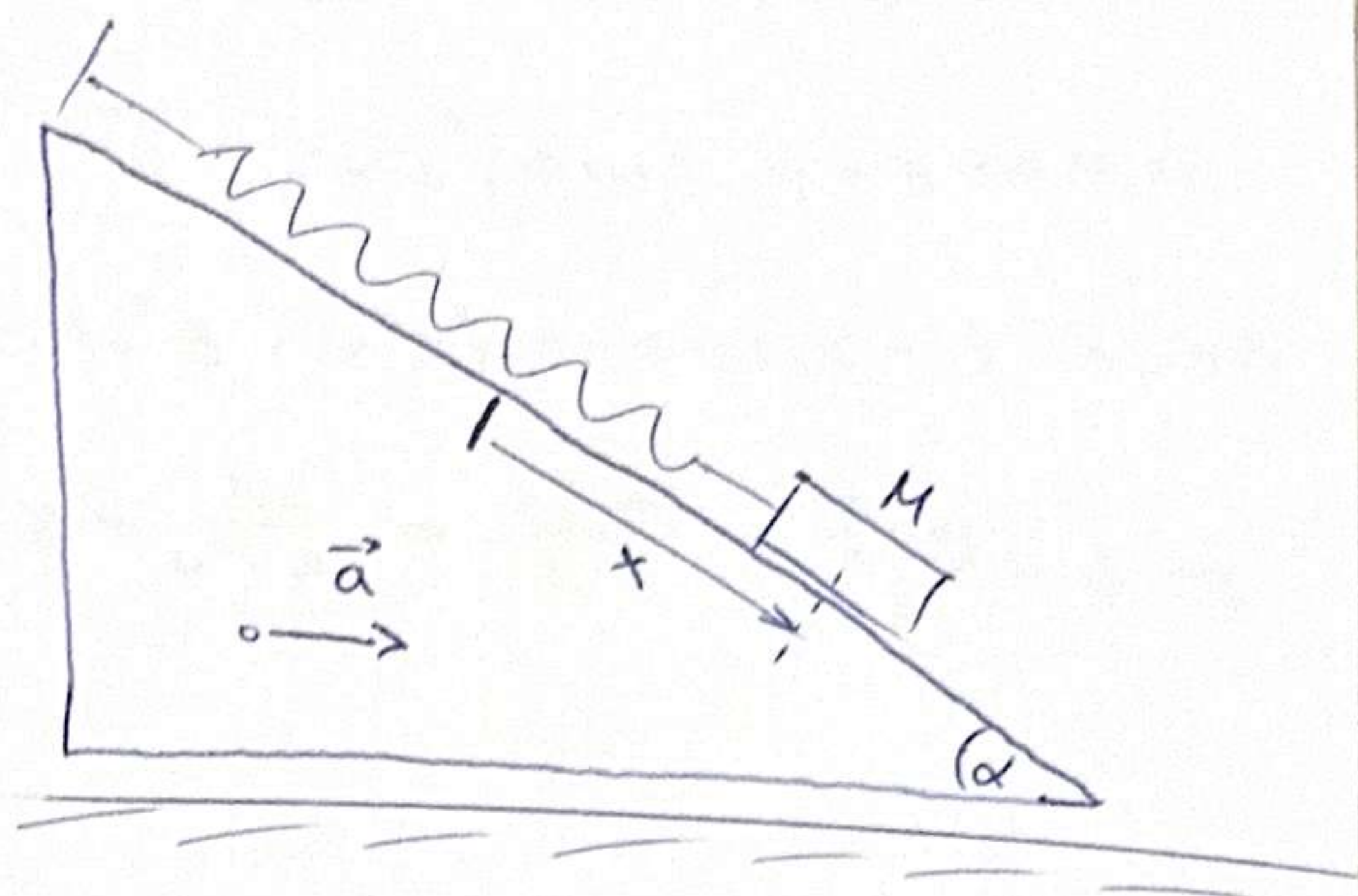
$$m \vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_c = c \cdot \Delta l \cdot (-\vec{i}) = c \cdot x \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\vec{a}_{on} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m \cdot a \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_{cor}^m = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}_r = 0$$

$$\vec{N}_n = N \cdot (\vec{j}) = \vec{N}$$



x: $m \ddot{x} = mg \sin 30 - cx - mg \cos 30$

$m \ddot{x} = \frac{1}{2} mg - cx - \sqrt{3} mg \sin(3t) \frac{\sqrt{3}}{2}$ $/: m$

$\ddot{x} + \frac{c}{m} x = \frac{1}{2} g - \frac{3}{2} g \sin(3t)$

$\ddot{x} + \omega^2 x = h_1 + h_2 \sin(\Omega_2 t)$

$\omega^2 = \frac{c}{m} = 3$, $h_1 = \frac{1}{2} g$, $h_2 = \frac{3}{2} g$, $\Omega_2 = 3$
($\omega = \sqrt{3}$)

H: $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega = 0 \pm i \cdot \sqrt{3}$ ($\alpha=0$, $\beta=\sqrt{3}$)

$x_h = C_1 \cos(\sqrt{3}t) + C_2 \sin(\sqrt{3}t)$

P₁: $G_1(t) = h_1 = e^{0t} (h_1 \cos 0t + 0 \sin 0t)$ ($\alpha=0$, $\beta=0$)

$\vec{x}_{p1} = t^0 e^{0t} (A \cos 0t + B \sin 0t) = A$, $\ddot{x}_{p2} = 0$

$0 + \omega^2 A = h_1 \rightarrow A = \frac{h_1}{\omega^2} = \frac{\frac{1}{2} g}{3} = \frac{1}{6} g \rightarrow x_{p1} = \frac{1}{6} g$

$$P_2: \quad c_2(t) = h_2 \sin(\Omega_2 t) = e^{0t} (0 \cos(\Omega_2 t) + h_2 \sin(\Omega_2 t)) \quad \left(\begin{matrix} a=0 \\ \omega = \Omega_2 = 3 \end{matrix} \right)$$

$$x_{p2} = t^0 e^{0t} (A \cos(\Omega_2 t) + B \sin(\Omega_2 t)), \quad \ddot{x}_{p2} = -\Omega_2^2 (A \cos(\Omega_2 t) + B \sin(\Omega_2 t))$$

$$\cos(\Omega_2 t) (-\Omega_2^2 A + \omega^2 A) + \sin(\Omega_2 t) (-\Omega_2^2 B + \omega^2 B) = 0 \cos(\Omega_2 t) + h_2 \sin(\Omega_2 t)$$

$$A=0, \quad B(-\Omega_2^2 + \omega^2) = h_2 \quad \rightarrow \quad B = \frac{h_2}{\omega^2 - \Omega_2^2} = \frac{-\frac{3}{4}mg}{3-9} = \frac{\frac{3}{4}mg}{6} = \frac{1}{4}mg$$

$$x_{p2} = \frac{1}{4}mg \sin(3t)$$

$$x = c_1 \cos(\sqrt{3}t) + c_2 \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{6}mg + \frac{1}{4}mg \sin(3t)$$

$$\dot{x} = -\sqrt{3} c_1 \sin(\sqrt{3}t) + \sqrt{3} c_2 \cos(\sqrt{3}t) + \frac{3}{4}mg \cos(3t)$$

$$x(t_0) = c_1 + \frac{1}{6}mg = 0 \quad \rightarrow \quad c_1 = -\frac{1}{6}mg$$

$$\dot{x}(t_0) = \sqrt{3} c_2 + \frac{3}{4}mg = 0 \quad \rightarrow \quad c_2 = -\frac{3}{4} \frac{mg}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{4}mg$$

$$x = -\frac{1}{6}mg \cos(\sqrt{3}t) - \frac{\sqrt{3}}{4}mg \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{6}mg + \frac{1}{4}mg \sin(3t)$$

$$y: \quad 0 = -mg \cos 30^\circ - F_p^m \sin 30^\circ + N$$

$$0 = -mg \frac{\sqrt{3}}{2} - m \cdot g \cdot \frac{1}{2} + N$$

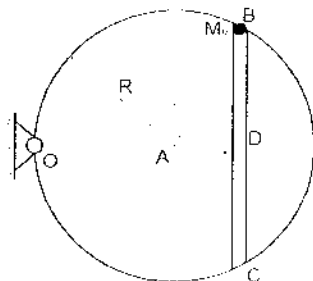
$$N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg + \frac{1}{2}mg \sin(3t)$$

МЕХАНИКА 3

писмени део испита, 03.09.2016.

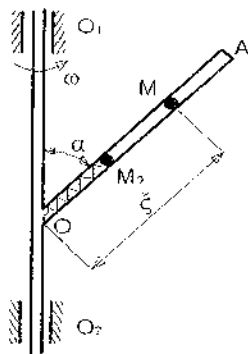
ПРВА ГРУПА

Задатак бр. 1: Диск полупречника R и масе m , који се налази у хоризонталној равни обрће се око вертикалне осовине Oz . По каналу BC ($AD=R/2$) креће се тачка M масе m , која је опругом, крутости c , везана за зглоб A . Дужина ненапрегнуте опруге је $l_0=R/2$. У почетном тренутку, када се тачка налазила на крају канала у тачки B систем је мировао. Одредити угаону брзину плоче ω_1 у тренутку када тачка стигне у средину канала D .

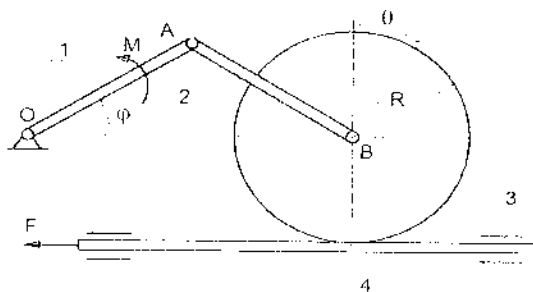


Задатак бр. 2: Куглица M занемарљивих димензија, масе m , може да се креће унутар глатке цеви OA , која се обрће константном угаоном брзином ω око вертикалне осе O_1O_2 градећи са њом угао $\alpha = 45^\circ$. У почетном тренутку куглица се налазила на растојању $a = 1/\omega^2$ од тачке O у релативном мировању.

Куглица је везана опругом крутости $c = \frac{3}{2}m\omega^2$ за тачку O . У почетном тренутку опруга је била ненапрегнута. Одредити закон кретања куглице унутар цеви ($\xi = \overline{OM}$?).



Задатак бр. 3: Криваја 1, дужине l , масе m , може да се обрће у вертикалној равни око осе која пролази кроз тачку O . Зупчаник 3, који се може сматрати хомогеним диском полупречника R , масе m , спрегнут је са зупчастом летвом 4, масе m , која може да се креће по хоризонталним вођицама. Криваја 1 и зупчаник 3 зглобно су везани штапом занемарљиве масе 2, дужине l . На зупчасту летву 4 делује сила интензитета F , а на кривају 1 спрег сила момента M . У почетном тренутку систем је мировао, а криваја 1 је заузимала хоризонталан положај, док је $\theta_0 = 0$. Саставити диференцијалне једначине кретања система ако су генерализане координате φ и θ и одредити почетне вредности угаоних убрзања криваје 1 и зупчаника 3 у почетном тренутку.



- Употреба литературе није дозволена.
- Овај формат са задацима предати заједно са испитном свеском.
- Сва евентуална питања у вези са задацима постављати дозволеним испитивањима и дециментима.
- На последњој страни испитнице сваке одговоре уписати све податке, а у рубрици *Напомене* или *предметност* представити.
- Бројер испита: МНЛ 210 - 0709

September 16

② M: m

$\omega = \text{const.}$

vertikalna ravan

$\alpha = 45^\circ$

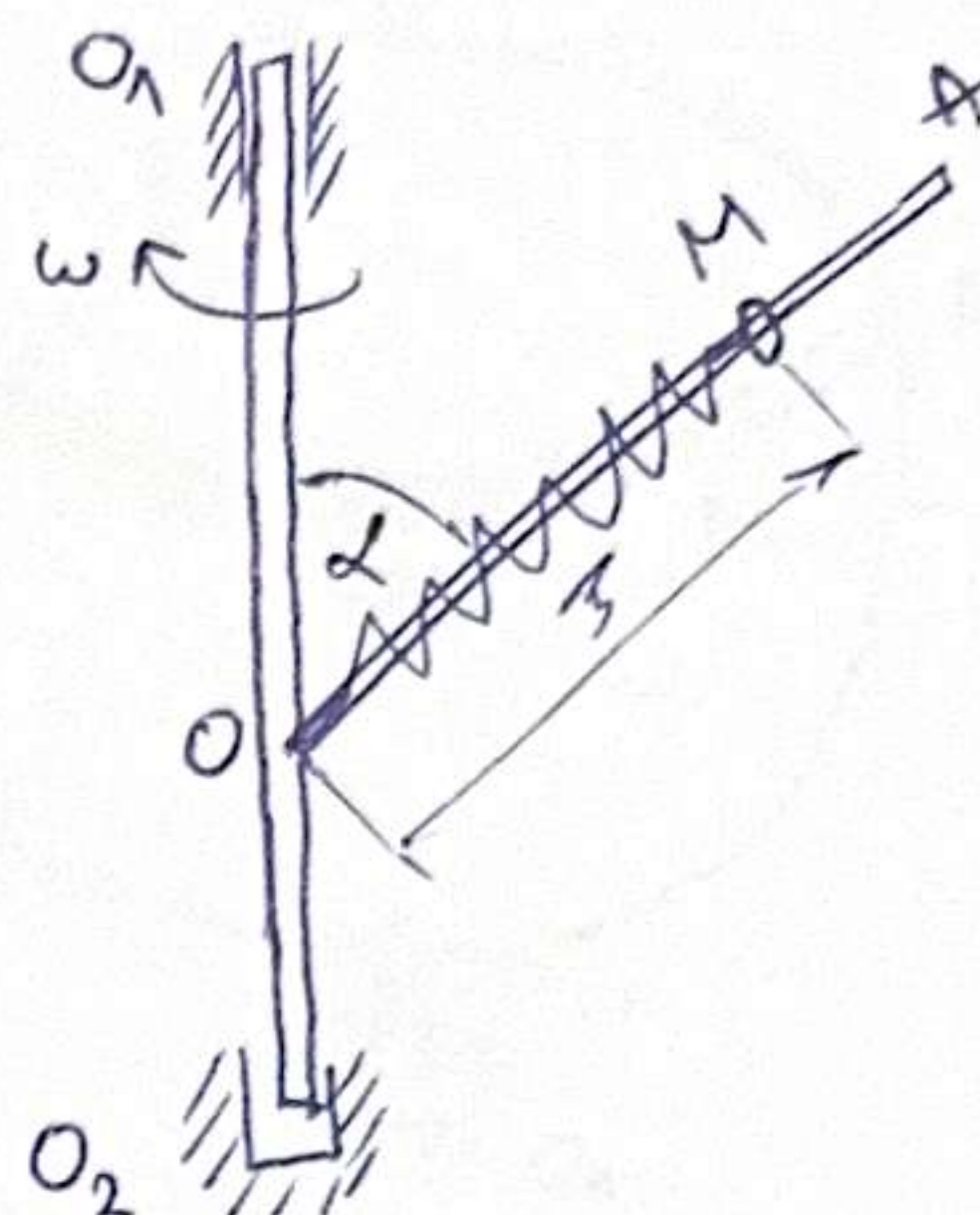
$t_0: \vec{f}_0 = a = \frac{1}{\omega^2}$

$v_0 = 0$

opruža neupregnuta

opruža: $\epsilon = \frac{3}{2} m \omega^2$

$\vec{f} = ?$



$$m \vec{a}_r = m \vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p + \vec{F}_{cor} + \vec{N}_n + \vec{N}_c$$

$$m \vec{g} = m g \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_c = \epsilon \cdot \Delta l \cdot (-\vec{i}) = \epsilon \cdot (x - a) \cdot (-\vec{i}) = \frac{3}{2} m \omega^2 (x - a) \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_p = -m(\vec{a}_{on} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m \omega^2 \cdot \vec{X} \cdot (\vec{i}) = m \omega^2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} (\vec{i})$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m \vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m \omega \cdot \dot{x} \cdot (\vec{k})$$

$$\vec{N}_n = N_n \cdot \vec{j}$$

$$\vec{N}_c = N_c \cdot (-\vec{k})$$

$$x: m \ddot{x} = -m g \frac{\sqrt{2}}{2} - F_c + F_p \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\ddot{x} = -g \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{2} m \omega^2 (x - a) + m \omega^2 x \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{3}{2} \omega^2 a - g \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \omega = \omega, \quad h = \frac{3}{2} \omega^2 a - g \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h$$

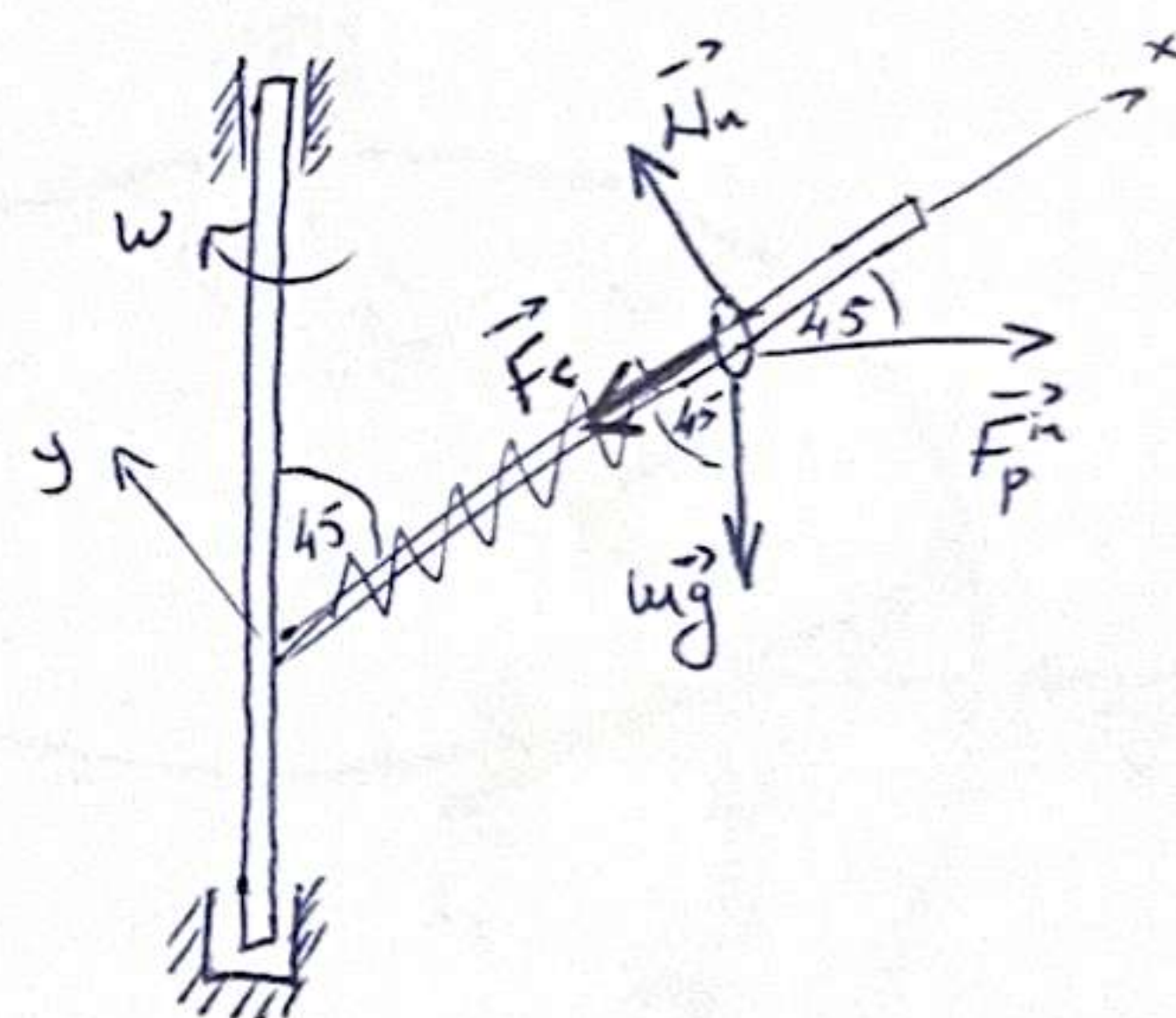
$$\# : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega$$

$$x_h = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t)$$

$$P: \phi(t) = e^{\omega t} (h \cos(\omega t) + 0 \cdot \sin(\omega t))$$

$$x_p = t^0 e^{\omega t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = A, \quad \ddot{x}_p = 0$$

$$0 + \omega^2 A = h \rightarrow A = \frac{h}{\omega^2} = \frac{\frac{3}{2} \omega^2 a - g \frac{\sqrt{2}}{2}}{\omega^2}$$



$$x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{3}{2} a - \frac{g \sqrt{2}}{\omega^2 \cdot 2}$$

$$\dot{x} = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$$

$$\dot{x}(t_0) = \omega C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

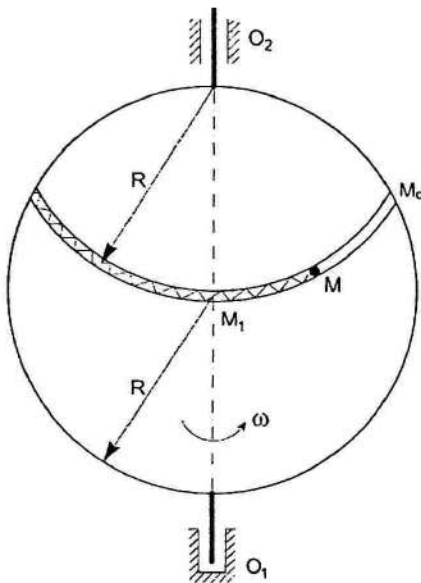
$$x(t_0) = C_1 + \frac{3}{2} a - \frac{g \sqrt{2}}{\omega^2 \cdot 2} = a \rightarrow$$

$$\rightarrow C_1 = \frac{g \sqrt{2}}{\omega^2 \cdot 2} - \frac{1}{2} a = \frac{g \sqrt{2}}{2 \omega^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\omega^2}$$

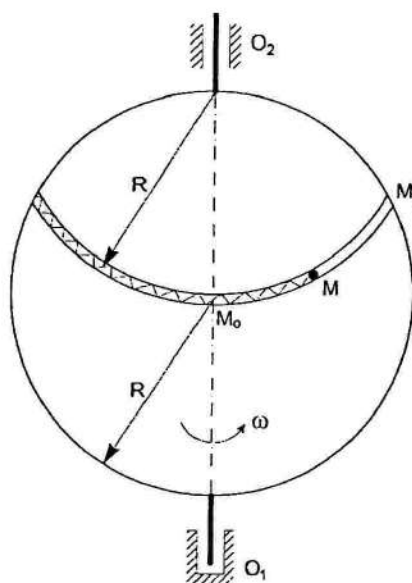
$$\vec{f} = x = \frac{g \sqrt{2} - 1}{2 \omega^2} \cos(\omega t) + \frac{3 - g \sqrt{2}}{2 \omega^2}$$

1. Homogeni disk mase m i poluprečnika R obrće se oko svoje vertikalne ose O_1O_2 . U disk je urezan kružni žljeb poluprečnika R po kome može da klizi bez trenja tačka M mase m . Tačka je vezana oprugom nepoznate krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{R\pi}{3}$. U početnom trenutku, tačka se nalazila u položaju M_0 bez početne relativne brzine, dok se disk obrtao ugaonom brzinom $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Odrediti ugaonu brzinu diska u trenutku kada se tačka nađe na njegovoj osi obrtanja (položaj M_1). Odrediti krutost opruge c iz uslova da se tačka zaustavi u položaju M_1 .

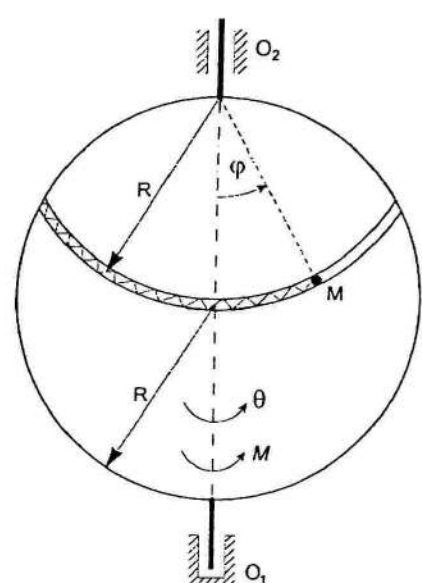
2. Disk poluprečnika R obrće se oko svoje vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω . U disk je urezan kružni glatki žljeb poluprečnika R po kome može da se kreće tačka M mase m . Tačka je vezana oprugom krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{2R\pi}{3}$. U početnom trenutku, tačka se nalazila na osi obrtanja diska (položaj M_0) bez početne relativne brzine. Ako je $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ i $c = \frac{9}{4\pi^2} \frac{mg}{R}$, odrediti relativnu brzinu tačke u položaju M_1 . Odrediti ukupnu reakciju veze koja deluje na tačku u položaju M_1 .



Zadatak 1.



Zadatak 2.



Zadatak 3.

3. Homogeni disk mase m i poluprečnika R može da se obrće oko svoje vertikalne ose O_1O_2 . Ugao obrtanja diska određen je uglom θ . U disk je urezan kružni žljeb poluprečnika R po kome može da se kreće bez trenja tačka M mase m . Položaj tačke unutar žljeba određen je uglom φ , kao što je prikazano na slici. Tačka je vezana oprugom krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{R\pi}{3}$. Na disk deluje spreg sila momenta intenziteta M u naznačenom smeru.

a) Za date generalisane koordinate (θ, φ) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema.

b) Odrediti $M(\varphi)$, tj. zavisnost momenta od ugla φ tako da se disk obrće konstantnom ugaonom brzinom ω . U početnom trenutku važi $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$.

oktober 21

② vertikalna ravan

$$\omega = \text{const.} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

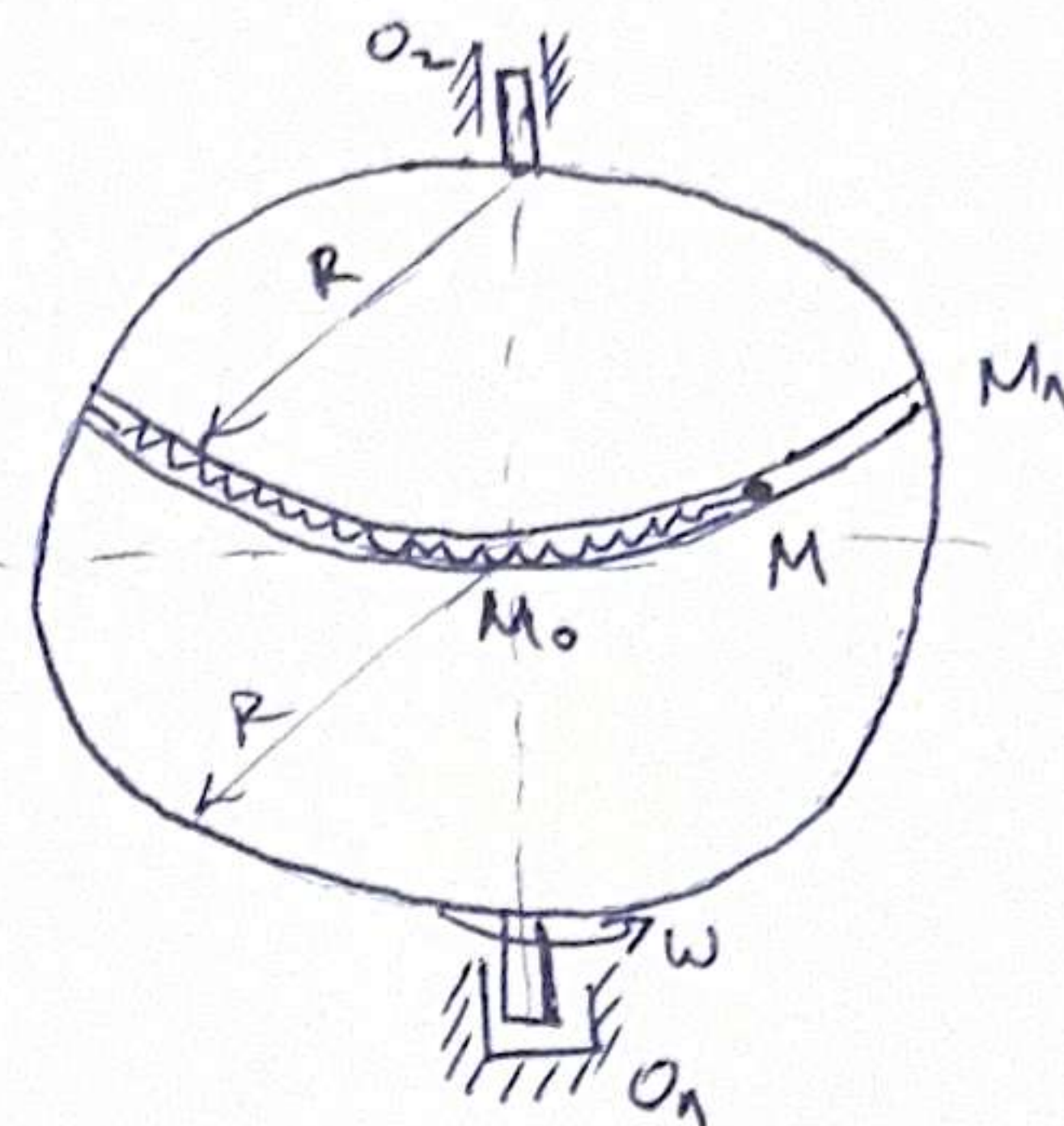
M: m

opruha: $\epsilon = \frac{g}{4\pi^2} \frac{\omega g}{R}$, $\ell_0 = \frac{2}{3} R\pi$

t_0 : položaj M_0 , $v_{r0} = 0$

t_n : položaj M_n

$v_r(t_n) = ?$, $\alpha(t_n) = ?$



$$\vec{m}\vec{a}_r = \vec{m}\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^{\text{in}} + \vec{F}_{\text{cor}} + \vec{N}_n + \vec{N}_c$$

$$\vec{m}\vec{g} = m\vec{g} \cdot (-\vec{j})$$

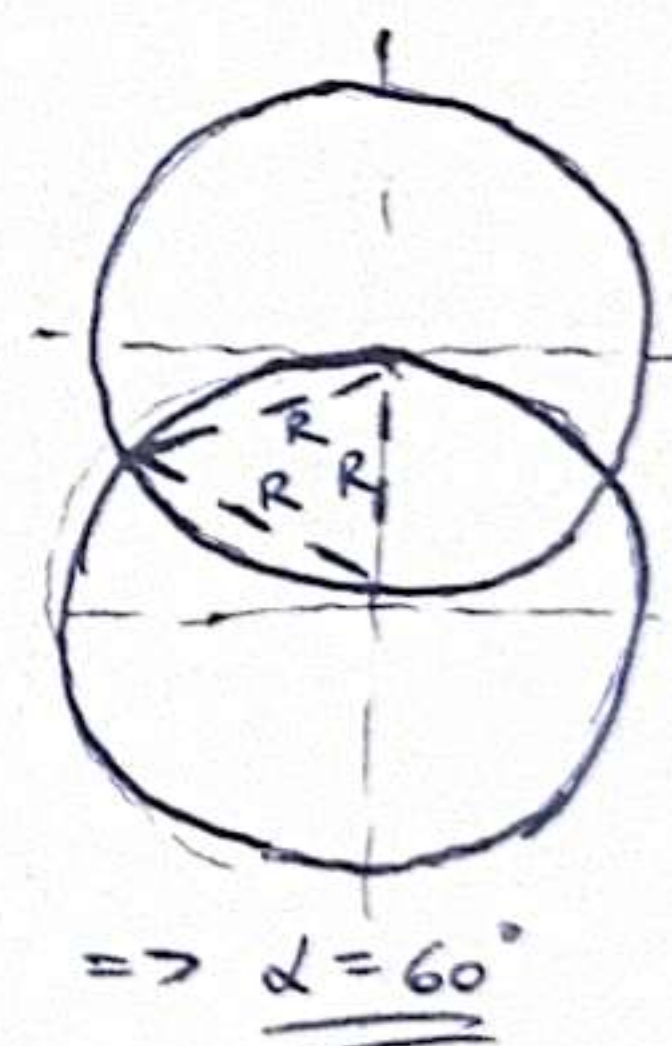
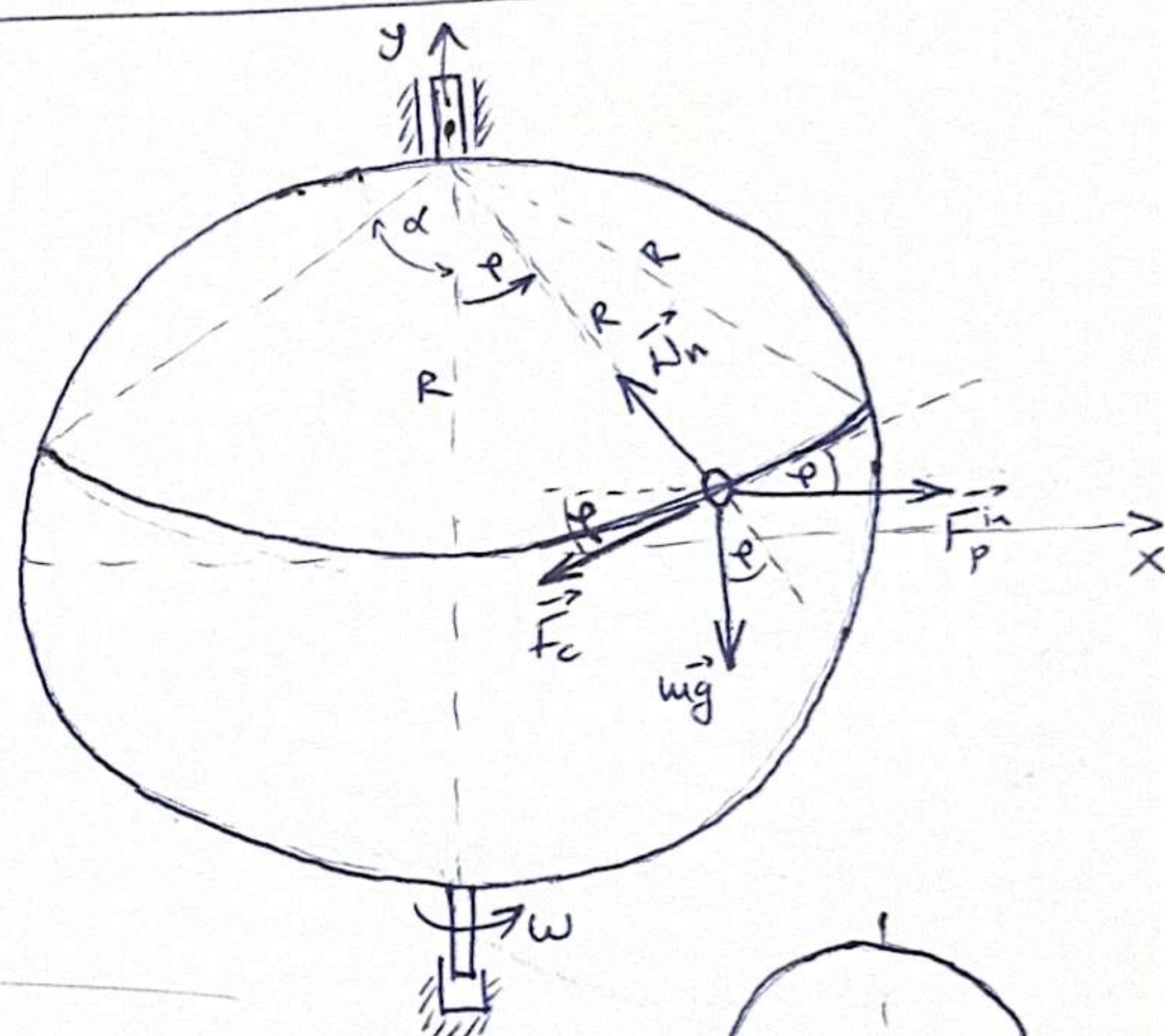
$$\vec{F}_c = \epsilon \cdot \Delta \ell \cdot (-\vec{i}) = \epsilon \cdot ((\alpha + \varphi)R - \frac{2}{3}R\pi) =$$

$$\vec{F}_p^{\text{in}} = -m(\vec{a}'_{\text{on}} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m\omega^2 x \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}'_r = 2m \cdot \omega \cdot \dot{x} \cdot (\vec{k}') =$$

$$\vec{N}_n = N_n \cdot \vec{n}$$

$$\vec{N}_c = N_c \cdot (-\vec{k})$$



$$T_1 - T_0 = A_{\text{on}} \quad (\text{vel})$$

$$T_0 = 0, \quad T_1 = \frac{1}{2} m v_{r1}^2$$

$$A_{\text{on}} = \int_0^{R-R\cos\varphi_1} -mg dy + \int_0^{\varphi_1} -F_c ds + \int_0^{R\sin\varphi_1} F_p^{\text{in}} dx, \quad \varphi_1 = \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$A_{\text{on}} = -mgR(1 - \cos\varphi_1) - \int_{\varphi_0=0}^{\varphi_1=\frac{\pi}{3}} \epsilon \cdot ((\frac{\pi}{3} + \varphi)R - \frac{2}{3}\pi R) d(R\varphi) + \int_0^{R\sin\varphi_1} m\omega^2 x dx =$$

$$A_{\text{on}} = -mgR(1 - \frac{1}{2}) - \int_0^{\frac{\pi}{3}} -\frac{\pi}{3} R^2 d\varphi - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \epsilon \varphi R^2 d\varphi + \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 \cdot \frac{3}{4} =$$

$$A_{\text{on}} = -\frac{1}{2} mgR + \frac{g}{4\pi^2} \frac{\omega g}{R} \frac{\pi}{3} R^2 (\frac{\pi}{3} - 0) - \frac{g}{4\pi^2} \frac{\omega g}{R} R^2 \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} m \frac{g}{R} R^2 \frac{3}{4} =$$

$$A_{\text{on}} = mgR(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{3}{8}) = 0 \Rightarrow \boxed{v_{r1} = 0}$$

$$n: \frac{m v_r^2}{R_k} = -mg \cos \varphi - F_p^m \sin \varphi + N_n$$

postavimo $t_1: v_{r1} = 0, \varphi_1 = 60^\circ$

$$0 = -mg \frac{1}{2} - m \omega^2 R \sin \varphi_1 \sin \varphi_1 + N_n$$

$$0 = -\frac{1}{2} mg - m \frac{g}{R} R \frac{3}{4} + N_n$$

$$\boxed{N_n = \frac{5}{4} mg}$$

$$z: 0 = F_{\text{cor}}^m - N_G$$

$$N_G = F_{\text{cor}}^m = 2m \omega \dot{x}$$

postavimo $t_1: v_{r1} = 0 \rightarrow \dot{x}_1 = 0$

$$\boxed{N_G = 0}$$

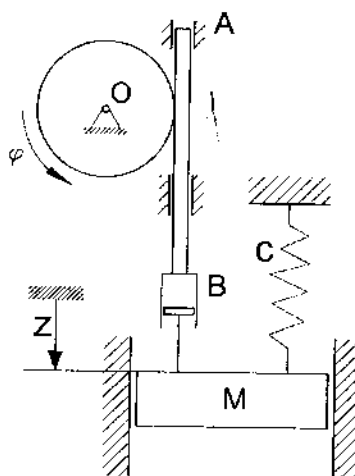
$$\Rightarrow \boxed{L = N_n = \frac{5}{4} mg}$$

МЕХАНИКА 3

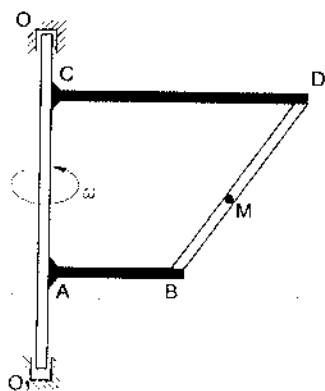
30. септембар 2017.

1. Два хоризонтална штапа AB (маса m и дужине R) и CD (маса $2m$ и дужине $2R$) круто су спојени за вертикалну осовину OO_z . За крајеве ових штапова заварена је глатка цев BD занемарљиве масе (слика 1). У почетном тренутку тачка M масе m се налазила у положају B и пуштена је да се креће кроз цев BD из стања релативног мировања. Одредити максимално растојање између штапова AB и CD да би тачка стигла у положај D ако је у почетном тренутку угаона брзина система $\omega_0 = \sqrt{g/R}$.

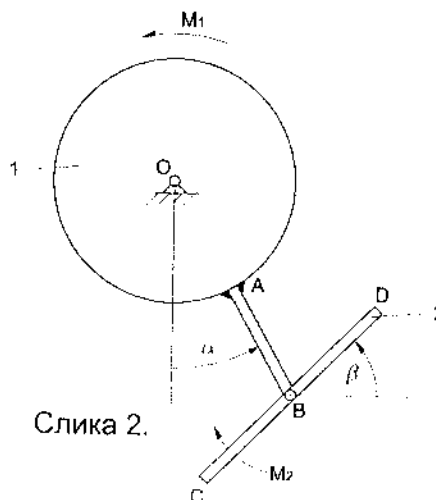
2. Зупчаник полупречника $R = 1\text{ m}$ обрће се око непокретне хоризонталне осе која пролази кроз тачку O , при чему се угао обртања мења по закону $\varphi = \sin(t)$ [рад] (позитиван смер угла обртања је дат на слици). Зупчаник покреће зупчасту летву AB која се креће дуж вертикалних вођица. За крај B летве везан је цилиндар пригушивача. Тело M масе $m = 1\text{ kg}$, везано је за клип пригушивача и опругом крутости $c = 20\text{ N/m}$ за непокретну тачку. Кретањем клипа у цилиндру пригушивача јавља се сила отпора кретању пропорционална првом степу брзине клипа у односу на цилиндар. Коefицијент пропорционалности је $\nu = 8\text{ Ns/m}$. Одредити коначну једначину кретања тела M ако је у почетном тренутку оно мировало у положају статичке равнотеже. За координатни почетак узети положај статичке равнотеже (Оса z је усмерена вертикално наниже).



3. Материјални систем састоји се од тела 1, кога чине круто спојени диск полупречника R масе m и штап AB дужине R масе m , и тела 2-штапа CD дужине $2R$ масе $2m$ (слика 2). У тачки B зглобно су везани тело 1 и тело 2 тако да је $\overline{CB} = \overline{BD}$. На тело 1 дејствује спрег сила интензитета момента M_1 , а на тело 2 спрег сила интензитета момента M_2 . Ако се систем налази у вертикалној равни, написати диференцијалне једначине кретања система за задате генерализане координате.



Слика 1.



Слика 2.

oktober 17

② $R=1\text{m}$
vertikalna ravan

$$\varphi = \sin(t)$$

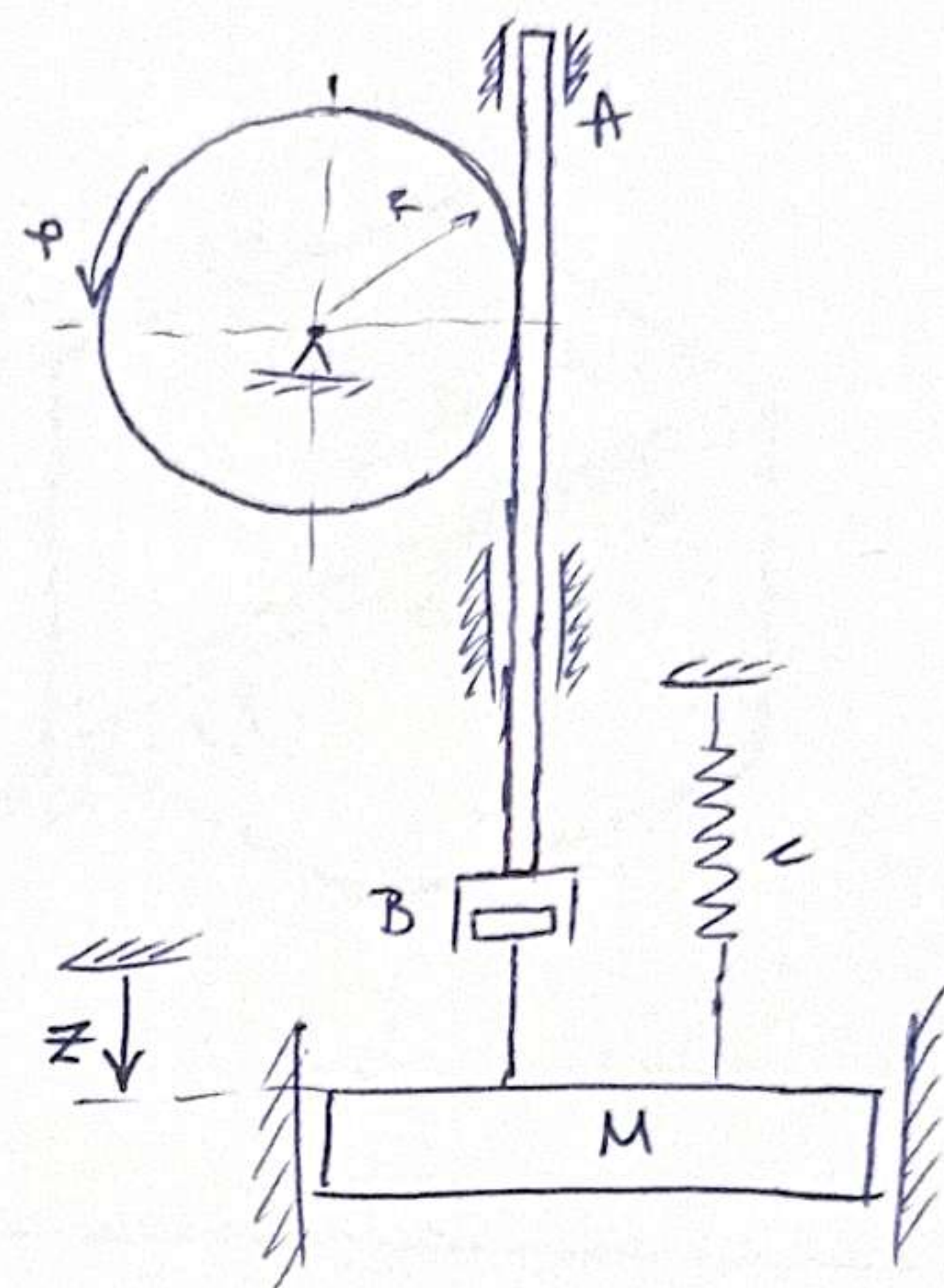
1: $m=1\text{kg}$

opruga: $c=20 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

prigušivač: sila proporcionalna prvom stepenu brzine
koef. prop: $\delta=8 \frac{\text{N}\cdot\text{s}}{\text{m}}$

$$z(t)=?$$

t_0 : mirno stanje
položaj st. ravnoteže
(to je koordinatni početak)



položaj st. rav.

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{elst}}$$

z: $0 = mg - c \cdot f_{\text{st}}$

protiv. položaj

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p$$

z: $m\ddot{z} = mg - c(z + f_{\text{st}}) - \delta(\dot{z} + R\dot{\varphi})$

$$1 \cdot \ddot{z} = -20 \cdot z - 8 \cdot \dot{z} - 8 \cdot 1 \cdot \cos t$$

$$\ddot{z} + 8\dot{z} + 20z = -8 \cos(t)$$

$$\left(\begin{matrix} 2G_1=8 \\ G_1=4 \end{matrix} \right), \quad \omega^2=20, \quad h=-8, \quad \Omega=1$$

($\omega=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$)

$$\ddot{z} + 2G_1\dot{z} + \omega^2 z = h \cos(\Omega t)$$

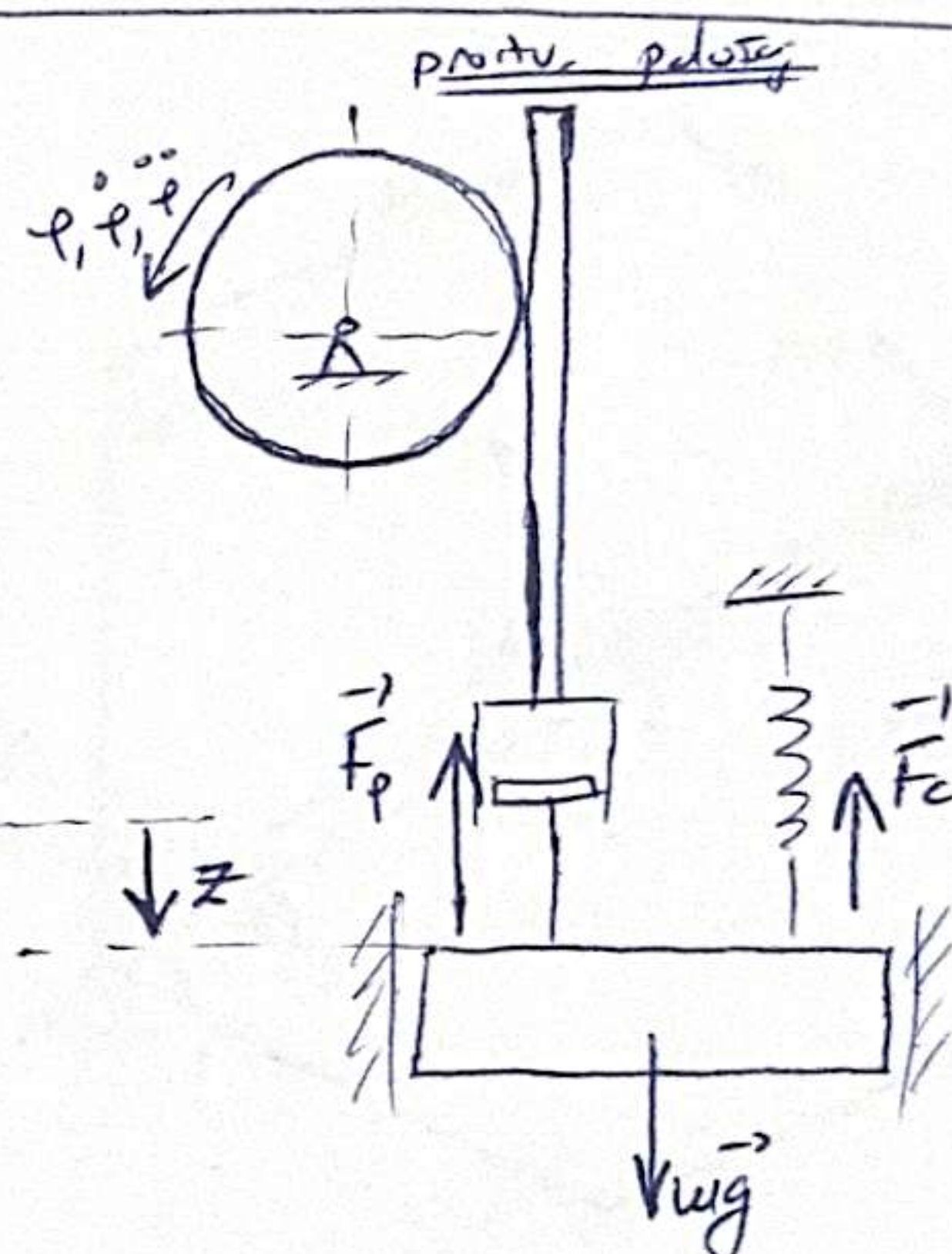
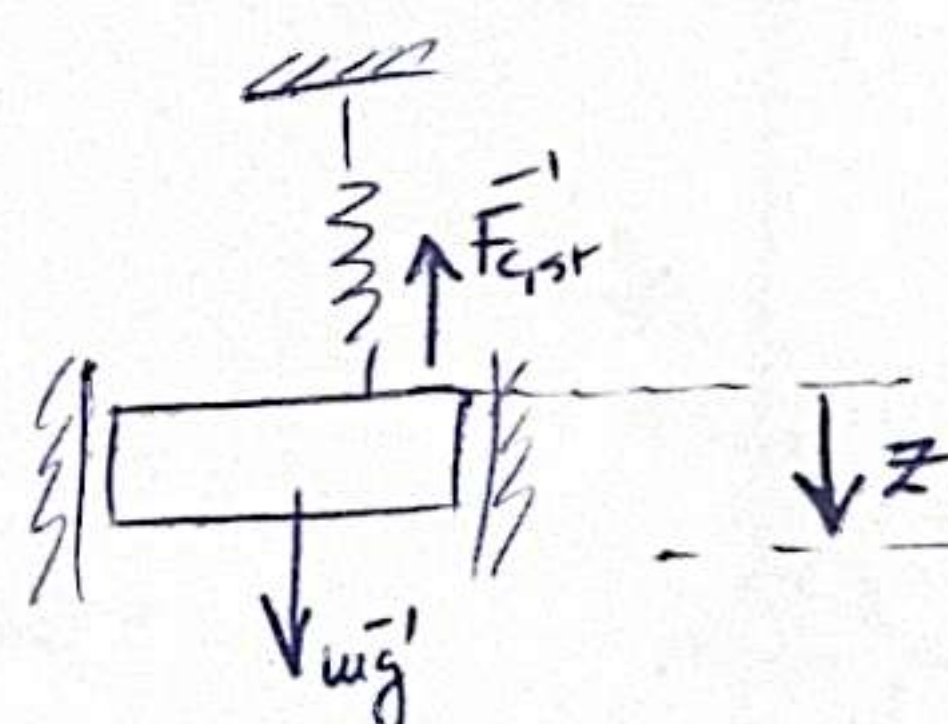
4: $\lambda^2 + 2G_1\lambda + \omega^2 = 0$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2G_1 \pm \sqrt{4G_1^2 - 4\omega^2}}{2} = -G_1 \pm \sqrt{G_1^2 - \omega^2}$$

$$\lambda_{1/2} = -4 \pm \sqrt{16-20} = -4 \pm 2i \quad (\alpha=-4, \beta=2)$$

$$z_h = e^{-4t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t)$$

položaj st. ravnoteže



P: $G(t) = h \cos(\Omega t) = e^{0t} (h \cos(\Omega t) + 0 \sin(\Omega t))$, $(\alpha=0, \beta=\Omega=1)$

$$z_p = t^0 e^{0t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t), \quad \dot{z}_p = \Omega (-A \sin \Omega t + B \cos \Omega t),$$

$$\ddot{z}_p = \Omega^2 (-A \cos \Omega t - B \sin \Omega t)$$

$$\cos(\Omega t) (-\Omega^2 A + 8\Omega B + 20A) + \sin(\Omega t) (-\Omega^2 B - 8\Omega A + 20B) = h \cos(\Omega t) + 0 \sin(\Omega t)$$

$$\begin{cases} -1^2 A + 8 \cdot 1 \cdot B + 20A = -8 \\ -1^2 B - 8 \cdot 1 \cdot A + 20B = 0 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{19 \cdot 8}{425}, \quad B = -\frac{64}{425}$$

$$z = e^{-4t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) - \frac{8}{425} (19 \cos t + 8 \sin t)$$

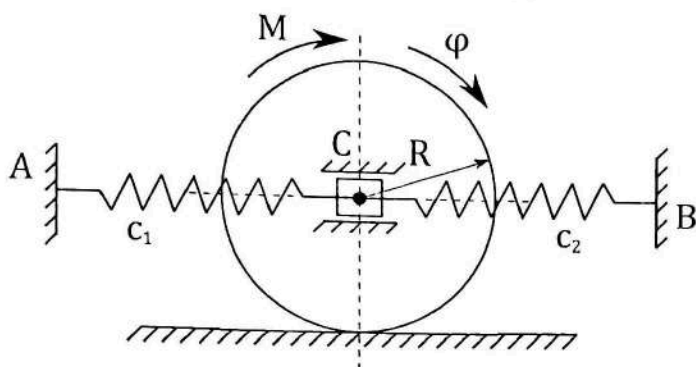
$$\ddot{z} = -4e^{-4t} (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + e^{-4t} (-2C_1 \sin 2t + 2C_2 \cos 2t) - \frac{8}{425} (-19 \sin t + 8 \cos t)$$

$$z(t_0) = C_1 - \frac{19 \cdot 8}{425} = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{152}{425}$$

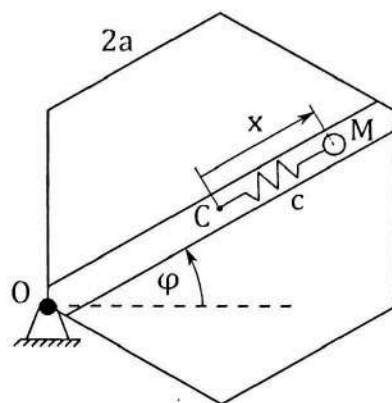
$$\dot{z}(t_0) = -4C_1 + 1 \cdot 2C_2 - \frac{64}{425} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{336}{425}$$

$$z = \frac{8}{425} (19 e^{-4t} \cos 2t + 4 e^{-4t} \sin 2t - 19 \cos t + 8 \sin t)$$

1. Диск полупречника $R = 2\text{ m}$ и масе 2 kg може да се котрља без клизања по непокретној подлози. На диск делује спрег сила интензитета момента спрега $M = 64\text{ Nm}$. За центар диска C је зглобно везан клизач масе 1 kg , који може да се креће по глатким хоризонталним вођицама, као што је приказано на Сл. 1. За центар диска су такође везане две опруге: опруга крутости $c_1 = 12\text{ N/m}$ чији је други крај везан за непокретну тачку A , и опруга крутости $c_2 = 2c_1$ чији је други крај везан за непокретну тачку B . У почетном тренутку систем је мировао, а опруге су биле ненапрегнуте. Одредити закон кретања диска $\varphi = \varphi(t)$.



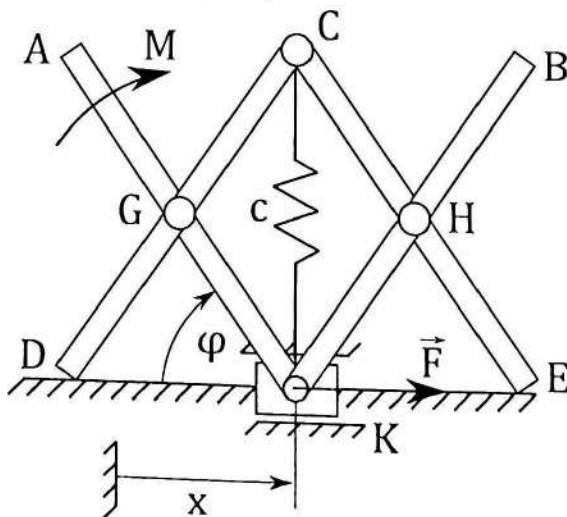
Слика 1



Слика 2

2. На Сл. 2 приказан је правилни шестоугао странаца $2a$, који се може обртати око хоризонталне осе која пролази кроз теме O , по закону $\varphi = (\sqrt{g/a})t$. Дуж дијагонале шестоугла, која полази из темена O , урезан је жљеб унутар којег може да се креће материјална тачка M масе m . Материјална тачка M је везана опругом крутости $c = 2mg/a$, чији је други крај везан за центар C шестоугла. Материјална тачка је у почетном тренутку мировала у положају $x_0 = a$, а опруга је била ненапрегнута. Одредити реакцију жљеба на материјалну тачку M у зависности од времена.

3. Клизач K масе $3m$ може да клизи дуж хоризонталне вођице која се налази на непокретној подлози, под дејством силе интензитета F . За клизач су у тачки K зглобно везани штапови AK и BK , једнаких маса m и дужина $2L$. На штап AK делује спрег сила интензитета момента спрега M . Штапови CD и CE (једнаких маса $2m$ и дужина $2L$) су зглобно везани на својим крајевима, у тачки C . Штап CD зглобно је везан у свом средишту за средиште штапа AK , у тачки G , док му се крај D креће по глаткој хоризонталној подлози. Штап CE зглобно је везан у свом средишту за средиште штапа BK , у тачки H , док му се крај E креће по глаткој хоризонталној подлози. Зглобови C и K су везани опругом крутости c . Написати диференцијалне једначине кретања система. За генерализане координате усвојити $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$. У почетном тренутку систем је мировао, штапови су имали вертикалан положај, а опруга је била ненапрегнута.



Слика 3

februar 22

- ② pramlji šestokotno stanice 2a
vertikalna ravan

$$\varphi = \sqrt{\frac{g}{a}} t$$

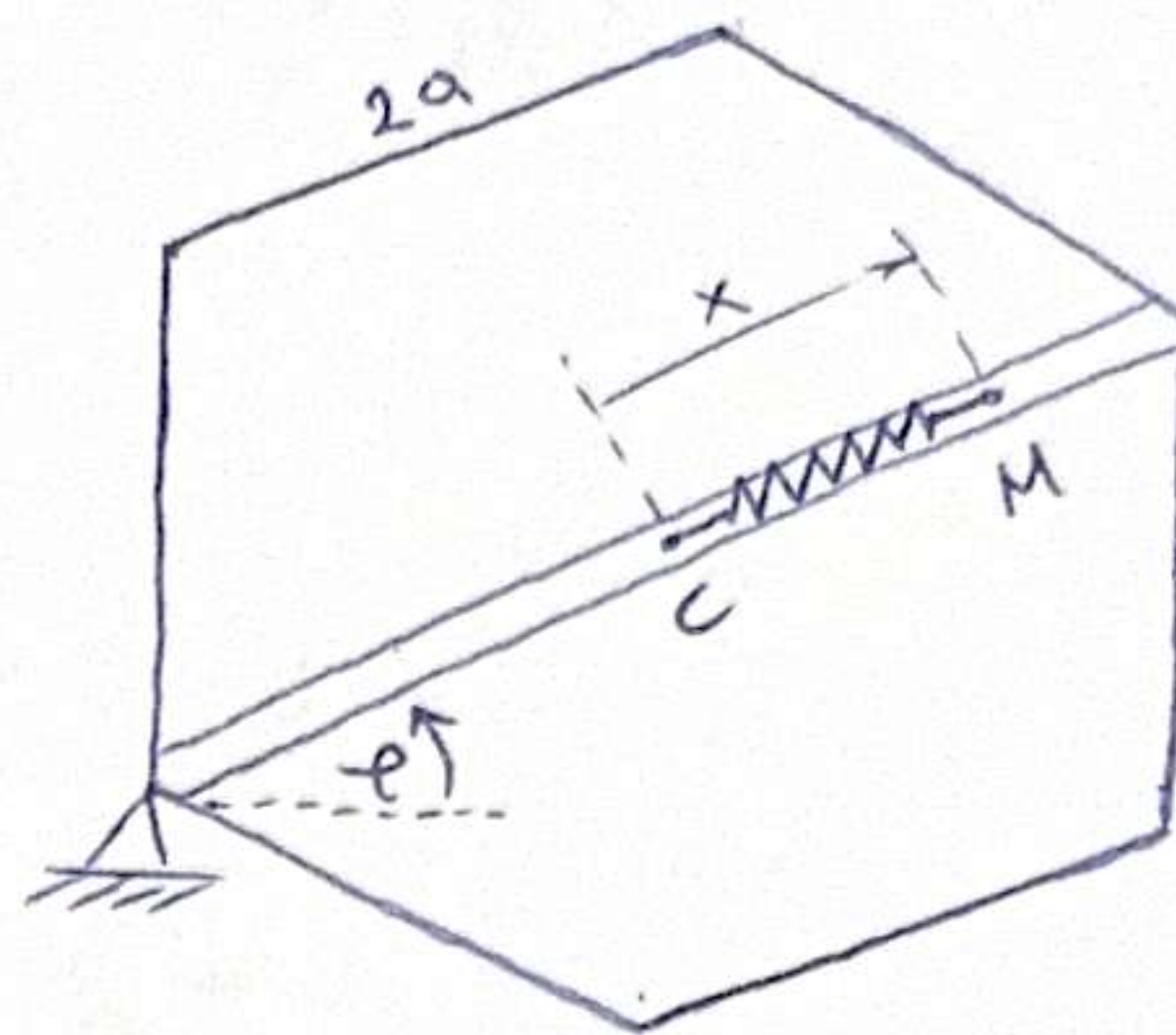
$$M: m$$

$$\text{opruga: } c = \frac{2mg}{a}$$

$$t_0: x_0 = a$$

mirovanje
opruga neoproguta

$$N(t) = ?$$



$$\vec{m}\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{cor} + \vec{N}_n + \vec{d}\vec{L}_G$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_c = c \cdot \Delta l \cdot (-\vec{i}) = c(x-a) \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^{in} = -m(\vec{a}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}) + m\omega \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

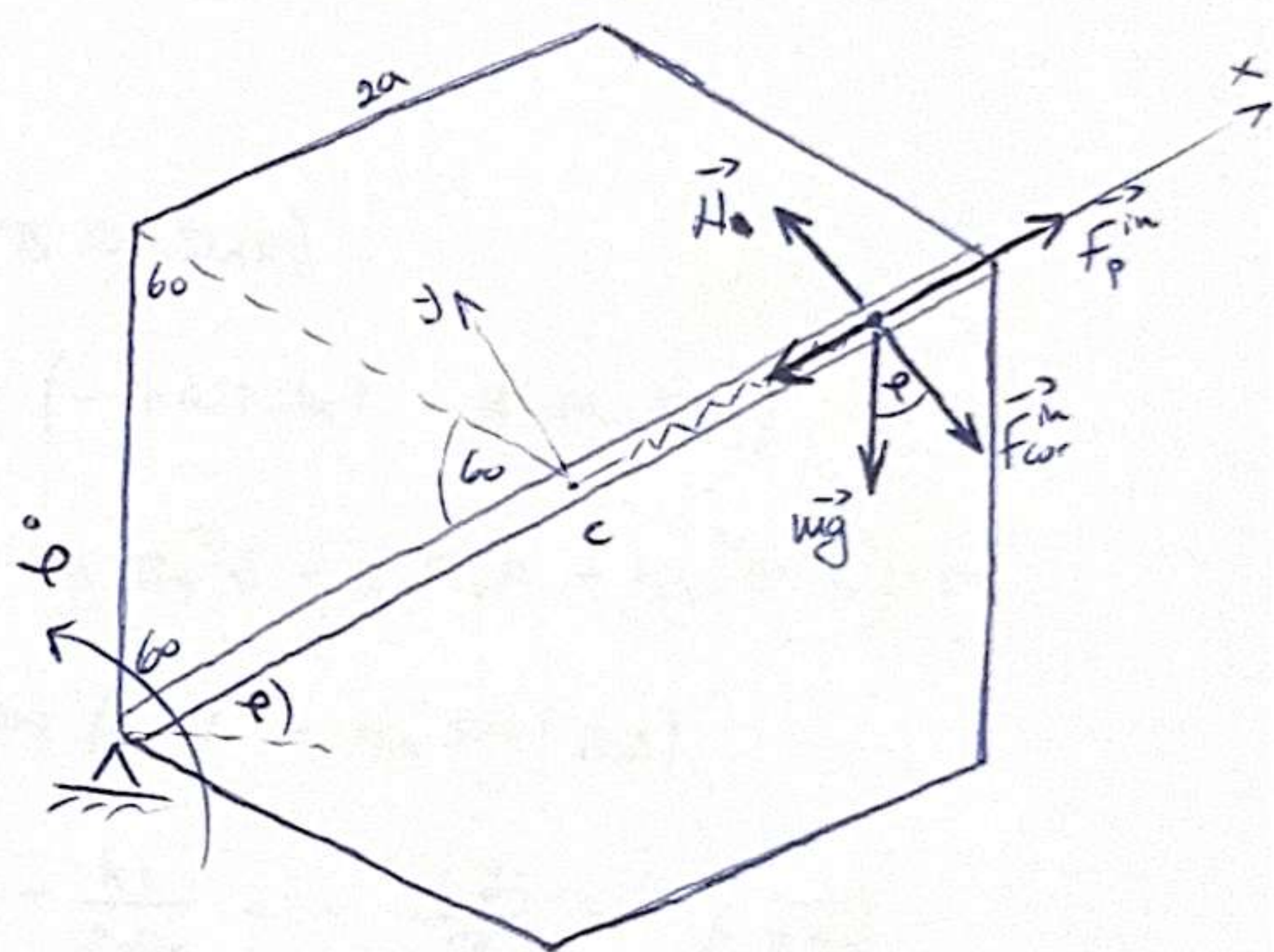
$$\vec{a}_c = \vec{a}_{cu} + \vec{a}_{ct} = \omega^2 \cdot 2a \cdot (-\vec{i}) = 2\omega^2 a \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^{in} = m \cdot 2\omega^2 a \cdot (-\vec{i}) + m\omega^2 x \cdot (\vec{i}) = m\omega^2 (2a+x) \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_{cor} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega \cdot \dot{x} \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{N}_n = N \cdot \vec{j} = \vec{N}$$

$$\vec{d}\vec{L}_G = 0$$



$$y: 0 = -mg \cos \varphi - F_{cor} + N$$

$$N = mg \cos \varphi + 2m\omega \cdot \dot{x}, \quad \dot{x} = ?$$

$$x: m\ddot{x} = -mg \sin \varphi - F_c + F_p^{in}$$

$$m\ddot{x} = -mg \sin \varphi - c(x-a) + m\omega^2 (2a+x)$$

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}mg \sin \varphi - \frac{2mg}{a}x + \frac{2mg}{a}a + m\frac{g}{a}2a + m\frac{g}{a}x$$

$$\ddot{x} + \frac{g}{a}x = 4g - g \sin(\sqrt{\frac{g}{a}}t), \quad \left(\begin{array}{l} \omega_1^2 = \frac{g}{a} \\ \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}} \end{array} \right), \quad h_1 = 4g, \quad h_2 = -g, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}}$$

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = h_1 + h_2 \sin(\omega_1 t)$$

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x = h_1 + h_2 \sin(\Omega_1 t)$$

$$H: \lambda^2 + \omega_1^2 = 0 \rightarrow x_{in} = 0 \pm i \cdot \omega_1 = 0 \pm i \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \quad \left(\begin{matrix} \alpha=0 \\ \beta=\sqrt{\frac{g}{a}} \end{matrix} \right)$$

$$x_h = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

$$P_1: G_1(t) = h_1 = e^{0t} (h_1 \cos(0t) + 0 \sin(0t)) \quad (a=0, \quad b=0)$$

$$x_{p1} = t^0 e^{0t} (A \cos 0t + B \sin 0t) = A, \quad \ddot{x}_{p1} = 0$$

$$0 + \omega_1^2 A = h_1 \rightarrow A = \frac{h_1}{\omega_1^2} = \frac{\frac{4g}{a}}{\frac{g}{a}} = 4a \rightarrow x_{p1} = 4a$$

$$P_2: G_2(t) = h_2 \sin(\Omega_1 t) = e^{0t} (0 \cos(\Omega_1 t) + h_2 \sin(\Omega_1 t)) \quad \left(a=0, \quad b=\Omega_1 = \sqrt{\frac{g}{a}} \right) \Rightarrow \text{resonance}$$

$$x_p = t^1 e^{0t} (A \cos \Omega_1 t + B \sin \Omega_1 t)$$

$$\dot{x}_p = A \cos \Omega_1 t + B \sin \Omega_1 t + \Omega_1 t (-A \sin \Omega_1 t + B \cos \Omega_1 t)$$

$$\ddot{x}_p = (-\Omega_1 A \sin \Omega_1 t + \Omega_1 B \cos \Omega_1 t) \cdot 2 + \Omega_1^2 t (-A \cos \Omega_1 t - B \sin \Omega_1 t)$$

$$\cos(\Omega_1 t) \left(-A \Omega_1^2 t + 2\Omega_1 B + \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} t \cdot A \right) + \sin(\Omega_1 t) \left(-B \Omega_1^2 t - 2\Omega_1 A + \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} t \cdot B \right) = 0 \cos(\Omega_1 t) + h_2 \sin(\Omega_1 t)$$

$$\Rightarrow B = 0, \quad -2\Omega_1 A = h_2 \rightarrow A = -\frac{h_2}{2\Omega_1} = -\frac{-g}{2\sqrt{\frac{g}{a}}} = \frac{1}{2} \sqrt{ga}$$

$$x = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + 4a + \frac{1}{2} \sqrt{ga} \cdot t \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{g}{a}} C_1 \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + C_2 \sqrt{\frac{g}{a}} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + \frac{1}{2} \sqrt{ga} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) - \frac{1}{2} \sqrt{ga} \cdot t \cdot \sqrt{\frac{g}{a}} \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

$$x(t_0) = C_1 + 4a = a \rightarrow C_1 = -3a$$

$$\dot{x}(t_0) = 0 + C_2 \sqrt{\frac{g}{a}} + \frac{1}{2} \sqrt{ga} = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{2} \frac{\sqrt{ga}}{\sqrt{\frac{g}{a}}} = -\frac{1}{2} a$$

$$\dot{x} = +3\sqrt{\frac{g}{a}} a \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{a}} a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + \frac{1}{2} \sqrt{ga} \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) - \frac{1}{2} g t \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

$$\ddot{x} = (3\sqrt{ga} - \frac{1}{2} g t) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

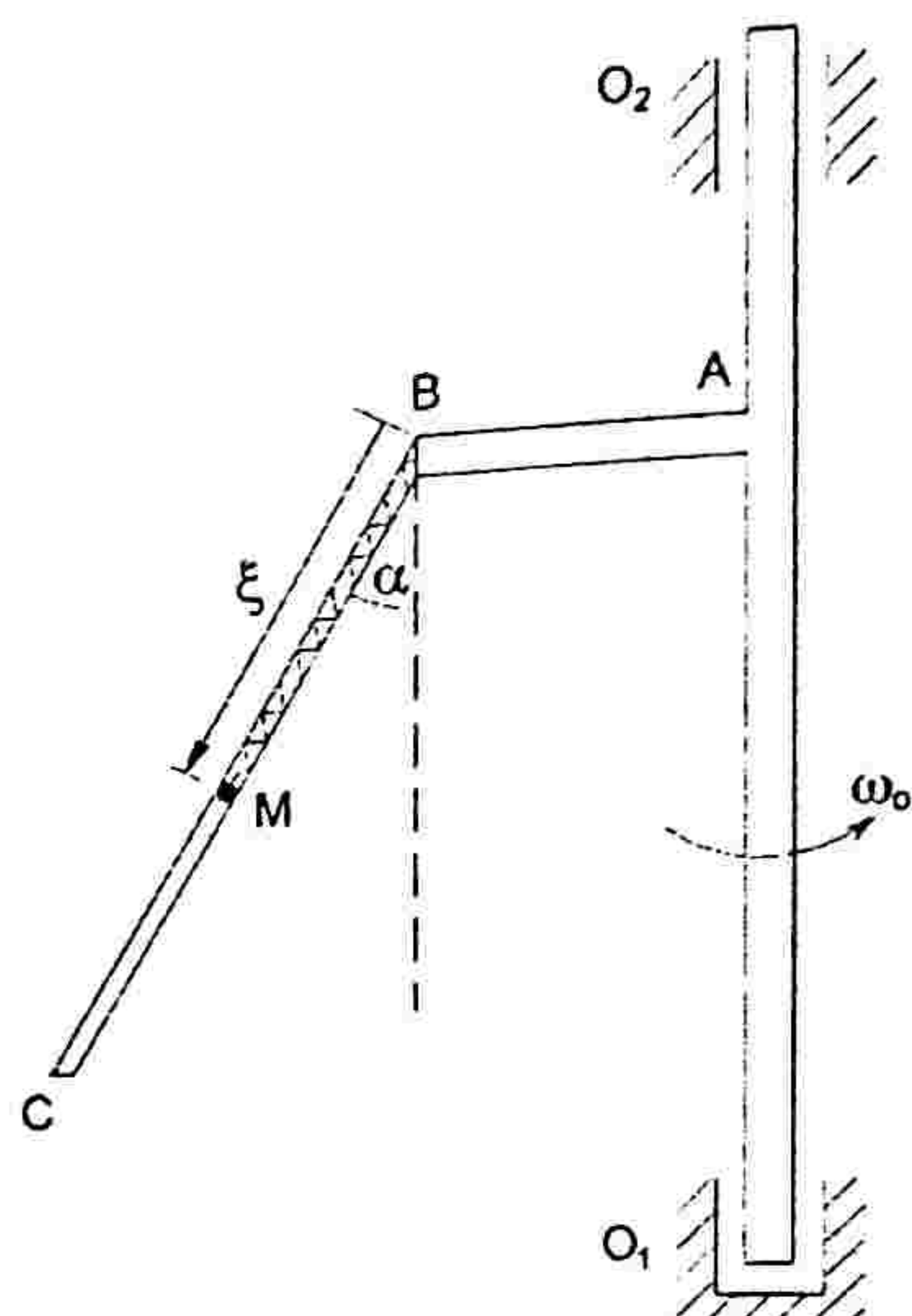
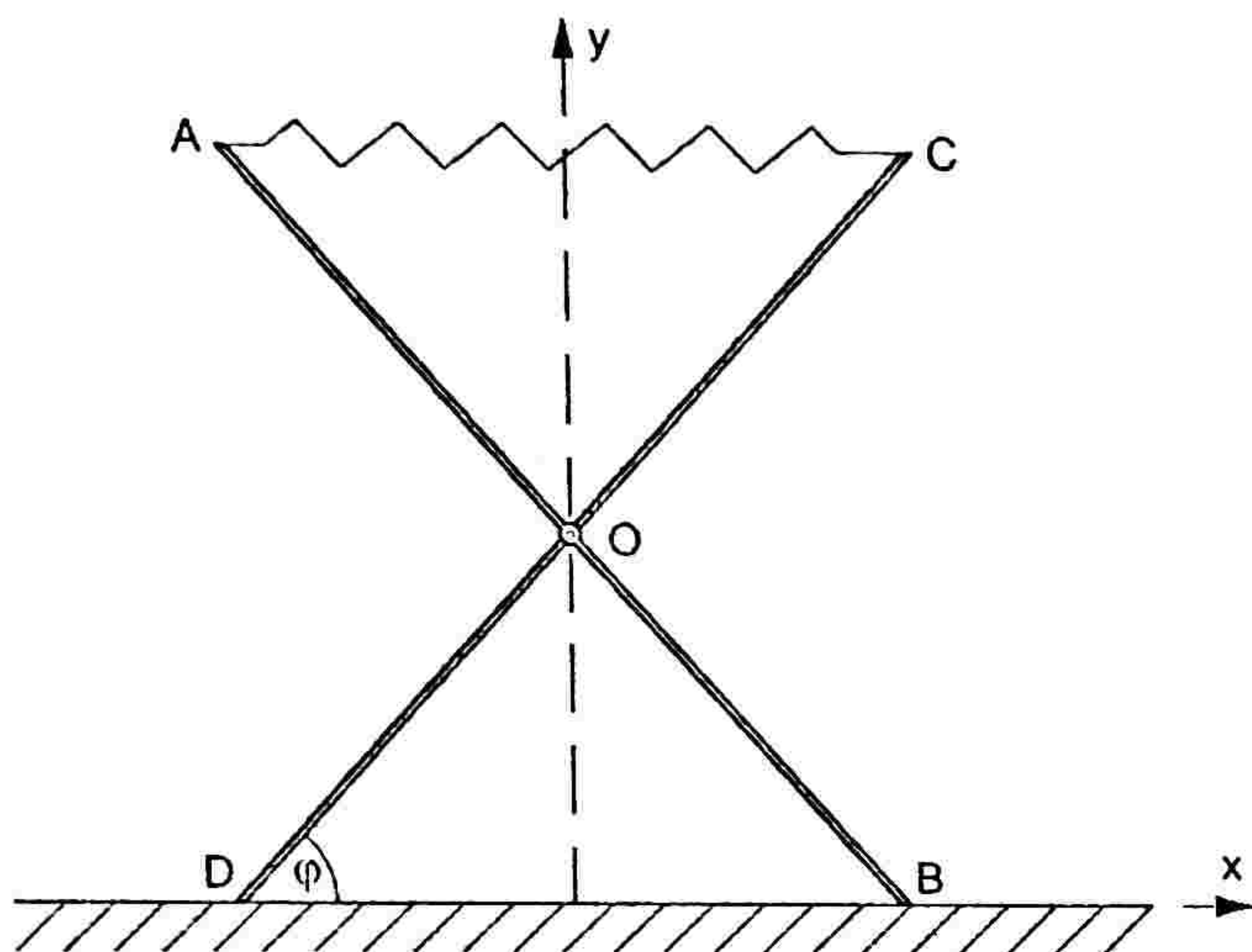
$$L = mg \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + 2m \sqrt{\frac{g}{a}} (3\sqrt{ga} - \frac{1}{2} g t) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

$$L = mg \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right) + m \sqrt{\frac{g}{a}} (6\sqrt{ga} - g t) \sin\left(\sqrt{\frac{g}{a}} t\right)$$

1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva identična homogena štapa AB i CD, od kojih je svaki mase m i dužine $2l$. Štapovi su međusobno zglobovno vezani u tački O (središte masa oba štapa). Krajevi štapa B i D mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi. Slobodni krajevi štapa A i C povezani su oprugom krutosti $c = \frac{mg}{l}$. U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapovi su mirovali i bili u položaju koji je određen uglom φ_0 ($\sin \varphi_0 = 0,8$).

a) Odrediti ugaonu brzinu štapa u trenutku t_1 kada štapovi zauzimaju ugao φ_1 u odnosu na horizontalu ($\sin \varphi_1 = 0,6$).

b) Odrediti ubrzanje tačke O u početnom trenutku t_0 .

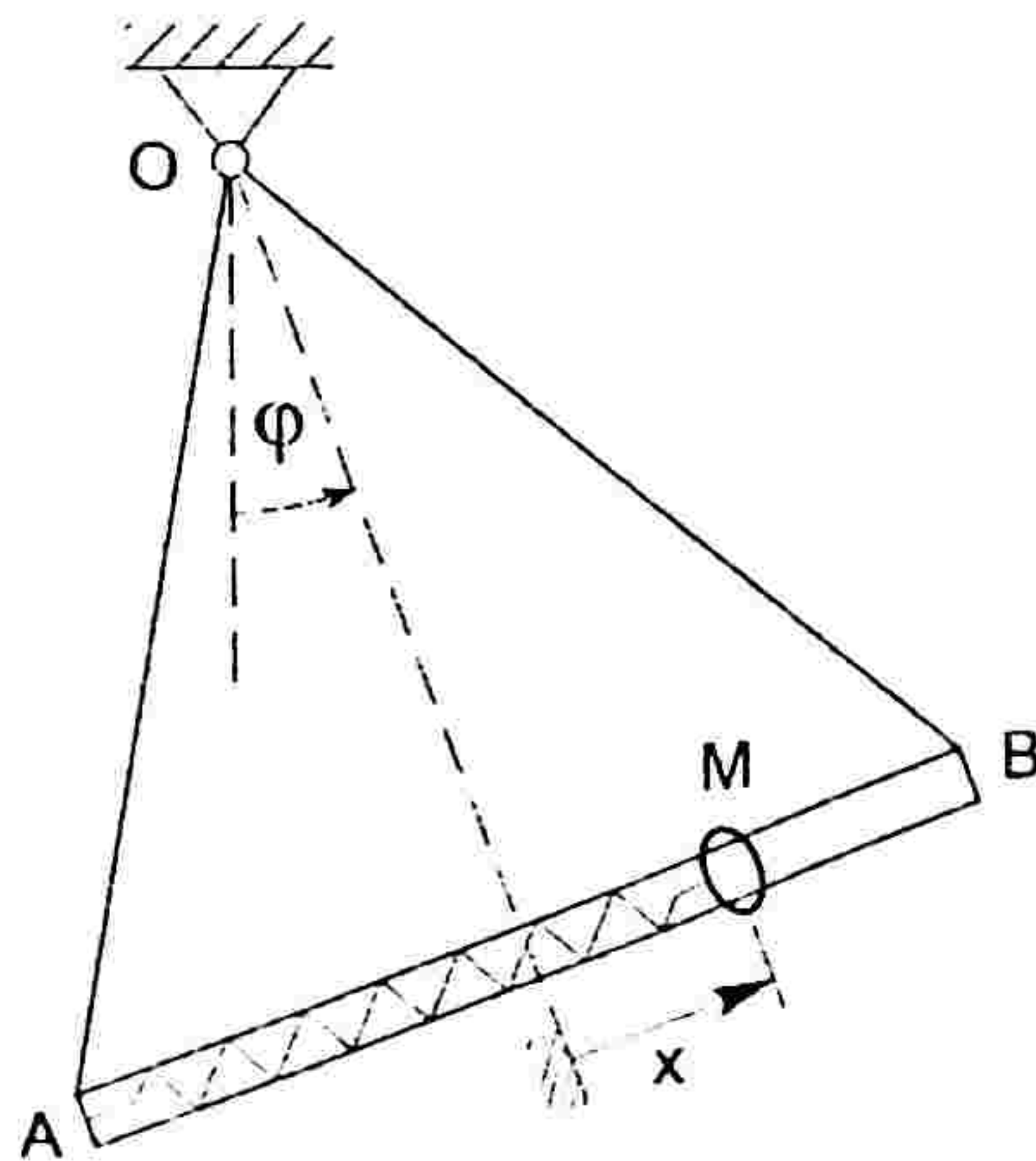


2. Kruta savijena cev ABC obrće se oko nepokretne vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω_0 u naznačenom smeru. Unutar cevi (po delu BC) može da se kreće bez trenja tačka M mase m . Tačka je vezana oprugom krutosti $c = m\omega_0^2$, drugi kraj opruge vezan je za tačku B. Dužina nenapregnute opruge iznosi l . Položaj tačke M određen je relativnom koordinatom ξ , kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = l$.

a) Ako je $\overline{AB} = l$ i $\alpha = 30^\circ$, odrediti jednačinu relativnog kretanja tačke $\xi(t)$.

b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t) = ?$

3. Homogeni štap AB mase $2m$ i dužine $2l$ vezan je pomoću dva neistegljiva kanapa za nepokretnu tačku O. Položaj štapa u odnosu na vertikalnu određeno je uglom φ , kao što je prikazano na slici. Duž štapa može da klizi bez trenja prsten M mase m . Prsten je vezan oprugom krutosti c , drugi kraj opruge vezan je u tački A. Položaj prstena u odnosu na štap određen je relativnom koordinatom x . Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$ (prsten je tada na sredini štapa). Za date generalisane koordinate (φ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Dato je: $\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB}$.



januar 21

② vertikalna ravan

$$\omega_0 = \text{const}$$

$$M: m$$

$$\text{opnoga: } c = m\omega_0^2$$

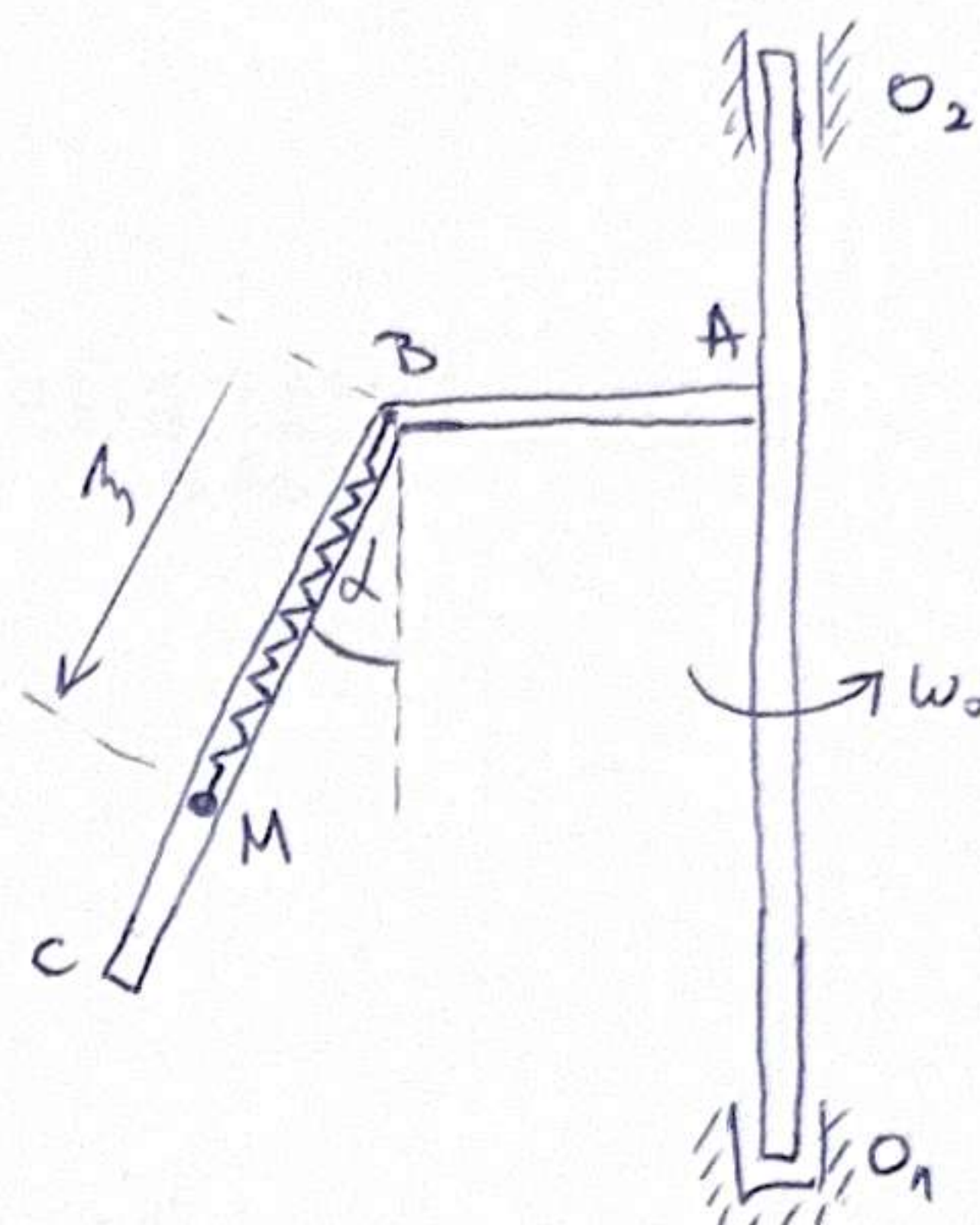
$$l_0 = l$$

$$t_0: \vec{r}_0 = l$$

relativno mirovanje

$$1) \vec{AB} = l, \alpha = 30^\circ, \vec{r}(t) = ?$$

$$2) \Delta(t) = ?$$



$$\vec{m}\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{cor}^m + \vec{N}_n + \vec{N}_c$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_c = c(\vec{r} - l) \cdot (-\vec{t})$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\vec{a}_B + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}))$$

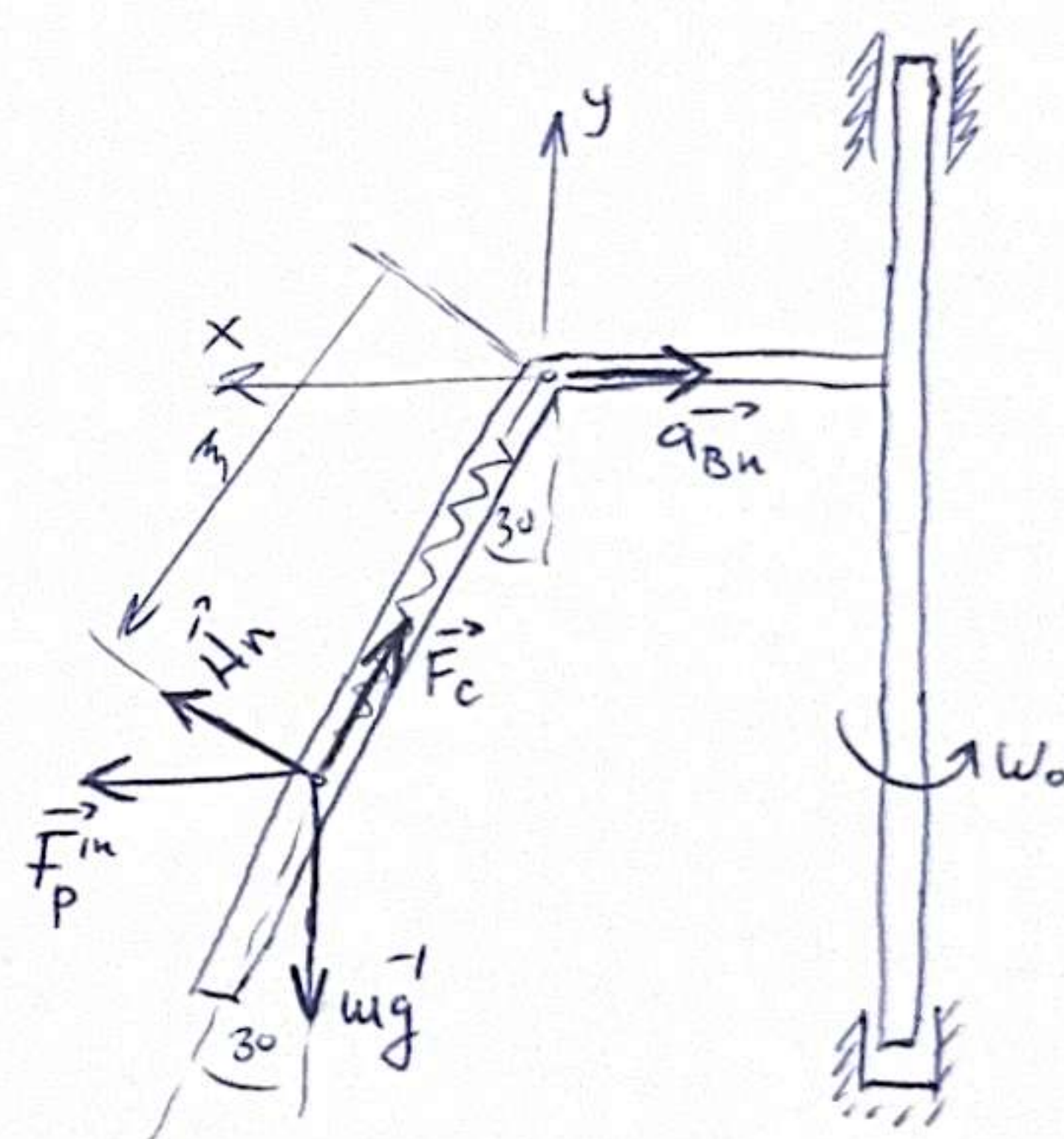
$$\vec{a}_B = \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt}^{\circ} = l \cdot \omega_0^2 \cdot (-\vec{z})$$

$$\vec{F}_p^m = m \cdot l \omega_0^2 \cdot \vec{z} + m \omega_0^2 \vec{r} \sin 30^\circ \cdot \vec{z} = m \omega_0^2 (l + \frac{1}{2} \vec{r}) \cdot (\vec{z})$$

$$\vec{F}_{cor}^m = -2m\vec{\omega} \times \vec{Q}_r = 2m\omega_0 \cdot \dot{\alpha} (-\vec{z})$$

$$\vec{N}_n = N_n \cdot (\vec{n})$$

$$\vec{N}_c = N_c \cdot (\vec{k})$$



$$t: m\ddot{\vec{r}} = mg \sin 30^\circ - c(\vec{r} - l) + F_p^m \sin 30^\circ$$

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{\sqrt{3}}{2} mg - m\omega_0^2 \vec{r} + m\omega_0^2 l + \frac{1}{2} m\omega_0^2 l + \frac{1}{4} m\omega_0^2 \vec{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{3}{4} \omega_0^2 \vec{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} g + \frac{3}{2} \omega_0^2 l, \quad \omega^2 = \frac{3}{4} \omega_0^2, \quad h = \frac{\sqrt{3}}{2} g + \frac{3}{2} \omega_0^2 l$$

$$\ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = h$$

$$\# : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega = 0 \pm i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0$$

$$\vec{r}_h = C_1 \cos(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t) + C_2 \sin(\frac{\sqrt{3}}{2} \omega_0 t)$$

$$P: \quad \theta(t) = e^{0t} (h \cos(0t) + 0 \sin 0t)$$

$$x_p = t^0 e^{0t} (A \cos 0t + 0 \sin 0t) = A, \quad \ddot{x}_p = 0$$

$$0 + \omega^2 A = h \rightarrow A = \frac{h}{\omega^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} g + \frac{3}{2} \omega_0^2 e}{\frac{3}{4} \omega_0^2} = \frac{2\sqrt{3} g + 6\omega_0^2 e}{3\omega_0^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{g}{\omega_0^2} + 2e$$

$$\zeta = C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{g}{\omega_0^2} + 2e$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{\sqrt{3}}{2} C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$$\zeta(0) = C_1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{g}{\omega_0^2} + 2e = e \rightarrow C_1 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{g}{\omega_0^2} - e$$

$$\dot{\zeta}(0) = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$\zeta(t) = \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{g}{\omega_0^2} - e\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{g}{\omega_0^2} + 2e$$

$$n: \quad 0 = -mg \sin 30 + F_p^m \cos 30 + H_n$$

$$H_n = \frac{1}{2} mg - m \omega_0^2 \left(e + \frac{1}{2} \zeta\right) \frac{\sqrt{3}}{2} = \dots$$

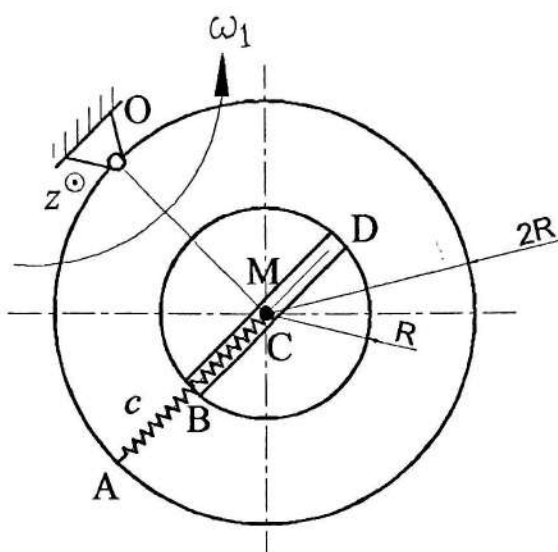
$$z: \quad 0 = -F_{cor}^m + H_G$$

$$H_G = 2m \omega_0 \dot{x} = 2m \omega_0 \cdot \dot{\zeta} \sin 30 = \dots$$

$$\boxed{N = \sqrt{H_n^2 + H_G^2} = \dots}$$

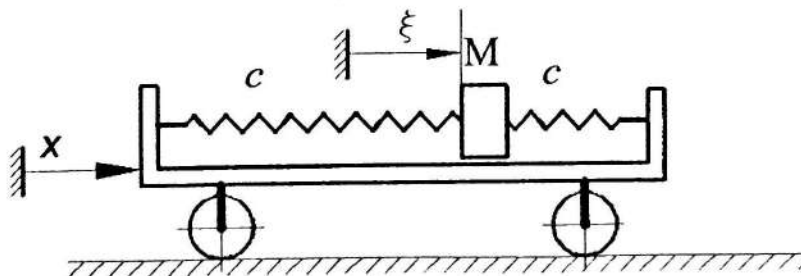
5/17 2021.

1. Horizontalna ploča oblika koakcijalnog diska poluprečnika R i $2R$, mase m i poluprečnika inercije $i_0=3R$ može da se obrće oko vertikalne ose Oz . Po kanalu BD kreće se tačka M mase m koja je oprugom krutosti c vezana za tačku A ploče. U početnom trenutku, kada se tačka M nalazila u položaju D sistem je mirovao. Odrediti ugaonu brzinu ploče (ω_1) u trenutku t_1 kada tačka M stigne u tačku C (položaj prikazan na slici). Veze su idealne. Dužina nenapregnute opruge je R .



Slika uz zadatak 1

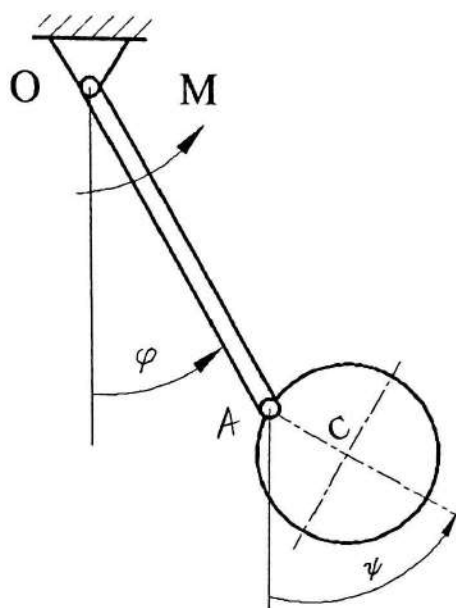
2. Teret M mase $m=1$ koji je oprugama krutosti $c=1$ vezan za kućište kreće se po idealno glatkoj površini istog kućišta. Opruga je nenapregnuta u položaju $\xi=0$ (koordinatna osa ξ vezana je za kućište). Homogeni diskovi kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Kućište se kreće po zakonu $x=\sin(t)$. U početnom trenutku sistem je mirovao i relativna koordinata tačke M bila je $\xi(0)=0$. Mase diskova i kućišta zanemariti. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M , $\xi=\xi(t)$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.



Slika uz zadatak 2

JY17 2021.

3. Štap OA dužine $2R$, mase m zglogno je vezan za nepomičnu tačku O i disk kao na slici. Homogeni disk je mase m i poluprečnika R . Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Na štap djeluje spreg sila momenta intenziteta M , pravca i smjera kao na slici. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema u odnosu na generalisane coordinate φ i ψ .



Slika uz zadatak 3

jun 21

② $\omega = 1$

$\tau = 1$

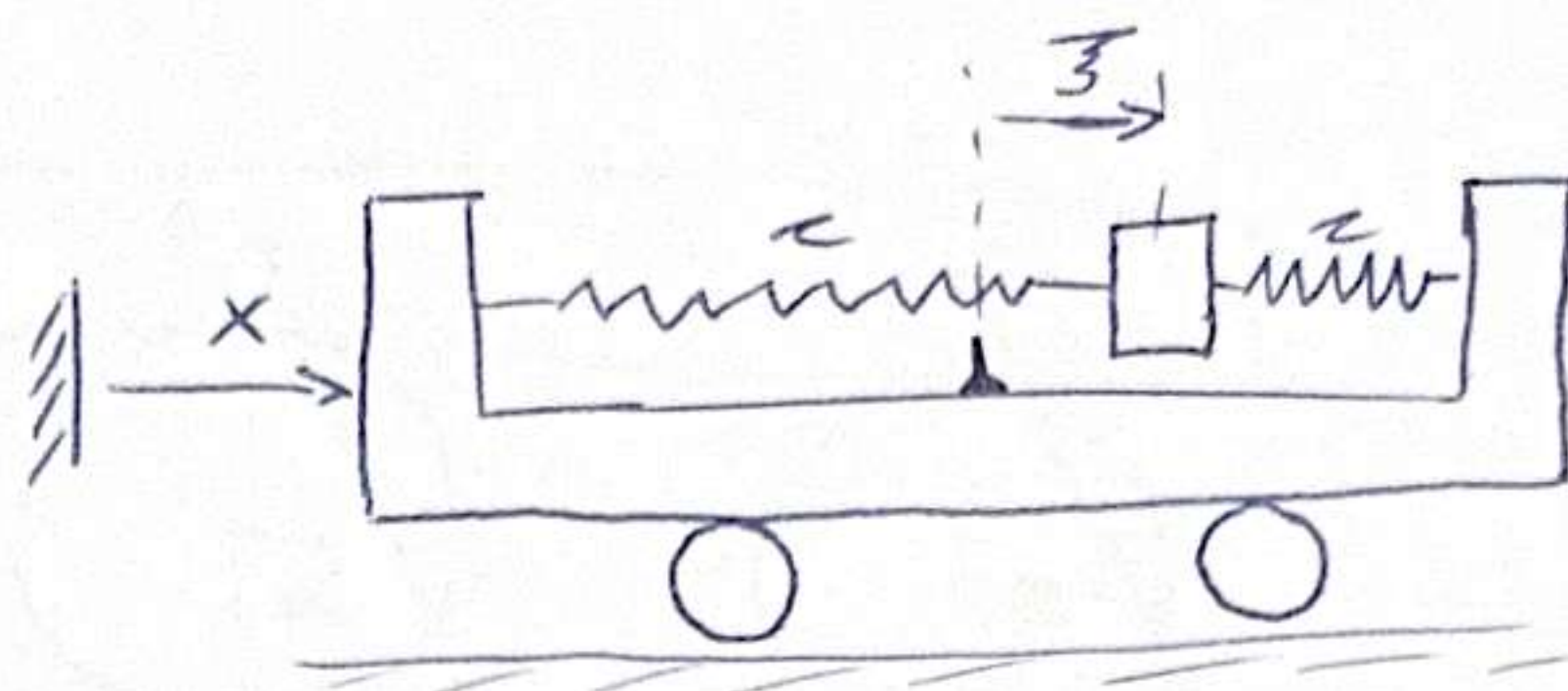
$\vec{f} = 0$ - opruga neopregnuta

$x = \sin(t)$

t_0 : sistem mirovan

$\vec{f}_0 = 0$

$\vec{f}(t) = ?$



$c_c = c + c = 2c = 2$

$\ddot{x} = -\sin(t)$

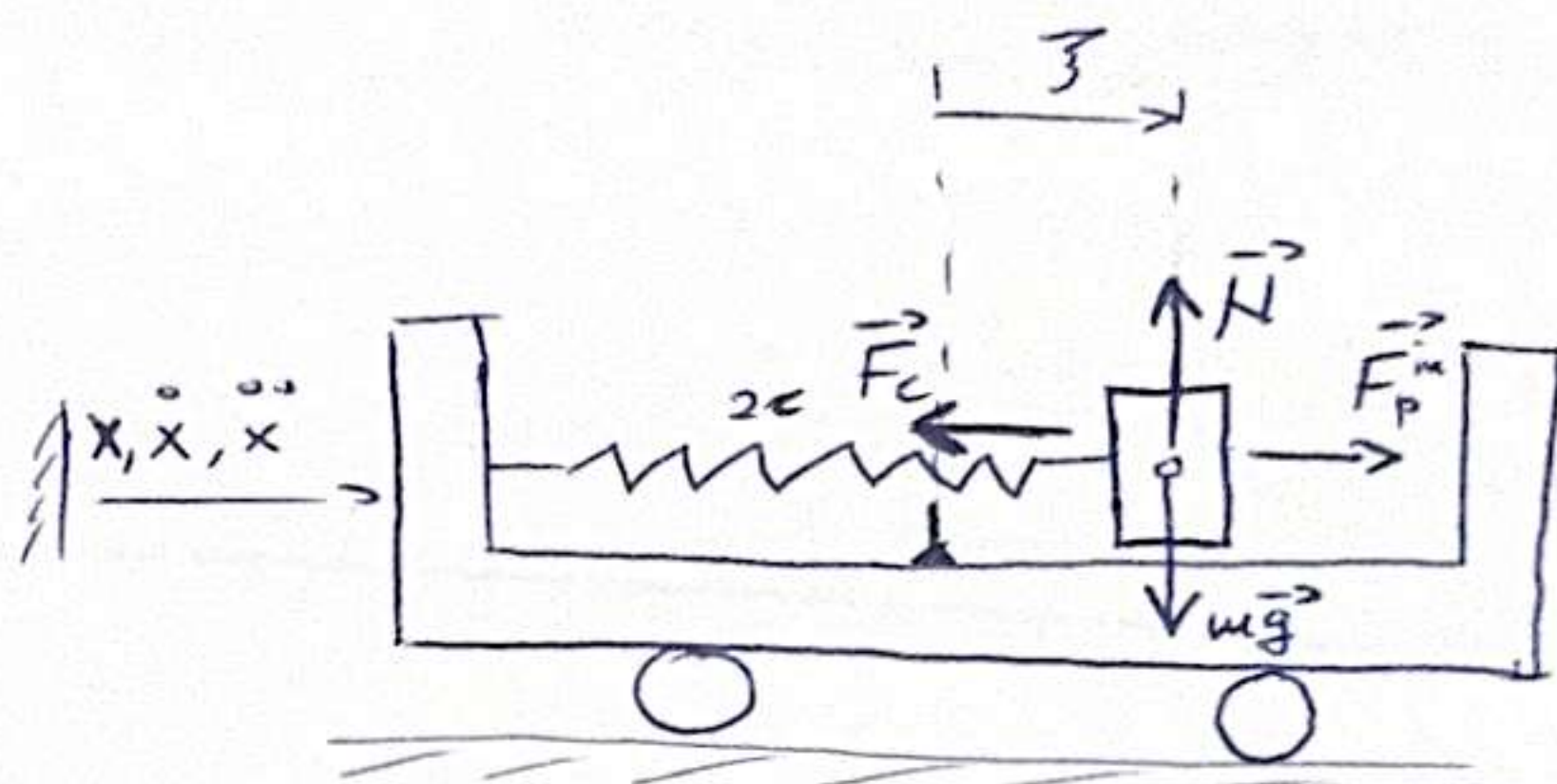
$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p + \vec{F}_{\omega} + \vec{N}$

$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$

$\vec{F}_c = 2c\vec{z} \cdot (-\vec{i})$

$\vec{F}_p = -m(\vec{a}_{or} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = -m\ddot{x} \cdot (\vec{i}) = m\sin(t) \cdot (\vec{i})$

$\vec{F}_{\omega} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 0$



$\vec{f}$: $m\ddot{\vec{z}} = -2c\vec{z} + m\sin(t)$

$\ddot{\vec{z}} = -2\vec{z} + \sin(t)$

$\ddot{\vec{z}} + 2\vec{z} = \sin(t)$

#: $\lambda^2 + 2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i\sqrt{2}$

$\vec{z}_h = C_1 \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \sin(\sqrt{2}t)$

P: $G(t) = e^{0t} (0 \cos(t) + 1 \sin(t))$

$x_p = t^0 e^{0t} (A \cos t + B \sin t)$

$\ddot{x}_p = -(A \cos t + B \sin t)$

$\cos(t)(-A + 2A) + \sin(t)(-B + 2B) = 0 \cos t + 1 \sin t$

$A = 0, B = 1$

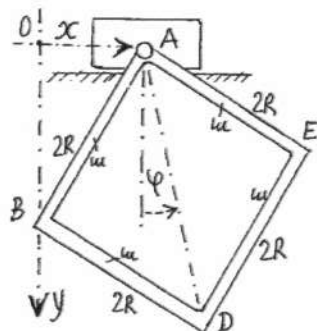
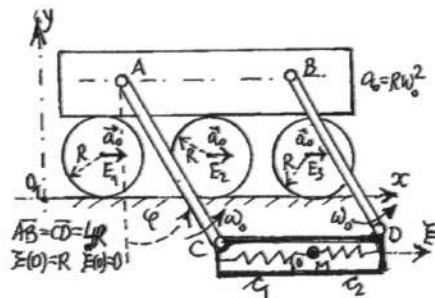
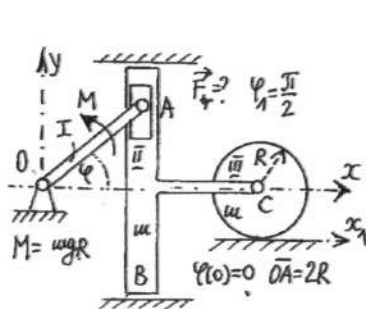
$\vec{z} = C_1 \cos(\sqrt{2}t) + C_2 \sin(\sqrt{2}t) + \sin(t)$

$\dot{\vec{z}} = -C_1 \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t) + C_2 \sqrt{2} \cos(\sqrt{2}t) + \cos(t)$

$\vec{z}(t_0) = C_1 + 0 + 0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$\dot{\vec{z}}(t_0) = C_2 \sqrt{2} + 1 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\vec{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}t) + \sin(t)$



Mehanika 3 grupa①

① Sistem je u vertikalnoj ravni. Na krivaju OA, kulisnog mehanizma, mase m i dužine $2R$, dejstvuje spreg sila momenta $M = mgR$. Kulisa II je mase m , klizi bez trenja po horizontali, klizač A je zanemarljive mase; ispust od kulise do centra diska C je dužine L ; kulisa je zglobno vezana za središte diska III, koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj podlozi, mase je m i poluprečnika R . U tačkama O, A, C su zglobne veze. U početnom trenutku $t_0 = 0$ sistem je bio u miru $\varphi(0) = 0$. Odrediti silu trenja između diska i podloge u trenutku kada je ugao krivaje $\varphi_1 = \pi/2$.

② Diskovi, poluprečnika R , kotrljaju se bez klizanja tako da im se centri kreću konstantnim ubrzanjem $a_0 = R\omega_0^2$, a po njima može da se kreće ploča (proizvoljnih dimenzija); između ploče i diskova nema proklizavanja. Štapovi AC i BD ($AC = BD = 4R$) obrću se konstantnom ugaonom brzinom ω_0 i dovode u kretanje cev CD ($CD = 4R$, $AB = 4R$). Veze u tačkama A, B, C i D su zglobne. Unutar glatke cevi CD može da se kreće tačka M mase m (ostali elementi u sistemu imaju zanemarljivu masu), vezana je za dve opruge CM i DM, krutosti $c_1 = c_2 = m\omega_0^2$; kada je tačka na sredini cevi opruge su nenapregnute; neinercijalni sistem 0ξ vezan je za cev i ima koordinatni početak u središtu cevi. U $t_0 = 0$ tačka M je bila u miru u odnosu na cev u položaju $\xi(0) = R$. Odrediti konačne jednačine relativnog kretanja tačke M, tj. $\xi(t) = ?$ Sistem je u vertikalnoj ravni, $\varphi(0) = 0$; $0xy$ je inercijalni sistem.

③ Sistem je u vertikalnoj ravni. Za klizač A mase m , koji može da klizi bez trenja po horizontalnoj ravni, zglobno je vezan ram koji čine četiri jednaka štapa, svaki mase m i dužine $2R$, kruto spojena u kvadrat ABDE. U početnom trenutku, sistem je mirovao $x(0) = 0$, $\varphi(0) = \varphi_0$. Za date apsolutne generalisane koordinate x , φ (ugao φ se meri od vertikale, AD je dijagonala rama) odrediti: 1) diferencijalne jednačine kretanja, 2) u linearnom slučaju ($\sin\varphi \approx \varphi$, $\cos\varphi \approx 1$) konačne jednačine kretanja.

januar 20

② diskovi R , $a_0 = R\omega_0^2$

$$\overline{AC} = \overline{BD} = 4R$$

$AC : BD : \omega_0 = \text{const.}$

$$\overline{CD} = \overline{AB} = 4R$$

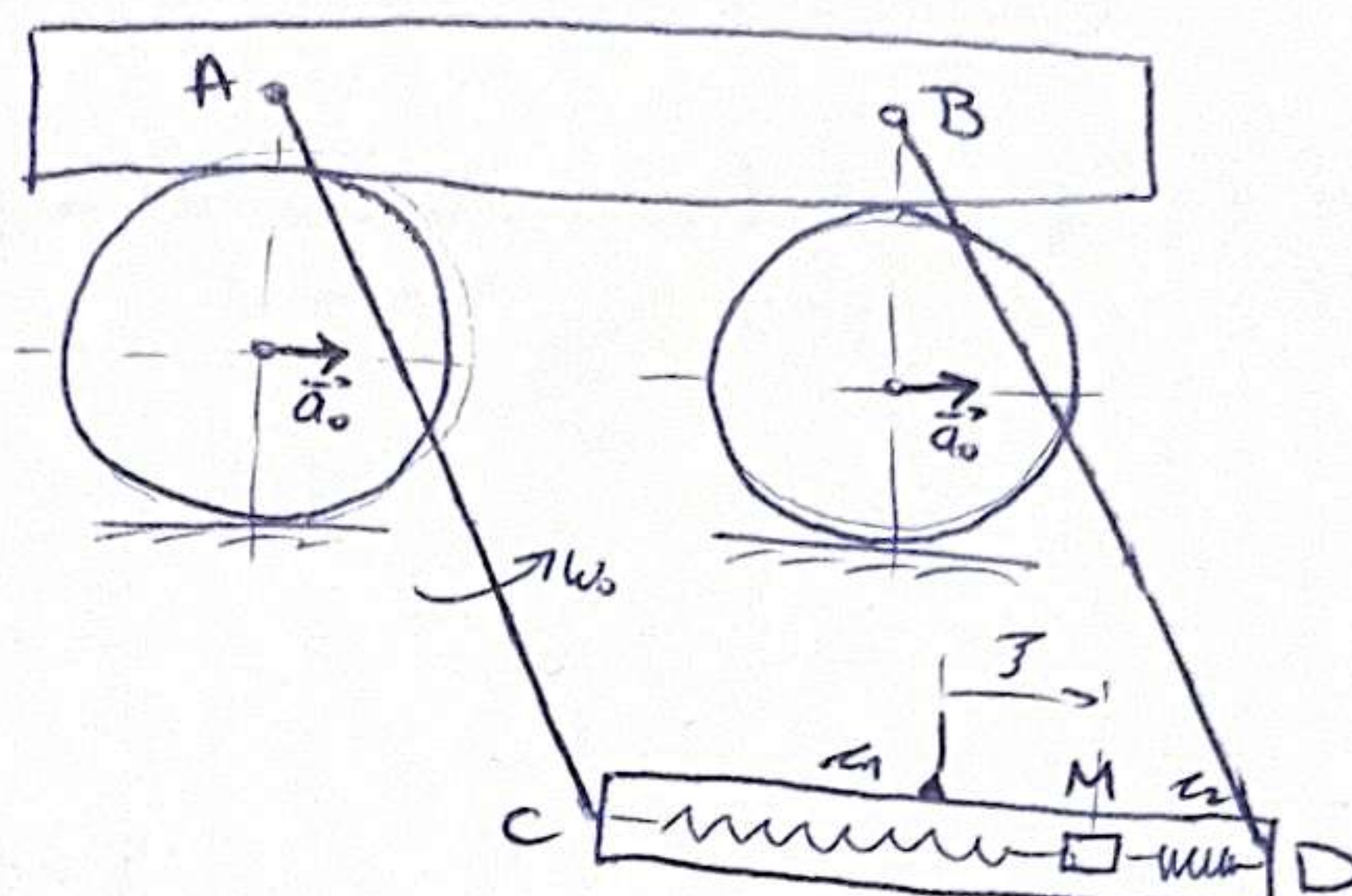
$M: m$

opruge: $\epsilon_1 = \epsilon_2 = m\omega_0^2$

kada je M na sredini,
opruge su neopregnute

I_0 : M relativno uinge
 $\vec{r}_0 = R$

$$\vec{r}(t) = ?$$



$$\epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 = 2m\omega_0^2 = \epsilon$$

$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^{in} + \vec{F}_{\omega_0}^{in} + \vec{N}$$

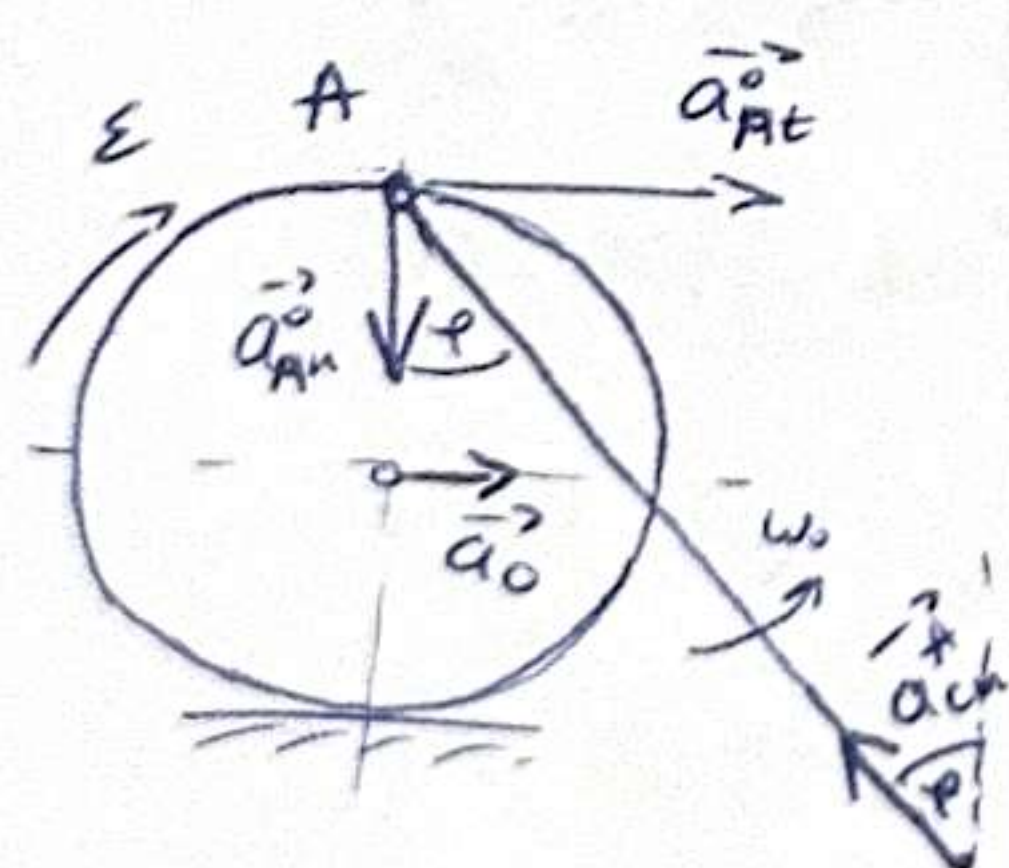
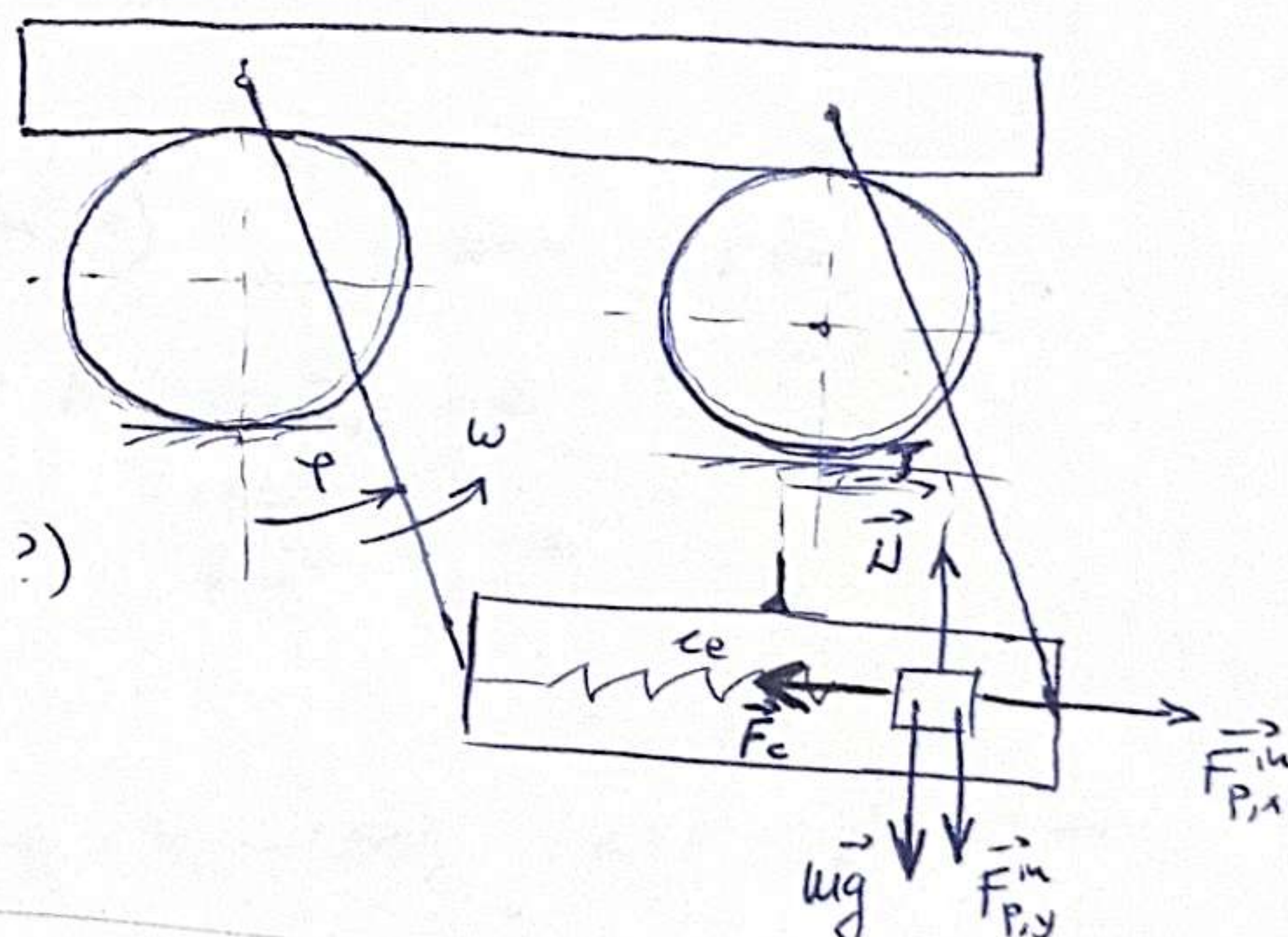
$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_c = \epsilon \cdot \vec{r} \cdot (-\vec{i}) = 2m\omega_0^2 \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^{in} = -m(\vec{a}_{on} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = -m \cdot \vec{a}_{on}$$

$$\vec{F}_{\omega_0}^{in} = -2m\vec{\omega} \times \vec{r} = 0$$

$$\vec{N} = N \cdot (\vec{j})$$



$$\varphi = \int \omega_0 dt = \omega_0 t$$

$$a_0 = a_{ot} = \epsilon \cdot R \rightarrow \epsilon = \frac{a_0}{R} = \omega_0^2$$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_0 + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At}$$

$$a_{An} = \omega_0^2 R = ?$$

verzavno van udele u treghi (nepotucka ω_0)

$$a_{At} = \epsilon \cdot R = \omega_0^2 R$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_A + \vec{a}_{cA} + \vec{a}_{ct}$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{a}_{An} + \vec{a}_{At} + \vec{a}_{cA} + \vec{a}_{ct}$$

$$a_{cA} = \omega_0^2 \cdot 4R$$

$$a_{ct} = 0$$

$$(\text{jer je } \epsilon_{Ac} = \frac{d\omega_0}{dt} = 0)$$

$$\vec{a}_c = \vec{a}_0 + \vec{a}_{Au} + \vec{a}_{At} + \vec{a}_{cn} + \vec{a}_{ct}$$

$$x: \ddot{x}_c = a_0 + a_{At} - a_{cn} \sin \varphi = R\omega_0^2 + R\omega_0^2 - 4R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) = 2R\omega_0^2 - 4R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

$$y: \ddot{y}_c = -a_{Au} + a_{cn} \cos \varphi = \dots = ? \quad - \text{verovahu nece ni trebati}$$

$$\vec{F}_p = -m \cdot \vec{a}_c = -m (\ddot{x}_c \cdot \vec{i} + \ddot{y}_c \cdot \vec{j}) = \underbrace{(m \cdot 4R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - 2mR\omega_0^2)}_{\vec{F}_{p,x}} \vec{i} + \underbrace{\ddot{y}_c \cdot m \cdot (-\vec{j})}_{\vec{F}_{p,y}}$$

$$x: m \ddot{z} = F_{p,x} - F_c$$

$$m \ddot{z} = 4mR\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - 2mR\omega_0^2 - c z$$

$$m \ddot{z} = 4mR\omega_0^2 \sin(\omega_0 t) - 2mR\omega_0^2 - 2m\omega_0^2 z$$

$$\ddot{z} + 2\omega_0^2 z = -2R\omega_0^2 + 4R\omega_0^2 \sin(\omega_0 t), \quad \omega^2 = 2\omega_0^2, \quad h_1 = -2R\omega_0^2, \quad h_2 = 4\omega_0^2 R, \quad \Omega = \omega_0$$

$$\ddot{z} + \omega^2 z = h_1 + h_2 \sin \Omega t$$

$$\# : \lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega = 0 \pm i \cdot \sqrt{2} \omega_0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = \sqrt{2} \omega_0$$

$$z_h = C_1 \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) + C_2 \sin(\sqrt{2} \omega_0 t)$$

$$P_1: C_1(t) = h_1 = e^{0t} (h_1 \cos \omega_0 t + h_2 \sin \omega_0 t), \quad a=0, \quad c=0$$

$$z_{p1} = t^0 e^{0t} (A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t) = A, \quad \ddot{z}_{p1} = 0$$

$$0 + A\omega^2 = h_1 \rightarrow A = \frac{h_1}{\omega^2} = \frac{-2R\omega_0^2}{2\omega_0^2} = -R$$

$$z_{p1} = -R$$

$$P_2: C_2(t) = h_2 \sin(\Omega t) = e^{0t} (0 \cos(\Omega t) + h_2 \sin(\Omega t)), \quad \alpha=0, \quad \beta=\Omega=\omega_0$$

$$z_{p2} = t^0 e^{0t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t), \quad \ddot{z}_{p2} = -\Omega^2 (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t)$$

$$\cos(\Omega t) (-A\Omega^2 + A\omega^2) + \sin(\Omega t) (-B\Omega^2 + B\omega^2) = 0 \cos(\Omega t) + h_2 \sin \Omega t$$

$$A=0, \quad B = \frac{h_2}{\omega^2 - \Omega^2} = \frac{4\omega_0^2 R}{2\omega_0^2 - \omega_0^2} = 4R$$

$$z = C_1 \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) + C_2 \sin(\sqrt{2} \omega_0 t) - R + 4R \sin(\omega_0 t)$$

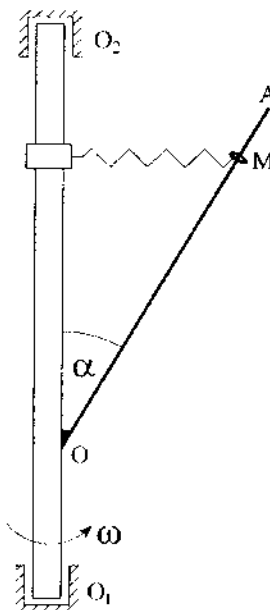
$$\dot{z} = -\sqrt{2} C_1 \omega_0 \sin(\sqrt{2} \omega_0 t) + \sqrt{2} C_2 \omega_0 \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) + 4R \omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$z(t_0) = C_1 + 0 - R + 0 = R \rightarrow C_1 = 2R$$

$$\dot{z}(t_0) = 0 + \sqrt{2} C_2 \omega_0 + 4R \omega_0 = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{4R}{\sqrt{2}} = -2\sqrt{2} R$$

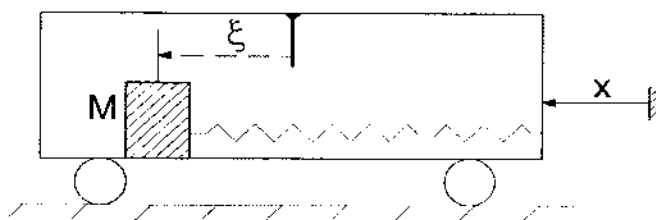
$$z = 2R \cos(\sqrt{2} \omega_0 t) - 2\sqrt{2} R \sin(\sqrt{2} \omega_0 t) - R + 4R \sin(\omega_0 t)$$

1. Po glatkoj cevi OA može da klizi prsten M mase m (slika 1). Cev je u tački O pod uglom $\alpha = 30^\circ$ zavarena za vertikalnu osovinu O_1O_2 koja može da se obrće oko vertikalne ose. Masa cevi je $2m$, a poluprečnik inercije u odnosu na osu obrtanja je $i_{O_2} = R$. Kretanje prstena ograničava horizontalna opruga krutosti $c = mg/R$. U početnom trenutku prsten je bio u položaju A u relativnom mirovanju, dužina opruge je iznosila $2R$, a ugaona brzina ω_0 . Dužina nenapregnute opruge je R . Odrediti ugaonu brzinu cevi u trenutku kada prsten stigne u položaj u kome je opruga nenapregnuta, kao i relativnu brzinu prstena u tom trenutku.



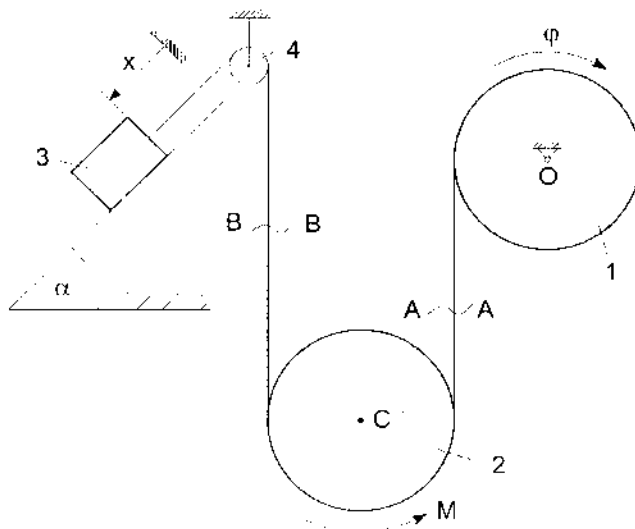
Slika 1.

2. Kolica se kreću po horizontalnoj podlozi (slika 2), zakon kretanja dat je sa $x = \sin(\omega t)$, gde je ω poznata konstanta. Unutar kolica nalazi se teret M mase m koji može da klizi po glatkoj unutrašnjoj horizontalnoj podlozi. Za teret je vezana opruga krutosti $c = 2m\omega^2$. Položaj tereta u odnosu na kolica određen je relativnom koordinatom ξ . U početnom trenutku, teret je bio u relativnom mirovanju u koordinatnom početku ($\xi = 0$), i opruga je tada bila nenapregnuta. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M .



Slika 2.

3. Sistem prikazan na slici ispod nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva homogena diska 1 i 2 mase m i poluprečnika R , i tereta 3 mase m koji može da klizi po glatkoj strmoj ravni nagiba $\alpha = 30^\circ$. Disk 1 obrće se oko horizontalne ose koja prolazi tačku O . Uže je prebačeno preko kotura 4 zanemarljive mase. Između užeta i diskova nema proklizavanja. Na disk 2 deluje spreg sila momenta $M = mgR/4$. Za zadate generalisane koordinate x i φ odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema, kao i sile u užetu u preseccima $A-A$ i $B-B$.



oktober 2 19

② $x = \sin(\omega t)$

$M: m$

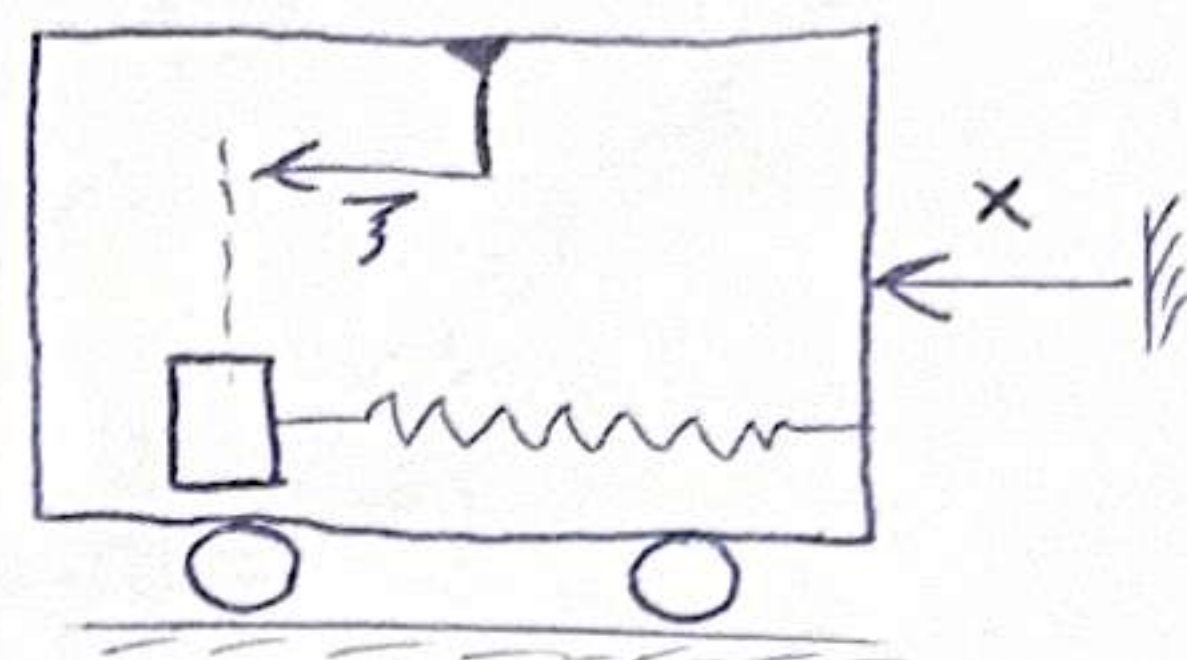
$c = 2m\omega^2$

t_0 : relativno mirovanje

$\vec{s}_0 = 0$

opreza nenapregnuta

$\vec{s}(t) = ?$



$s = \sin(\omega t) \rightarrow \ddot{s} = -\omega^2 \sin(\omega t)$

$m\ddot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{g}} + \vec{F}_c + \vec{F}_p + \vec{F}_{\text{Cor}} + \vec{N}$

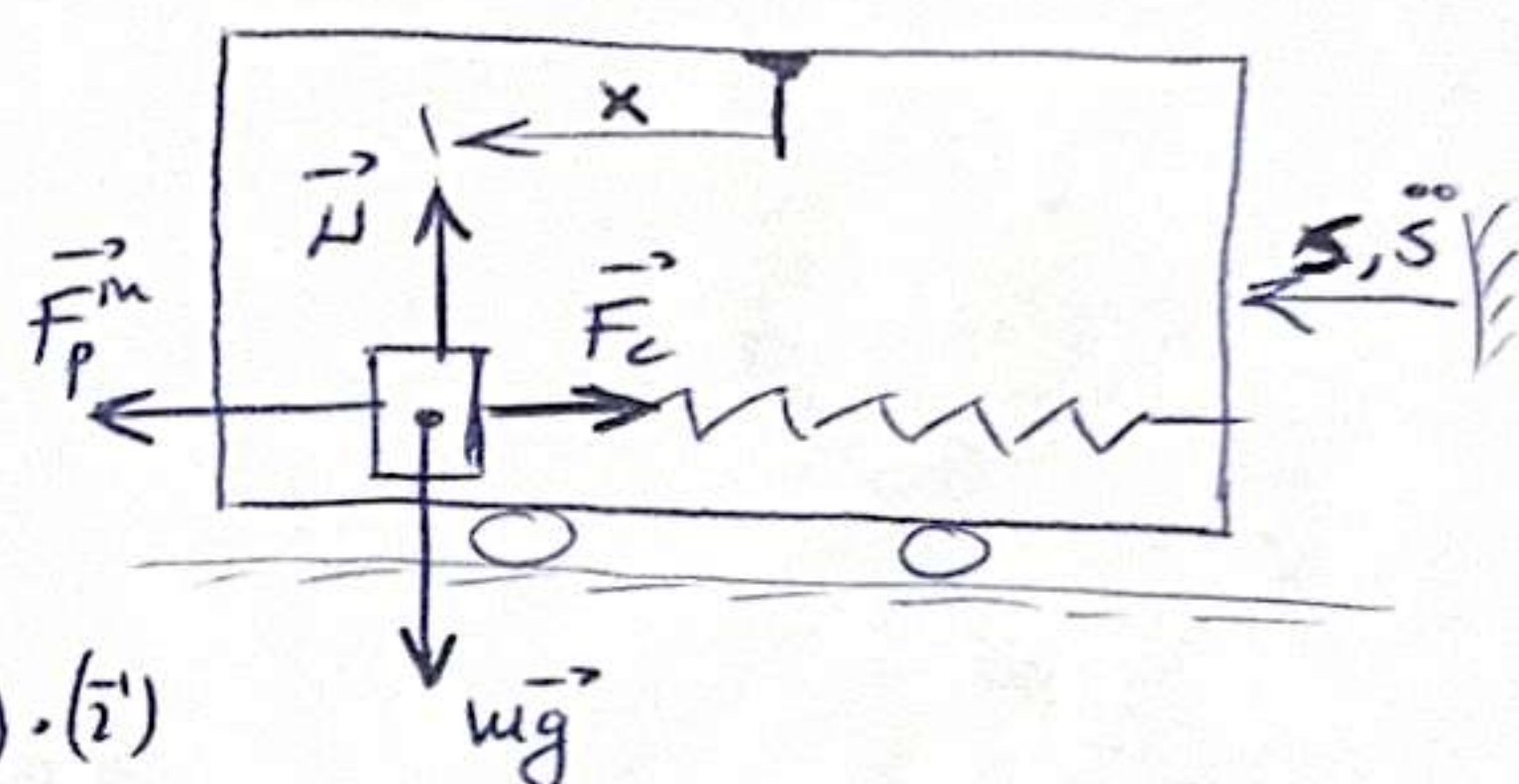
$m\ddot{\vec{g}} = +mg \cdot (-\vec{j})$

$\vec{F}_c = c \cdot \Delta l \cdot (-\vec{i}) = cx \cdot (-\vec{i})$

$\vec{F}_p = -m(\ddot{\vec{a}}_0 + \vec{s} \times \vec{\omega} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = -m\ddot{\vec{s}} \cdot (\vec{i}) = m\omega^2 \sin(\omega t) \cdot (\vec{i})$

$\vec{F}_{\text{Cor}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 0$

$\vec{N} = N \cdot \vec{j}$



$x: m\ddot{x} = -cx + m\omega^2 \sin(\omega t)$

$m\ddot{x} = -2m\omega^2 x + m\omega^2 \sin(\omega t)$

$\ddot{x} + 2\omega^2 x = \omega^2 \sin \omega t, \quad \omega_1^2 = 2\omega^2, \quad h_1 = \omega^2, \quad \Omega = \omega$
 $\ddot{x} + \omega_1^2 x = h_1 \sin \Omega t$
 $(\omega_1 = \omega\sqrt{2})$

$\# : \lambda^2 + \omega_1^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega_1 = 0 \pm i \cdot \sqrt{2}\omega \rightarrow \alpha = 0, \beta = \sqrt{2}\omega$

$x_h = C_1 \cos(\sqrt{2}\omega t) + C_2 \sin(\sqrt{2}\omega t)$

$P: G(t) = e^{0t} (0\omega_1 \Omega t + h_1 \sin \Omega t), \quad a = 0, \quad G = \Omega_1 = \omega$

$x_p = t^0 e^{0t} (A \omega_1 \Omega t + B \sin \Omega t), \quad \ddot{x}_p = -\Omega_1^2 (A \omega_1 \Omega t + B \sin \Omega t)$

$\cos(\Omega t) (-A \Omega_1^2 + A \omega_1^2) + \sin(\Omega t) (-B \Omega_1^2 + B \omega_1^2) = 0 \cos \Omega t + h_1 \sin \Omega t$

$A = 0, \quad B = \frac{h_1}{\omega_1^2 - \Omega_1^2} = \frac{\omega^2}{2\omega^2 - \omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2} = 1$

$\vec{s} = x = C_1 \cos(\sqrt{2}\omega t) + C_2 \sin(\sqrt{2}\omega t) + \sin(\omega t)$

$\dot{\vec{s}} = -C_1 \sqrt{2}\omega \sin(\sqrt{2}\omega t) + C_2 \sqrt{2}\omega \cos(\sqrt{2}\omega t) + \omega \cos(\omega t)$

$\vec{s}(0) = C_1 + 0 + 0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$\dot{\vec{s}}(0) = C_2 \sqrt{2}\omega + \omega = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\boxed{\vec{s} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\sqrt{2}\omega t) + \sin(\omega t)}$

МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799

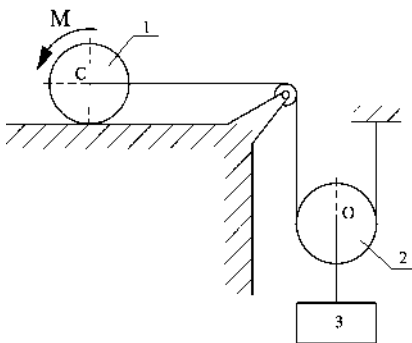
14. фебруар 2019.

Прва група

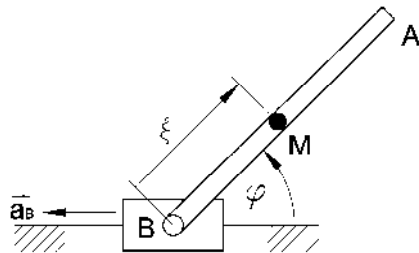
1. Хомогени диск 1, масе m и полупречника R , котрља се без клизања по хоризонталној подлози (слика 1). За центар диска 1 је везано неистегљиво уже које је пребачено преко хомогеног диска 2, масе m и полупречника R , а затим везано за непомићну тачку. За центар диска 2 неистегљивим ужетом везано је тело 3 масе m . Крак отпора котрљању диска 1 по подлози је $k = 0.1R$. Одредити интензитет момента M да би се тело 3 кретало константним убрзањем интензитета g , смера навише.

2. Цев AB , занемарљиве масе, креће се у вертикалној равни. Крајем B , цев је везана зглобно за клизач који се креће дуж хоризонталне праволинијске вођице константним убрзањем $a_B = 2g$ (слика 2). Закон промене угла је $\varphi = \omega t$. Кроз цев може да се креће куглица M масе m . У почетном тренутку куглица је била у положају B и имала почетну релативну брзину $V_{r0} = g/(2\omega)$. Одредити коначну једначину релативног кретања куглице у односу на цев ($\xi = \xi(t)$), као и укупну реакцију везе у функцији од времена.

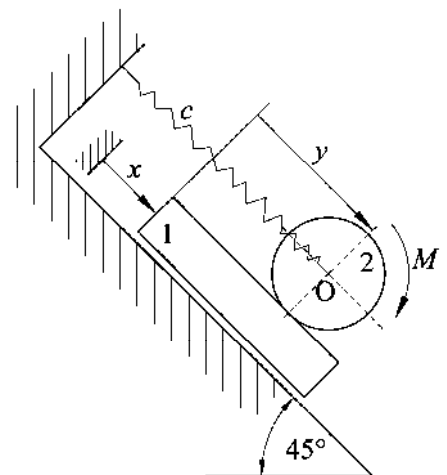
3. Материјални систем (слика 3) састоји се од тела 1, масе m и диска 2, масе m и полупречника R . На диск делује спрег момента интензитета M . Центар диска везан је опругом крутости c , чији је други крај везан за непокретну раван. Ако се диск по телу котрља без проклизавања, а систем креће по глаткој стрмој равни нагибног угла 45° , написати диференцијалне једначине кретања система за задате генерализане координате. У положају $x = y = 0$ опруга је ненапрегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

februar 19

② vertikalna ravan

$$a_B = 2g$$

$$\varphi = \omega t$$

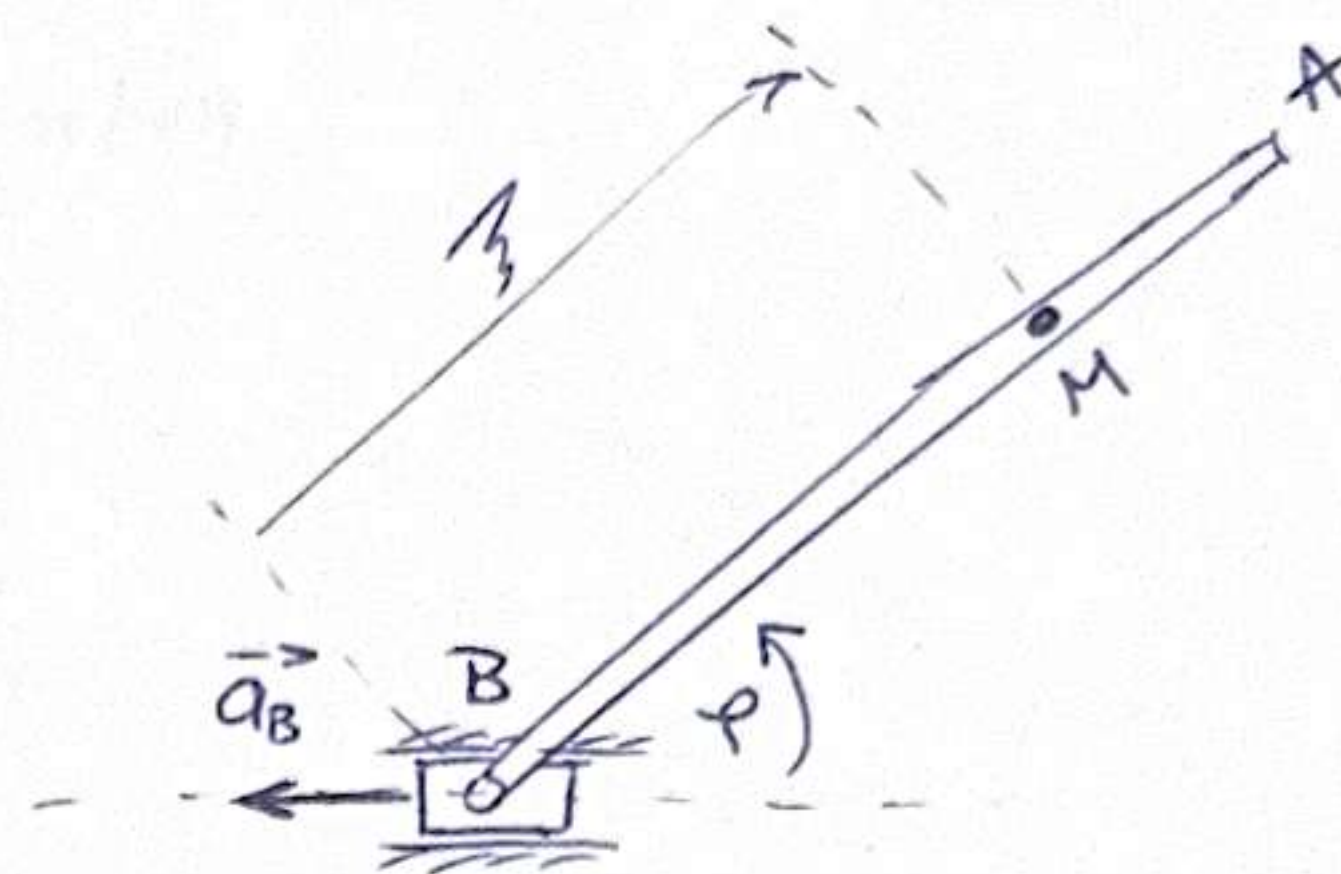
$$M: m$$

$$t_0: M \text{ je u } B$$

$$v_0 = \frac{g}{2\omega}$$

$$\vec{r}(t) = ?$$

$$N(t) = ?$$



$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_p^{\text{in}} + \vec{F}_{\text{cor}}^{\text{in}} + \vec{N}_n + \vec{N}_e$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{F}_p^{\text{in}} = -m(\vec{a}_B + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) =$$

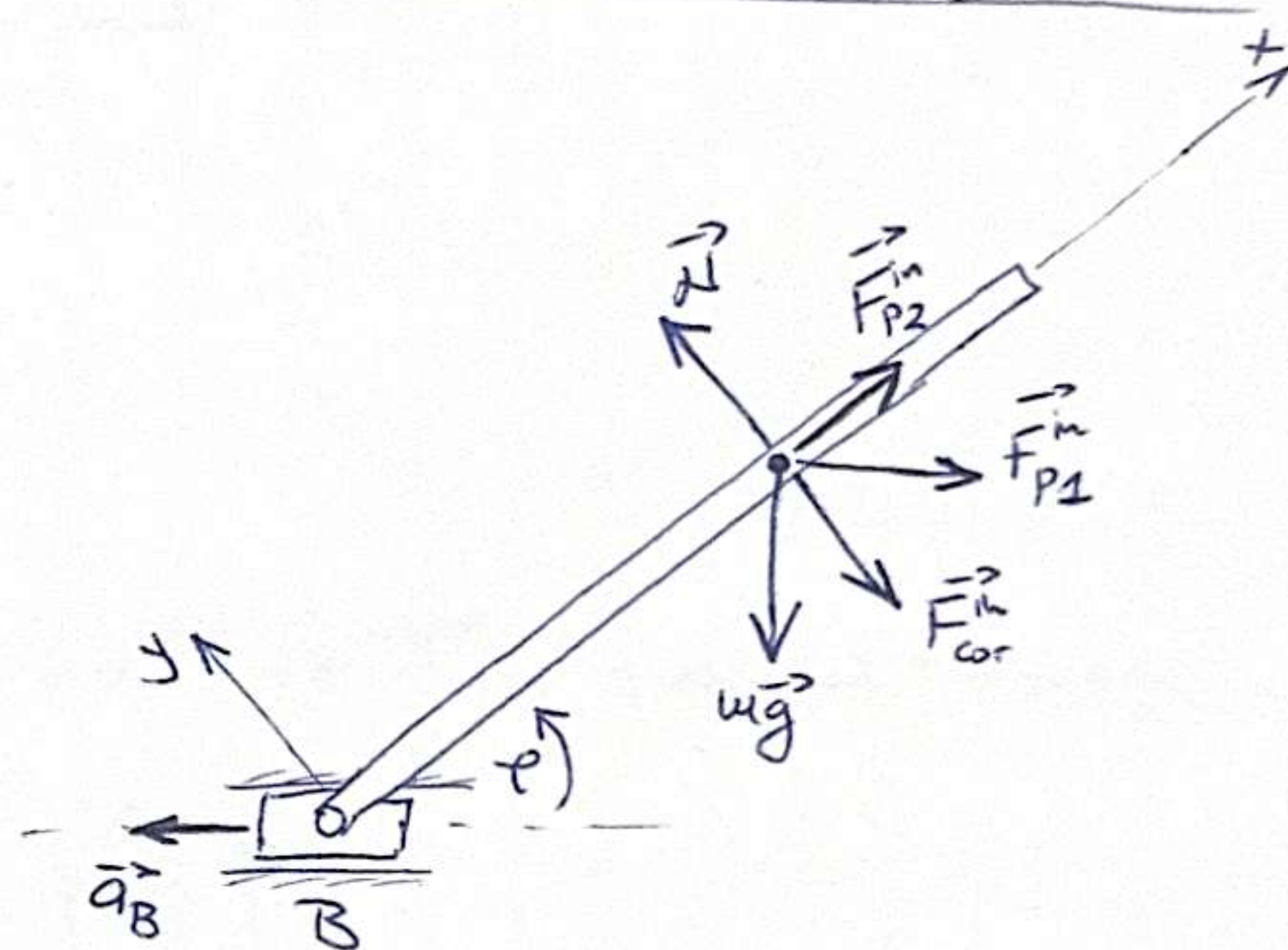
$$= m \cdot a_B \cdot (\vec{i}) + m\omega^2 x \cdot (\vec{i}) =$$

$$= 2mg \cdot (\vec{i}) + m\omega^2 x \cdot (\vec{i}) = \vec{F}_{p1}^{\text{in}} + \vec{F}_{p2}^{\text{in}}$$

$$\vec{F}_{\text{cor}}^{\text{in}} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega \cdot \dot{x} \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{N}_n = N \cdot \vec{j} = \vec{N}$$

$$\vec{N}_e = 0$$



$$\varphi = \omega t, \quad \omega = \omega, \quad \epsilon = 0$$

$$x: m\ddot{x} = -mg \sin \varphi + F_{p1}^{\text{in}} \cos \varphi + F_{p2}^{\text{in}}$$

$$\mu \ddot{x} = -\mu g \sin(\omega t) + 2\mu g \cos(\omega t) + \mu \omega^2 x$$

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 2g \cos(\omega t) - g \sin(\omega t)$$

$$H: \lambda^2 - \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = \pm \omega \pm 0i \rightarrow x_h = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t}$$

$$P: G(t) = e^{0t} (2g \cos(\omega t) - g \sin(\omega t)) \rightarrow \alpha = 0, \beta = \omega$$

$$x_p = t^0 e^{0t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)), \quad \ddot{x}_p = -\omega^2 (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

$$-\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t - \omega^2 A \cos(\omega t) - \omega^2 B \sin(\omega t) = 2g \cos(\omega t) - g \sin(\omega t)$$

$$-2\omega^2 A = 2g \rightarrow A = -\frac{g}{\omega^2}$$

$$-2\omega^2 B = -g \rightarrow B = \frac{g}{2\omega^2}$$

$$\vec{z}(t) = x(t) = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} - \frac{g}{\omega^2} \cos(\omega t) + \frac{g}{2\omega^2} \sin(\omega t)$$

$$\dot{\vec{z}}(t) = C_1 \omega e^{\omega t} - C_2 \omega e^{-\omega t} + \frac{g}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{g}{2\omega} \cos(\omega t)$$

$$\vec{z}(0) = C_1 + C_2 - \frac{g}{\omega^2} = 0$$

$$\dot{\vec{z}}(0) = C_1 \omega - C_2 \omega + \frac{g}{2\omega} = \frac{g}{2\omega} \rightarrow C_1 = C_2$$

$$2C_1 - \frac{g}{\omega^2} = 0 \rightarrow C_1 = C_2 = \frac{g}{2\omega^2}$$

$$\boxed{\vec{z}(t) = \frac{g}{2\omega^2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t} - 2 \cos(\omega t) + \sin(\omega t))}$$

$$y: 0 = -mg \cos \varphi - F_{p1}^m \sin \varphi - F_{cor}^m + N$$

$$N = mg \cos(\omega t) + 2mg \sin(\omega t) + 2m\omega \dot{x}$$

$$N = mg \cos(\omega t) + 2mg \sin(\omega t) + 2m\omega \cdot \frac{g}{2\omega} (e^{\omega t} - e^{-\omega t} + 2 \sin(\omega t) + \cos(\omega t))$$

$$\boxed{N = mg (e^{\omega t} - e^{-\omega t} + 2 \cos(\omega t) + 4 \sin(\omega t))}$$

МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799

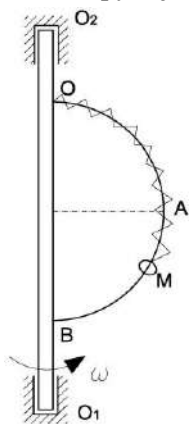
29. август 2019.

Прва група

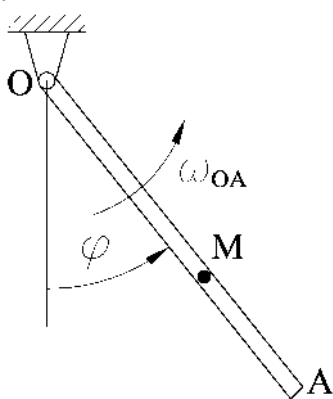
1. По глаткој жици OAB савијеној тако да има облик полукруга полупречника R , може да клизи прстен M масе $2m$ (слика 1). Жица је крајевима O и B заварена за вертикалну осовину O_1O_2 и може да се обрће око вертикалне осе. Маса жице је m , а полупречник инерције у односу на осу обртања је $i_{Oz} = R$. Прстен је опругом крутости $c = mg/(R\pi^2)$ везан за тачку O . У почетном тренутку прстен је био у положају B у релативном мировању, а угаона брзина жице била је ω_0 . Ако је дужина ненапегнуте опруге $l_0 = \frac{1}{2}R\pi$, одредити угаону брзину жице у тренутку када прстен стигне у положај A и релативну брзину прстена у том тренутку. Који услов, у том случају, мора испунити угаона брзина ω_0 ?

2. Глатка цев OA обрће се константном угаоном брзином $\omega_{OA} = 4\omega_0$ око хоризонталне осе Oz , управне на раван цртежа (слика 2). Унутар цеви може да се креће тачка M , масе m . Током кретања, на тачку M делује сила отпора средине пропорционална апсолутној брзини тачке, са коефицијентом пропорционалности $6m\omega_0$. У почетном тренутку ($t_0 = 0$), тачка је била у положају O у стању релативног мировања, а цев је заузимала вертикалан правац ($\varphi_0 = 0$). Одредити коначну једначину релативног кретања тачке у односу на цев и реакцију цеви у зависности од времена.

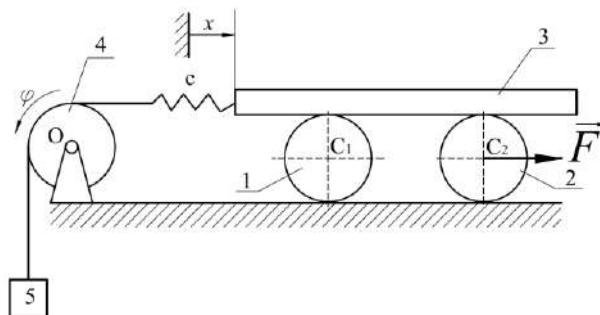
3. Систем приказан на слици састоји се од два хомогена диска, 1 и 2, маса m и полупречника R , који могу да се котрљају без клизања по хоризонталној подлози; зупчасте летве 3, масе m ; хомогеног диска 4, масе m и полупречника R и терета 5, масе m (слика 3). За зупчасту летву везана је опруга крутости c , која је другим крајем везана за лако неистегљиво уже. Уже је пребачено преко диска 4. Диск 4 обрће се око хоризонталне осе која пролази кроз тачку O . Други крај ужета везан је за терет 5 који може да се креће у вертикалној равни. На центар диска 2 делује сила хоризонталног правца, интензитета F . За задате генерализане координате (x, φ) одредити диференцијалне једначине кретања система. За $x = 0$ и $\varphi = 0$ опруга је ненапегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

september 19

2

$$\omega_0 = 4\omega_0 = \text{const.}$$

vertikalna ravan

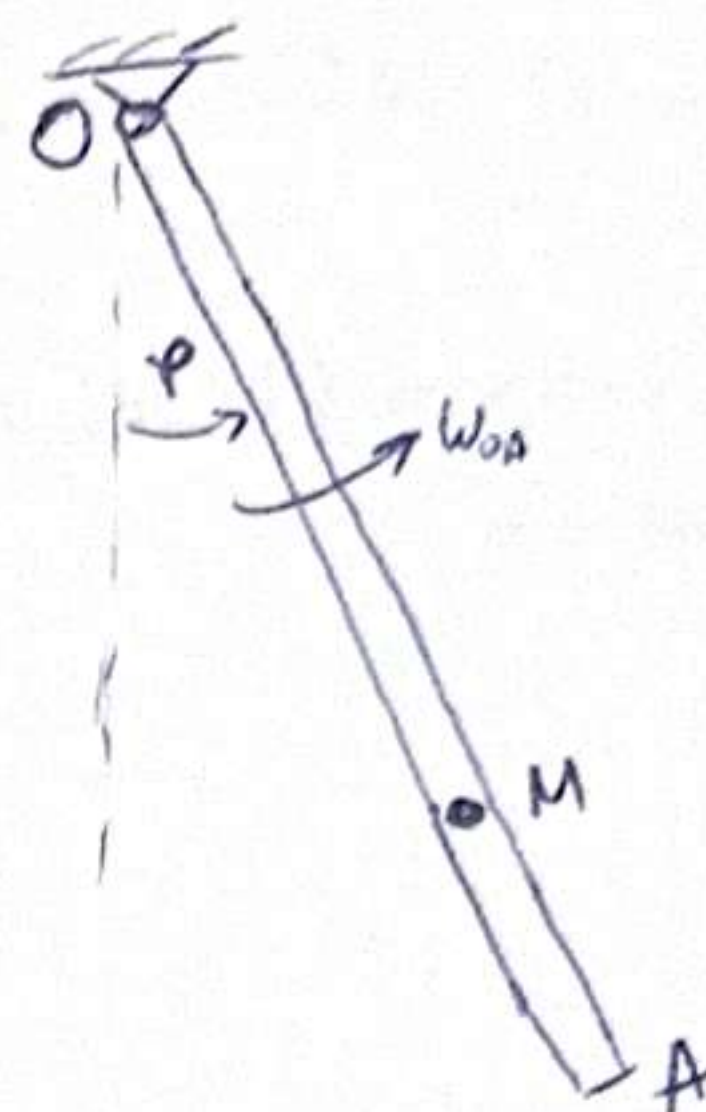
M: m

F_0 - sila otpora proporcionalna apsolutnoj brzini tačke, koef. proporcionalnosti je $6m\omega_0$

$t_0=0$: tačka je u položaju 0 relativno mirovanje $\varphi_0=0$

konstanta j-ma rel. koeficijenta?

$$U(t)=?$$



$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_0 + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{cor}^m + \vec{N}_n + \vec{M}_c$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

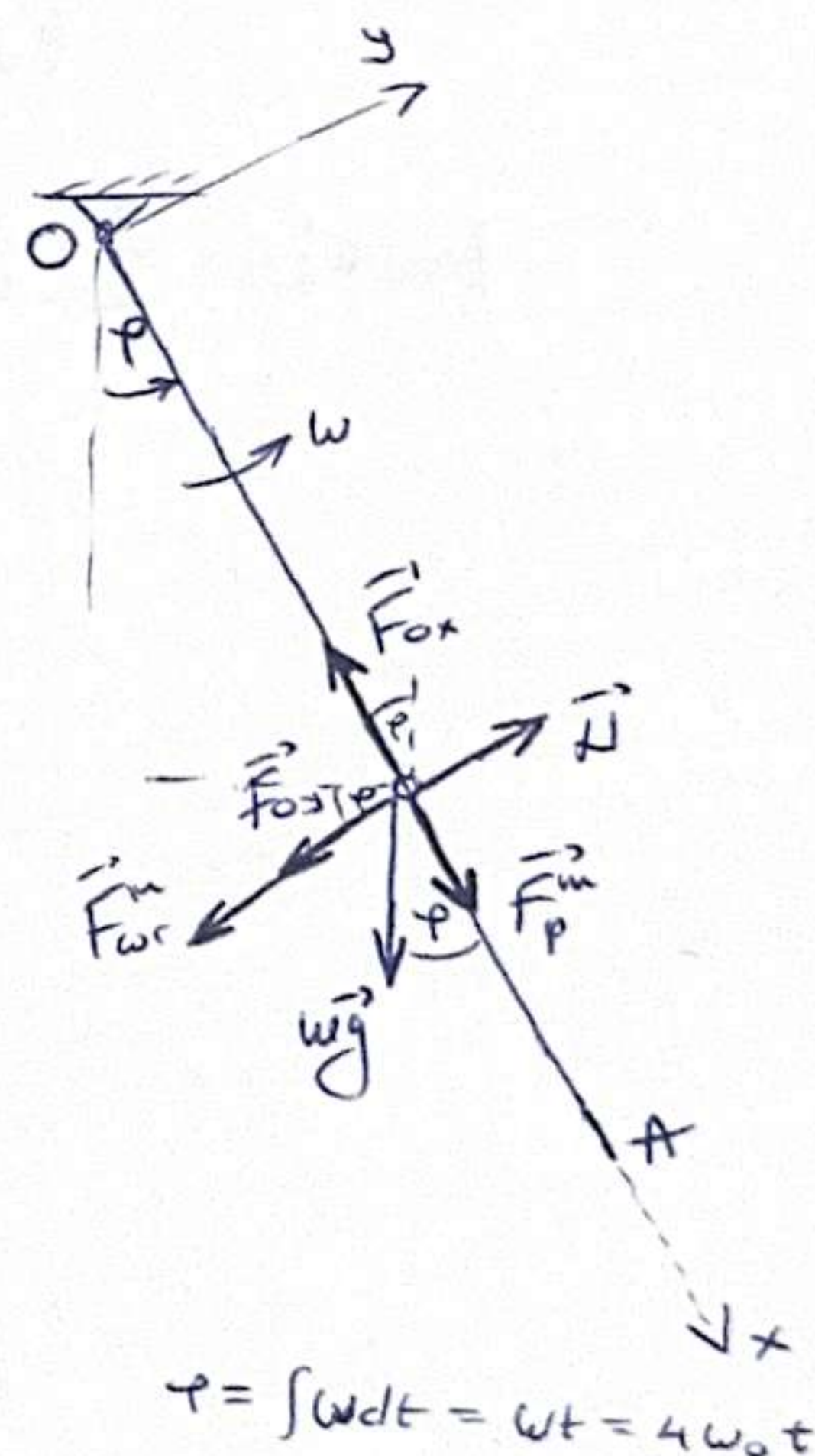
$$\begin{aligned} \vec{F}_0 &= -6m\omega_0 \cdot \vec{v}_m = -6m\omega_0 (\vec{v}_r + \vec{v}_p) = \\ &= 6m\omega_0 \cdot \dot{x} \cdot (-\vec{i}) + 6m\omega_0 \cdot (\omega x) \cdot (-\vec{j}) = \\ &= 6m\omega_0 \cdot \dot{x} \cdot (-\vec{i}) + 24m\omega_0^2 x \cdot (-\vec{j}) = \vec{F}_{0x} + \vec{F}_{0y} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{r} \times \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = m\omega^2 x \cdot (\vec{i}) = 16m\omega_0^2 x \cdot (\vec{i})$$

$$\vec{F}_{cor}^m = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega \cdot \dot{x} \cdot (-\vec{j}) = 8m\omega_0 \cdot \dot{x} \cdot (-\vec{j})$$

$$\vec{N}_n = N \cdot (\vec{j}) = \vec{N}$$

$$\vec{M}_c = 0$$



$$x: m\ddot{x} = mg \cos \varphi - F_{0x} + F_p^m$$

$$m\ddot{x} = mg \cos(4\omega_0 t) - 6m\omega_0 \dot{x} + 16m\omega_0^2 x$$

$$\ddot{x} + 6\omega_0 \dot{x} - 16\omega_0^2 x = g \cos(4\omega_0 t), \quad 2\delta_1 = 6\omega_0, \quad \omega_1 = 16\omega_0^2, \quad h_1 = g, \quad \Omega_1 = 4\omega_0$$

$$\ddot{x} + 2\delta_1 \dot{x} - \omega_1^2 x = h_1 \cos \Omega_1 t$$

$$\lambda^2 + 2\delta_1 \lambda - \omega_1^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1/2} = \frac{-2\delta_1 \pm \sqrt{4\delta_1^2 + 4\omega_1^2}}{2} = -\delta_1 \pm \sqrt{\delta_1^2 + \omega_1^2} = -3\omega_0 \pm \sqrt{9\omega_0^2 + 16\omega_0^2}$$

$$\lambda_{1/2} = -3\omega_0 \pm 5\omega_0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2\omega_0, \quad \lambda_2 = -8\omega_0$$

$$x_h = C_1 e^{2\omega_0 t} + C_2 e^{-8\omega_0 t}$$

$$b(t) = e^{0t} (g \cos(4\omega_0 t) + 0 \sin(4\omega_0 t))$$

$$x_p = t^0 e^{0t} (A \cos(4\omega_0 t) + B \sin(4\omega_0 t)), \quad \dot{x}_p = 4\omega_0 (-A \sin(4\omega_0 t) + B \cos(4\omega_0 t)), \quad \ddot{x}_p = -16\omega_0^2 (A \cos(4\omega_0 t) + B \sin(4\omega_0 t))$$

$$-16\omega_0^2 (A \cos(4\omega_0 t) + B \sin(4\omega_0 t)) + 24\omega_0^2 (-A \sin(4\omega_0 t) + B \cos(4\omega_0 t)) - 16\omega_0^2 (A \cos(4\omega_0 t) + B \sin(4\omega_0 t)) = g \cos(4\omega_0 t) + 0 \sin(4\omega_0 t)$$

$$(1) \quad -16\omega_0^2 B - 24\omega_0^2 A - 16\omega_0^2 B = 0$$

$$-32\omega_0^2 B - 24\omega_0^2 A = 0 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{3}{4}A$$

$$(2) \quad -16\omega_0^2 A + 24\omega_0^2 B - 16\omega_0^2 A = g$$

$$-32\omega_0^2 A - 24\omega_0^2 \cdot \frac{3}{4}A = g$$

$$-50\omega_0^2 A = g \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{50} \frac{g}{\omega_0^2} \quad \rightarrow \quad B = \frac{3}{200} \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$x = C_1 e^{2\omega_0 t} + C_2 e^{-8\omega_0 t} - \frac{1}{50} \frac{g}{\omega_0^2} \cos(4\omega_0 t) + \frac{3}{200} \frac{g}{\omega_0^2} \sin(4\omega_0 t)$$

$$\dot{x} = 2\omega_0 C_1 e^{2\omega_0 t} - 8\omega_0 C_2 e^{-8\omega_0 t} + \frac{2}{25} \frac{g}{\omega_0} \sin(4\omega_0 t) + \frac{3}{50} \frac{g}{\omega_0} \cos(4\omega_0 t)$$

$$x(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{50} \frac{g}{\omega_0^2} = 0 \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{50} \frac{g}{\omega_0^2} - C_2$$

$$\dot{x}(0) = 2\omega_0 C_1 - 8\omega_0 C_2 + \frac{3}{50} \frac{g}{\omega_0} = 0$$

$$2\omega_0 \left(\frac{1}{50} \frac{g}{\omega_0^2} - C_2 \right) - 8\omega_0 C_2 + \frac{3}{50} \frac{g}{\omega_0} = 0$$

$$\frac{1}{10} \frac{g}{\omega_0} - 10\omega_0 C_2 = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{100} \frac{g}{\omega_0^2} \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{100} \frac{g}{\omega_0^2}$$

$$x(t) = \frac{1}{200} \frac{g}{\omega_0^2} (2 \cdot e^{2\omega_0 t} + 2 \cdot e^{-8\omega_0 t} - 4 \cos(4\omega_0 t) + 3 \sin(4\omega_0 t))$$

$$y: \quad 0 = -mg \sin \varphi - F_{0y} - F_{\text{cor}}^n + N_n$$

$$0 = -mg \sin(4\omega_0 t) - 24m\omega_0^2 x - 8m\omega_0 \dot{x} + N_n$$

$$N_n = mg \sin(4\omega_0 t) + 24m\omega_0^2 \cdot \frac{1}{200} \frac{g}{\omega_0^2} (2 \cdot e^{2\omega_0 t} + 2 \cdot e^{-8\omega_0 t} - 4 \cos(4\omega_0 t) + 3 \sin(4\omega_0 t)) +$$

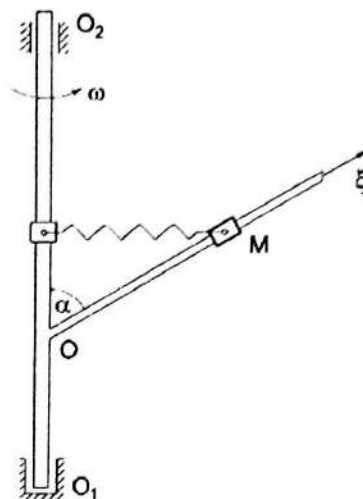
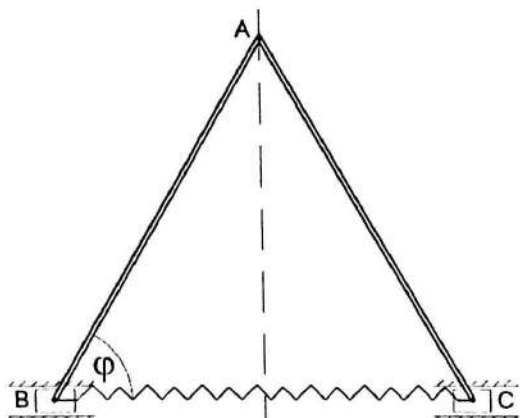
$$+ 8m\omega_0 \cdot \frac{1}{200} \frac{g}{\omega_0^2} (4\omega_0 e^{2\omega_0 t} - 16\omega_0 e^{-8\omega_0 t} + 16\omega_0 \sin(4\omega_0 t) + 12\omega_0 \cos(4\omega_0 t))$$

$$N = mg \sin(4\omega_0 t) + \frac{1}{25} mg (10 \cdot e^{2\omega_0 t} - 10 \cdot e^{-8\omega_0 t} + 0 + 25 \sin(4\omega_0 t))$$

$$N = 2mg \sin(4\omega_0 t) + \frac{2}{5} mg e^{2\omega_0 t} - \frac{2}{5} mg e^{-8\omega_0 t}$$

1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva homogena štapa AB i AC, od kojih je svaki mase m i dužine l . Štapovi su međusobno zglobovno vezani u tački A. Krajevi štapa B i C zglobovno su vezani za lake klizalice koji mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi, i koji su povezani oprugom nepoznate krutosti c . U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapi su mirovali i bili u položaju koji je određen uglom $\varphi_0 = 60^\circ$.

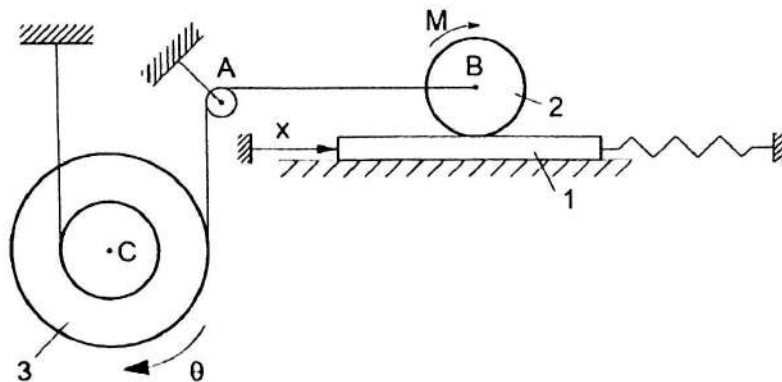
- a) Odrediti krutost opruge c tako da ugaona brzina štapa u trenutku t_1 , kada je $\varphi_1 = 30^\circ$, bude jednaka nuli.
b) Za tako određenu vrednost opruge c , odrediti ubrzanje tačke A u trenutku t_1 .



2. Klizač M mase m može da klizi po glatkoj cevi koja je zavarena pod uglom $\alpha = 60^\circ$ za osovину O_1O_2 . Osovina se obrće oko svoje vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω . Za klizač M vezana je opruga krutosti $c = 4m\omega^2$, čiji se drugi kraj kreće po osovini O_1O_2 . Pri kretanju klizača opruga ima uvek horizontalan pravac. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\ell_0 = \sqrt{3}$. Položaj klizača M meri se duž pokretne ose $O\xi$, kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = \frac{8}{3}$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.

- a) Odrediti jednačinu relativnog kretanja klizača $\xi(t)$. b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t) = ?$.

3. Mehanički sistem nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od platforme 1 mase $2m$, homogenog diska 2 mase m i poluprečnika R , i koaksijalnog cilindra 3 mase m i poluprečnika R i $2R$. Poluprečnik inercije cilindra za osu upravnu na ravan crteža, a koja prolazi kroz središte mase C, iznosi $i_C = \sqrt{2}R$. Tačka C za sve vreme kretanja zadržava vertikalni pravac. Disk 2 može da se kotrlja bez klizanja po platformi 1, koja može da klizi bez trenja po horizontalnoj podlozi. Platforma je vezana oprugom krutosti c , čiji je drugi kraj vezan za nepokretni zid. Sistem je spojen neistegljivim užadima zanemarljive mase kao što je prikazano na slici. Masu kotura A zanemariti. Na disk 2 deluje spreg sila momenta intenziteta M u naznačenom smeru. Za date generalisane koordinate (θ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$.



september 21

② $M: m$
 $\alpha = 60^\circ$
 vertikaal ravan

$\omega = \text{const}$

$z = 4m\omega^2$

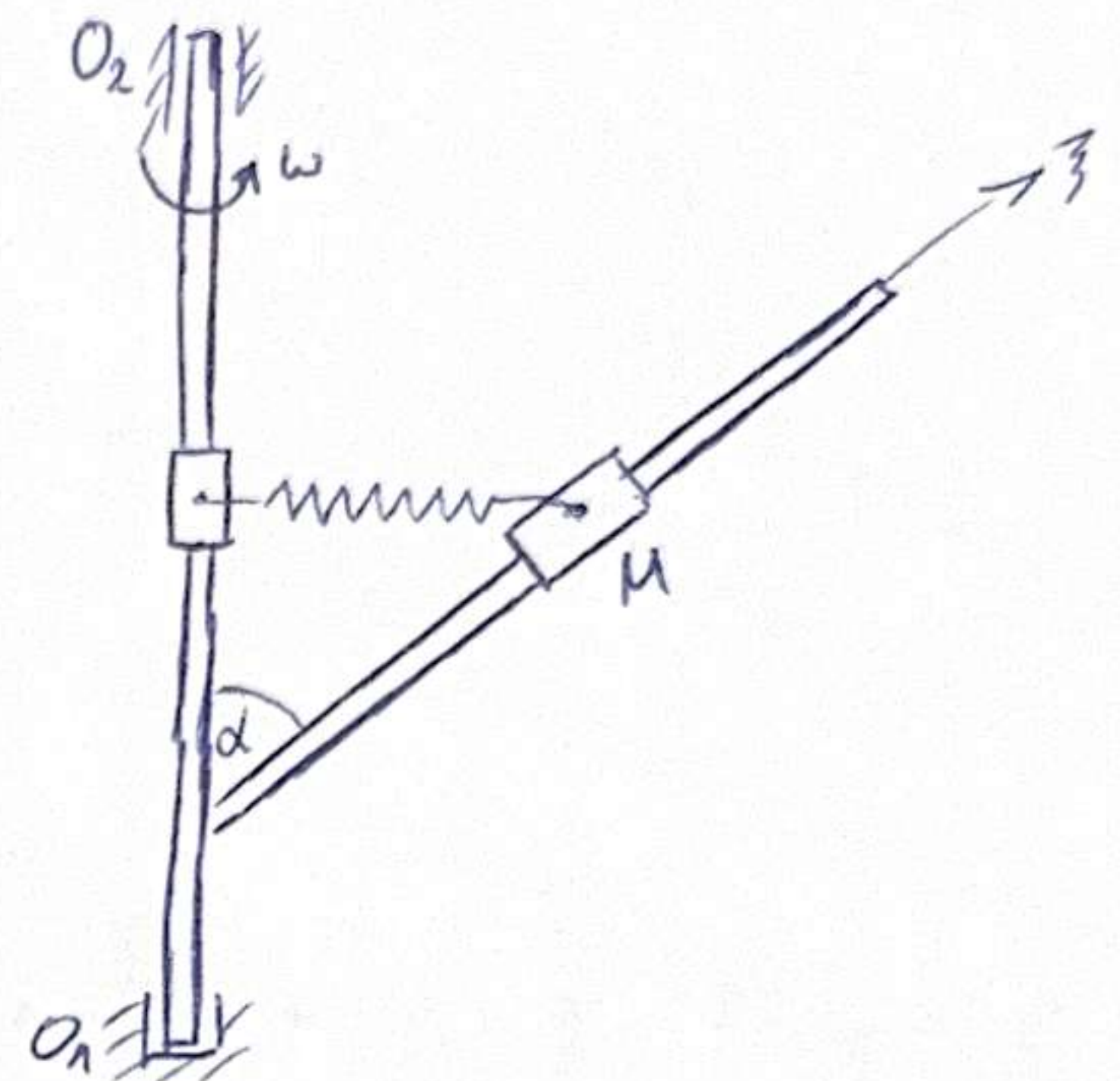
$l_0 = \sqrt{3}$

h : relatieve wissel

$\vec{f}_0 = \frac{g}{3}$

1) $\vec{f}(t) = ?$

2) $\mathcal{L}(t) = ?$



$$m\vec{a}_r = m\vec{g} + \vec{F}_c + \vec{F}_p^m + \vec{F}_{\omega}^m + \vec{L}_n + \vec{L}_c$$

$$m\vec{g} = mg \cdot (-\vec{j})$$

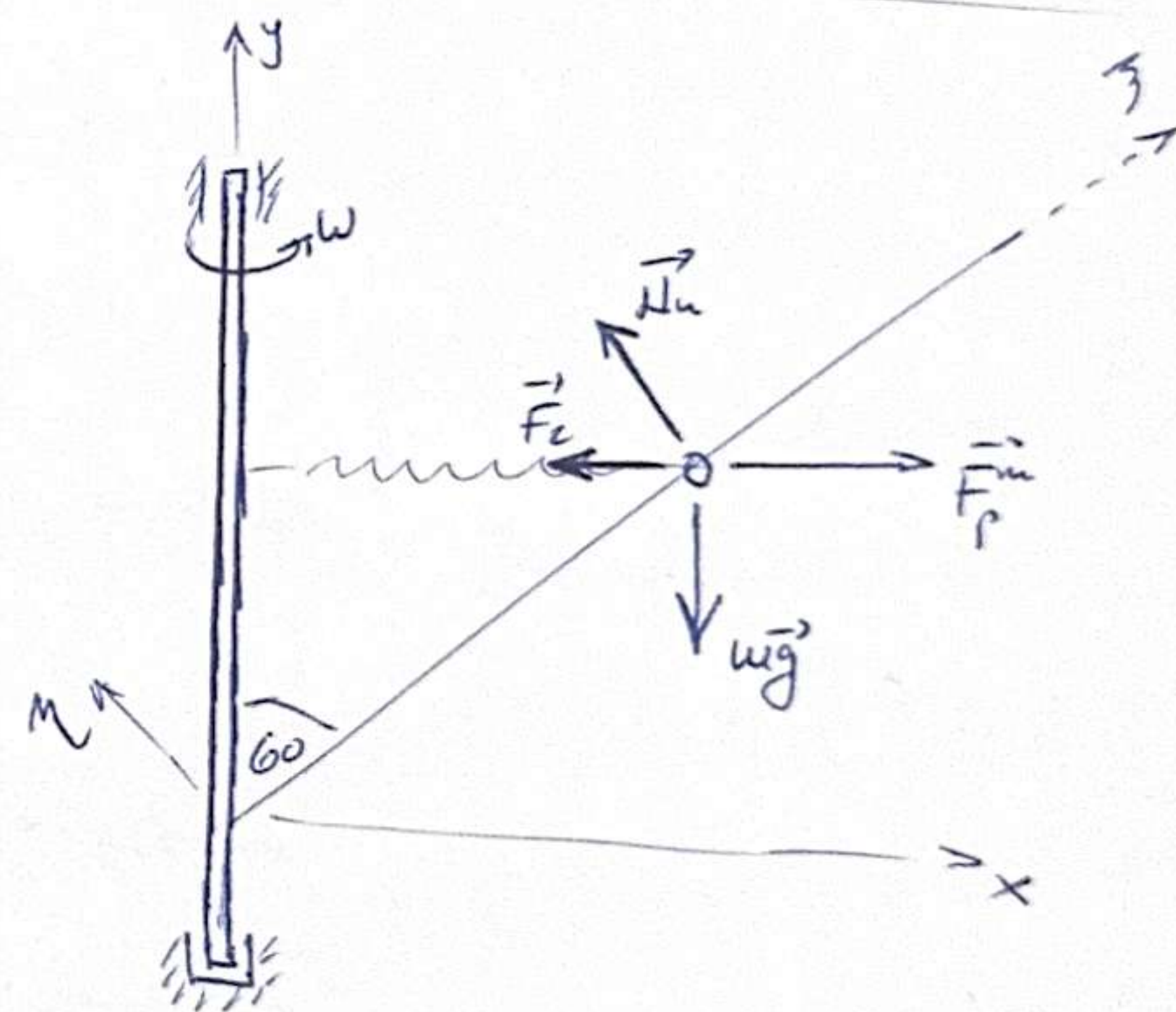
$$\vec{F}_c = z \cdot (x - l_0) \cdot (-\vec{i}) = (4m\omega^2 x - 4m\omega^2 \sqrt{3}) \cdot (-\vec{i})$$

$$\vec{F}_p^m = -m(\ddot{a}_{on} + \vec{\epsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})) = m\omega^2 \cdot x \cdot (\vec{i})$$

$$\vec{F}_{\omega}^m = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}_r = 2m\omega \cdot \dot{x} \cdot (\vec{k})$$

$$\vec{L}_n = L_n \cdot (\vec{n})$$

$$\vec{L}_c = L_c \cdot (-\vec{k})$$



$$\vec{f}: m\ddot{f} = -mg \cos 60 - F_c \cos 30 + F_p^m \cos 30$$

$$m\ddot{f} = -mg \cdot \frac{1}{2} - 4m\omega^2 x \frac{\sqrt{3}}{2} + 4m\omega^2 \sqrt{3} \frac{\sqrt{3}}{2} + m\omega^2 x \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\ddot{f} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \omega^2 x = 6\omega^2 - \frac{1}{2}g, \quad x = f \sin 60 = f \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\ddot{f} + \frac{3\sqrt{3}}{2} \omega^2 \cdot f \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\omega^2 - \frac{1}{2}g$$

$$\ddot{f} + \frac{9}{4} \omega^2 f = 6\omega^2 - \frac{1}{2}g, \quad \omega_1 = \frac{3}{2} \omega, \quad h_1 = 6\omega^2 - \frac{1}{2}g$$

$$\ddot{f} + \omega_1^2 f = h_1$$

$$\# : \lambda^2 + \omega_1^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega_1 = 0 \pm i \cdot \frac{3}{2} \omega$$

$$\vec{f}_h = C_1 \cos(\frac{3}{2} \omega t) + C_2 \sin(\frac{3}{2} \omega t)$$

$$P: \quad \zeta(t) = e^{i\omega t} (h_1 \cos(\omega t) + h_2 \sin(\omega t))$$

$$x_p = t^0 e^{i\omega t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = A, \quad \ddot{x}_p = 0$$

$$0 + \omega_1^2 A = h_1 \quad \rightarrow \quad A = \frac{h_1}{\omega_1^2} = \frac{6\omega^2 - \frac{1}{2}g}{\frac{9}{4}\omega^2}$$

$$\zeta = C_1 \cos\left(\frac{3}{2}\omega t\right) + C_2 \sin\left(\frac{3}{2}\omega t\right) + \frac{6\omega^2 - \frac{1}{2}g}{\frac{9}{4}\omega^2}$$

$$\dot{\zeta} = -\frac{3}{2}\omega C_1 \sin\left(\frac{3}{2}\omega t\right) + \frac{3}{2}\omega C_2 \cos\left(\frac{3}{2}\omega t\right)$$

$$\zeta(0) = C_1 + \frac{6\omega^2 - \frac{1}{2}g}{\frac{9}{4}\omega^2} = \frac{8}{3} \quad \rightarrow \quad C_1 = \frac{8}{3} - \frac{\frac{6}{1}\omega^2}{\frac{9}{4}\omega^2} + \frac{\frac{1}{2}g}{\frac{9}{4}\omega^2} = \frac{8}{3} - \frac{8}{3} + \frac{2}{9} \frac{g}{\omega^2} = \frac{2}{9} \frac{g}{\omega^2}$$

$$\dot{\zeta}(0) = +\frac{3}{2}\omega C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$\boxed{\zeta = \frac{2}{9} \frac{g}{\omega^2} \cos\left(\frac{3}{2}\omega t\right) + \frac{8}{3} - \frac{2}{9} \frac{g}{\omega^2}}$$

$$n: \quad 0 = -mg \sin 60 + F_c \sin 30 - F_p^m \sin 30 + \mathcal{L}_n$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg + 4m\omega^2 x \cdot \frac{1}{2} - 4m\omega^2 \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - m\omega^2 x \cdot \frac{1}{2} + \mathcal{L}_n$$

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}mg + \frac{3}{2}m\omega^2 \zeta \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2\sqrt{3}m\omega^2 + \mathcal{L}_n$$

$$\mathcal{L}_n = \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{3\sqrt{3}}{4}m\omega^2 \left(\frac{2}{9} \frac{g}{\omega^2} (\cos(\frac{3}{2}\omega t) - 1) + \frac{8}{3} \right) + 2\sqrt{3}m\omega^2$$

$$\mathcal{L}_n = \frac{\sqrt{3}}{2}mg + 2\sqrt{3}m\omega^2 - \frac{\sqrt{3}}{6}mg \cos(\frac{3}{2}\omega t) + \frac{\sqrt{3}}{6}mg - 2\sqrt{3}m\omega^2$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}mg - \frac{\sqrt{3}}{6}mg \cos(\frac{3}{2}\omega t)}}$$

$$z: \quad 0 = F_{or}^m - \mathcal{L}_6$$

$$\mathcal{L}_6 = 2m\omega \cdot \dot{x} = 2m\omega \cdot \dot{\zeta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}m\omega \cdot \left(-\frac{3}{2}\omega \cdot \frac{2}{9} \frac{g}{\omega^2} \sin(\frac{3}{2}\omega t) \right)$$

$$\underline{\underline{\mathcal{L}_6 = \frac{\sqrt{3}}{3}mg \sin(\frac{3}{2}\omega t)}}$$

$$\boxed{\mathcal{L} = \sqrt{\mathcal{L}_n^2 + \mathcal{L}_6^2} = \dots}$$