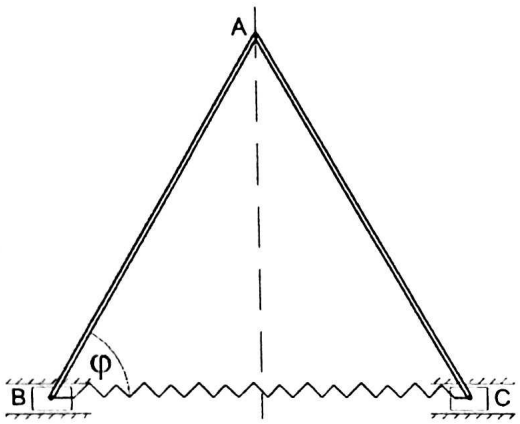
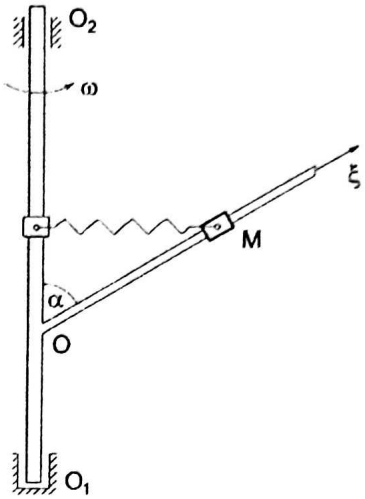
1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva homogena štapa AB i AC, od kojih je svaki mase m i dužine l. Štapovi su međusobno zglobno vezani u tački A. Krajevi štapova B i C zglobno su vezani za lake klizače koji mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi, i koji su povezani oprugom nepoznate krutosti c. U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapovi su mirovali i bili u položaju koji je određen uglom $\varphi_0 = 60°$.

a) Odrediti krutost opruge c tako da ugaona brzina štapova u trenutku t_1, kada je $\varphi_1 = 30°$, bude jednaka nuli.

b) Za tako određenu vrednost opruge c, odrediti ubrzanje tačke A u trenutku t_1.

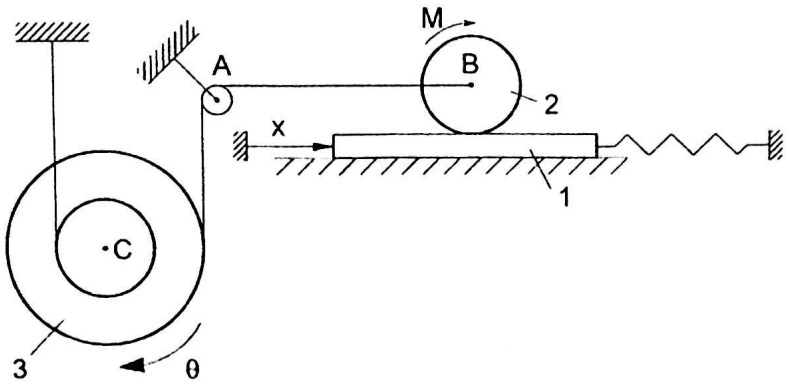




2. Klizač M mase m može da klizi po glatkoj cevi koja je zavarena pod uglom $\alpha = 60°$ za osovinu O_1O_2. Osovina se obrće oko svoje vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω. Za klizač M vezana je opruga krutosti $c = 4m\omega^2$, čiji se drugi kraj kreće po osovini O_1O_2. Pri kretanju klizača opruga ima uvek horizontalan pravac. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\ell_0 = \sqrt{3}$. Položaj klizača M meri se duž pokretne ose $O\xi$, kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = \frac{8}{3}$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.

a) Odrediti jednačinu relativnog kretanja klizača $\xi(t)$. b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t) = ?$.

3. Mehanički sistem nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od platforme *1* mase $2m$, homogenog diska *2* mase m i poluprečnika R, i koaksijalnog cilindra *3* mase m i poluprečnika R i $2R$. Poluprečnik inercije cilindra za osu upravnu na ravan crteža, a koja prolazi kroz središte masa C, iznosi $i_C = \sqrt{2}R$. Tačka C za sve vreme kretanja zadržava vertikalan pravac. Disk *2* može da se kotrlja bez klizanja po platformi *1*, koja može da klizi bez trenja po horizontalnoj podlozi. Platforma je vezana oprugom krutosti c, čiji je drugi kraj vezan za nepokretni zid. Sistem je spojen neistegljivim užadima zanemarljive mase kao što je prikazano na slici. Masu kotura A zanemariti. Na disk *2* deluje spreg sila momenta intenziteta M u naznačenom smeru. Za date generalisane koordinate (θ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$.



③ vertik. ravan

1: $2m$

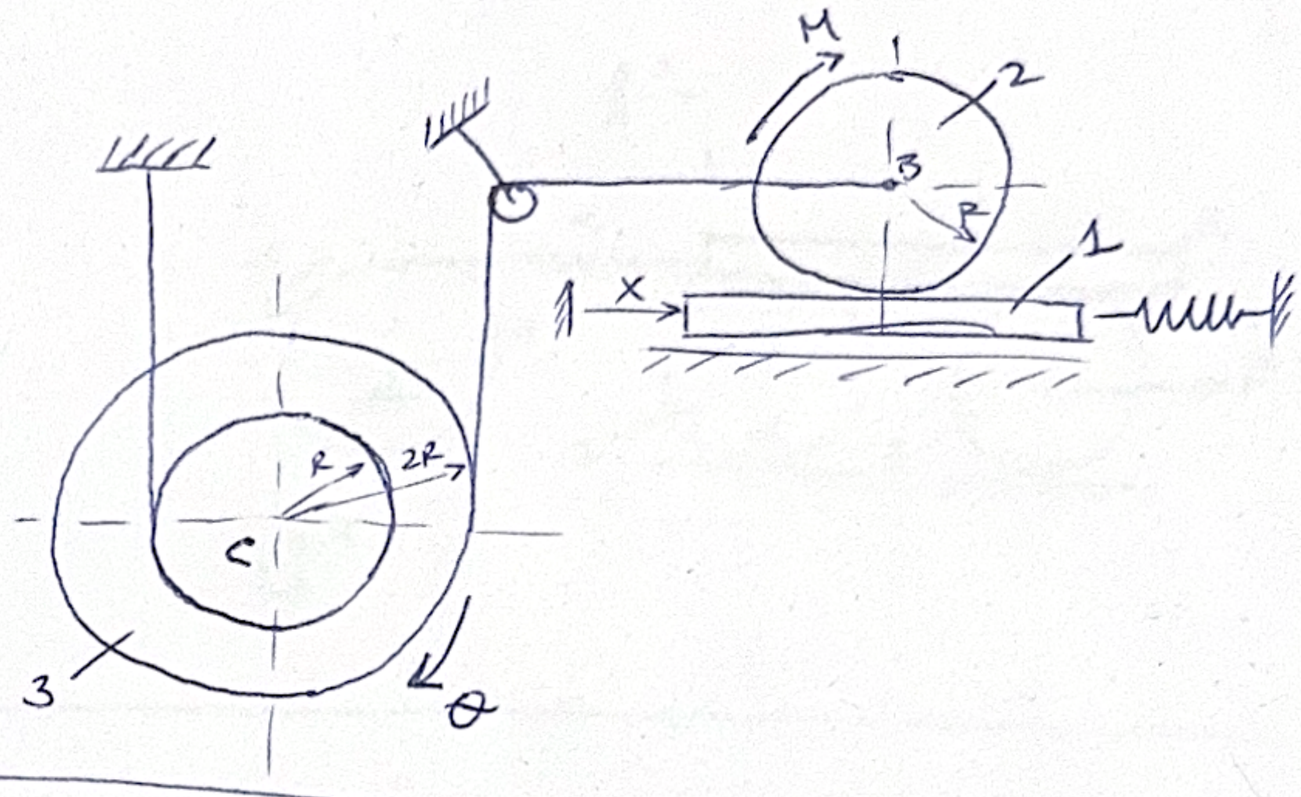
2: m, R

3: $m, R, 2R, \ell_c = \sqrt{2}R$

opruga: c, za $x=0$ je nenapregnuta

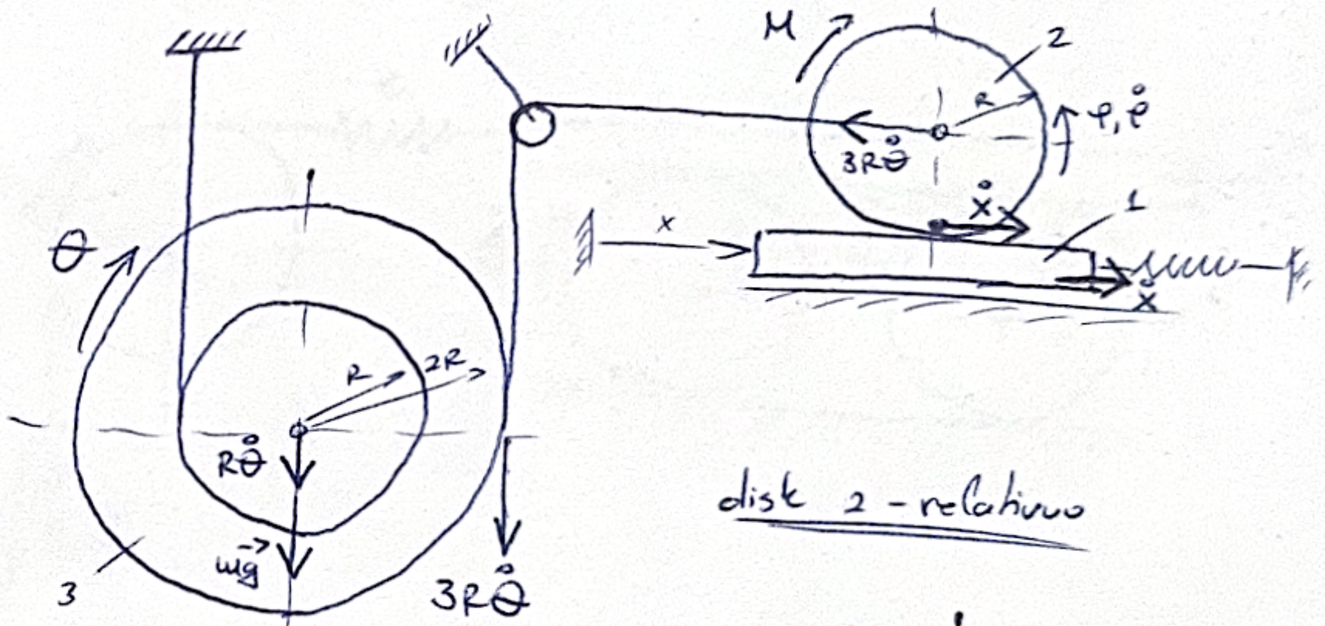
moment M

dif. j-ne kretanja za θ, x?



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial A}{\partial \theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial A}{\partial x}$$



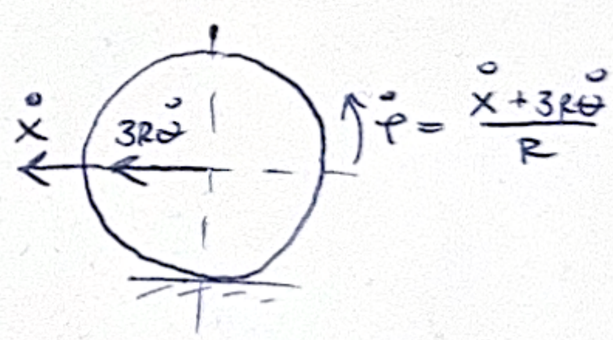
$$T_1 = \frac{1}{2} 2m \dot x^2 = m\dot x^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m (3R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\dot x + 3R\dot\theta}{R}\right)^2 =$$

$$= \frac{9}{2} mR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{4} mR^2 \frac{\dot x^2 + 6R\dot\theta\dot x + 9R^2\dot\theta^2}{R^2} =$$

$$= \frac{1}{4} m\dot x^2 + \frac{3}{2} m\dot x R\dot\theta + \frac{27}{4} mR^2\dot\theta^2$$

disk 2 - relativno



$$T_3 = \frac{1}{2} m (R\dot\theta)^2 + \frac{1}{2} m \ell_c^2 \dot\theta^2 = \frac{1}{2} mR^2\dot\theta^2 + \frac{1}{2} 2mR^2\dot\theta^2 = \frac{3}{2} mR^2\dot\theta^2$$

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{5}{4} m\dot x^2 + \frac{3}{2} m\dot x R\dot\theta + \frac{33}{4} mR^2\dot\theta^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot\theta} = \frac{3}{2} m\dot x R + \frac{33}{2} mR^2\dot\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\theta}\right) = \frac{3}{2} m\ddot x R + \frac{33}{2} mR^2\ddot\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial \dot x} = \frac{5}{2} m\dot x + \frac{3}{2} mR\dot\theta \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) = \frac{5}{2} m\ddot x + \frac{3}{2} mR\ddot\theta$$

$$(k_y)\ \delta A = -cx\,dx - M\,d\varphi + mg\,dy_c$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\dot x + 3R\dot\theta}{R} = \frac{\frac{dx}{dt} + 3R\frac{d\theta}{dt}}{R} \quad \rightarrow \quad d\varphi = \frac{dx}{R} + \frac{3R\,d\theta}{R}$$

$$\frac{dy_c}{dt} = R\dot\theta = R\frac{d\theta}{dt} \quad \rightarrow \quad dy_c = R\,d\theta$$

$$\delta A = -cx\,dx - \frac{M}{R}dx - 3M\,d\theta + mgR\,d\theta$$

$$\frac{3}{2} m\ddot x R + \frac{33}{2} mR^2\ddot\theta = -3M + mgR$$

$$\frac{5}{2} m\ddot x + \frac{3}{2} mR\ddot\theta = -cx - \frac{M}{R}$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

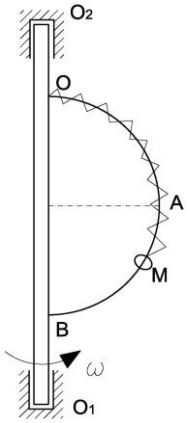
МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799
29. август 2019.
Прва група

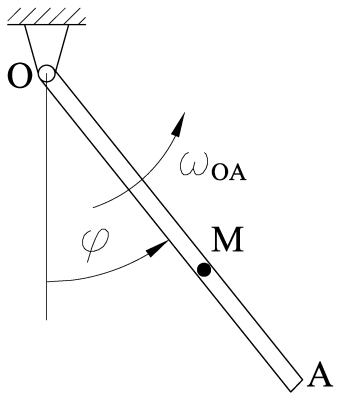
1. По глаткој жици OAB савијеној тако да има облик полукруга полупречника R, може да клизи прстен M масе $2m$ (слика 1). Жица је крајевима O и B заварена за вертикалну осовину O_1O_2 и може да се обрће око вертикалне осе. Маса жице је m, а полупречник инерције у односу на осу обртања је $i_{Oz}=R$. Прстен је опругом крутости $c=mg/\left(R\pi^2\right)$ везан за тачку O. У почетном тренутку прстен је био у положају B у релативном мировању, а угаона брзина жице била је ω_0. Ако је дужина ненапрегнуте опруге $l_0=\frac{1}{2}R\pi$, одредити угаону брзину жице у тренутку када прстен стигне у положај A и релативну брзину прстена у том тренутку. Који услов, у том случају, мора испунити угаона брзина ω_0?

2. Глатка цев OA обрће се константном угаоном брзином $\omega_{OA}=4\omega_0$ око хоризонталне осе Oz, управне на раван цртежа (слика 2). Унутар цеви може да се креће тачка M, масе m. Током кретања, на тачку M делује сила отпора средине пропорционална апсолутној брзини тачке, са коефицијентом пропорционалности $6m\omega_0$. У почетном тренутку ($t_0=0$), тачка је била у положају O у стању релативног мировања, а цев је заузимала вертикалан правац ($\varphi_0=0$). Одредити коначну једначину релативног кретања тачке у односу на цев и реакцију цеви у зависности од времена.

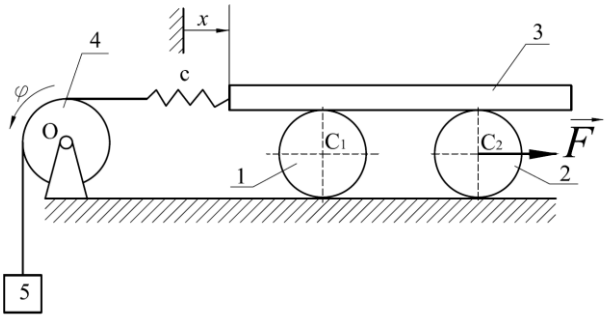
3. Систем приказан на слици састоји се од два хомогена диска, 1 и 2, маса m и полупречника R, који могу да се котрљају без клизања по хоризонталној подлози; зупчасте летве 3, масе m; хомогеног диска 4, масе m и полупречника R и терета 5, масе m (слика 3). За зупчасту летву везана је опруга крутости c, која је другим крајем везана за лако неистегљиво уже. Уже је пребачено преко диска 4. Диск 4 обрће се око хоризонталне осе која пролази кроз тачку O. Други крај ужета везан је за терет 5 који може да се креће у вертикалној равни. На центар диска 2 делује сила хоризонталног правца, интензитета F. За задате генералисане координате (x,φ) одредити диференцијалне једначине кретања система. За $x=0$ и $\varphi=0$ опруга је ненапрегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

Sept 19

③ 1,2: m, R

3: m

4: m, R

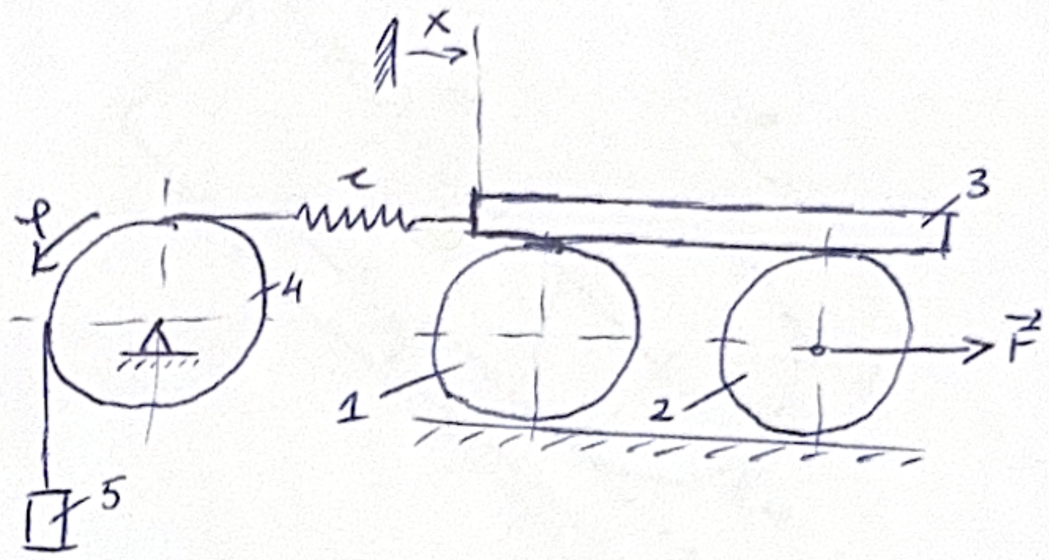
5: m

opruga: c, za $x=0, \varphi=0$ je neopregnuta

sila F

x, φ

dif. j-ne ?

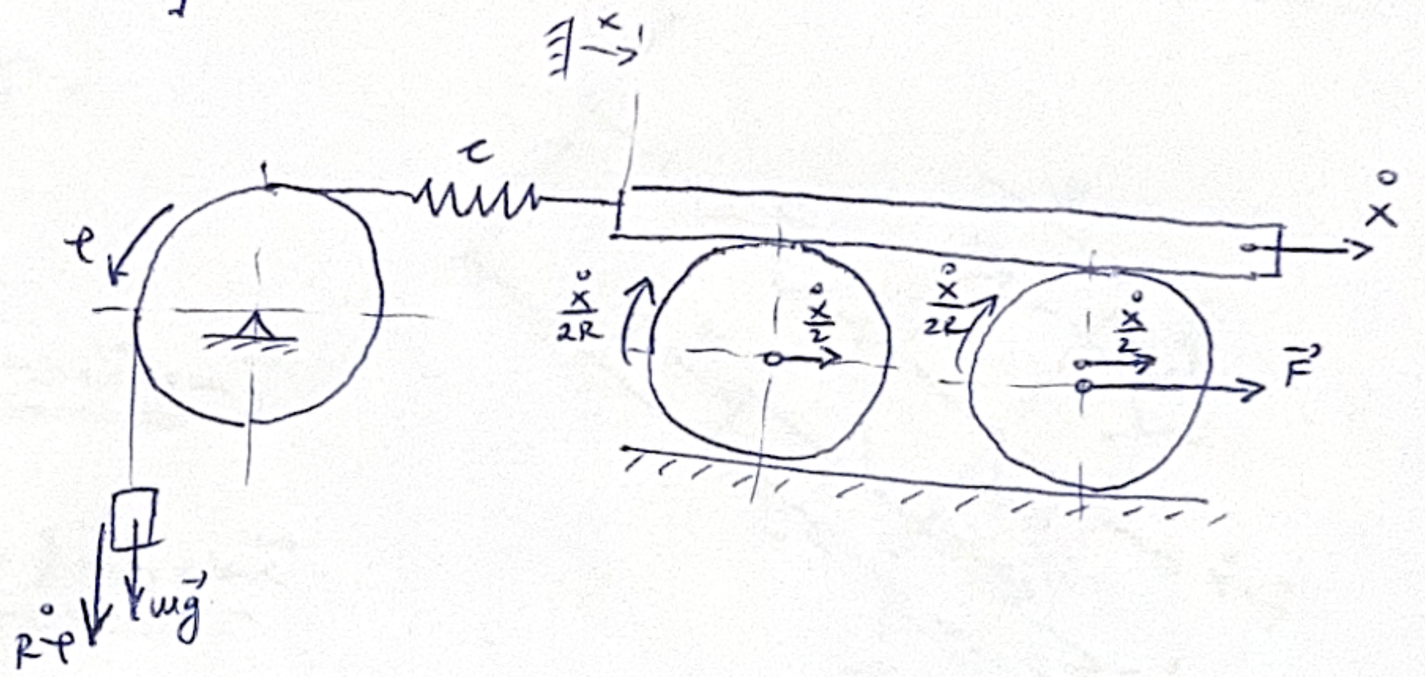


$$T = 2\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 0\right] +$$

$$+ \left[0 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m(R\dot{\varphi})^2 + 0\right] =$$

$$T = 2\left[\frac{1}{8}m\dot{x}^2 + \frac{1}{16}m\dot{x}^2\right] + \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2\right] =$$

$$T = \frac{7}{8}m\dot{x}^2 + \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2$$



$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{7}{4}m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{7}{4}m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}mR^2\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi}$$

$$\delta A = -c\zeta\,\delta\zeta + F\cdot\frac{\delta x}{2} + mgR\,\delta\varphi$$

$$\dot{\zeta} = \dot{x} + R\dot{\varphi} \quad \rightarrow \quad d\zeta = dx + R\,d\varphi \quad \rightarrow \quad \zeta = x + R\varphi$$

$$\delta A = -c(x + R\varphi)(dx + R\,d\varphi) + \frac{1}{2}F\,dx + mgR\,d\varphi =$$

$$\delta A = -cx\,dx - cR\varphi\,dx - cxR\,d\varphi - cR^2\varphi\,d\varphi + \frac{1}{2}F\,dx + mgR\,d\varphi$$

$$\frac{7}{4}m\ddot{x} = -cx - cR\varphi + \frac{1}{2}F$$

$$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} = -cxR - cR^2\varphi + mgR$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

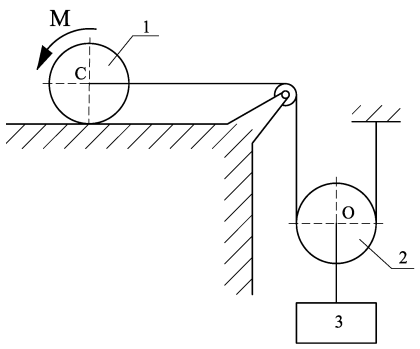
МЕХАНИКА 3

МЕХ 210-0799
14. фебруар 2019.
Прва група

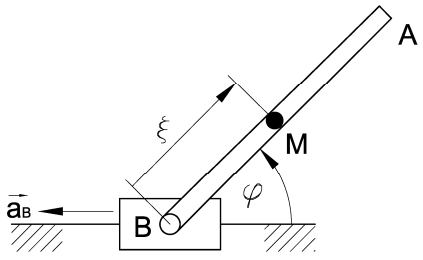
1. Хомогени диск 1, масе m и полупречника R, котрља се без клизања по хоризонталној подлози (слика 1). За центар диска 1 је везано неистегљиво уже које је пребачено преко хомогеног диска 2, масе m и полупречника R, а затим везано за непомичну тачку. За центар диска 2 неистегљивим ужетом везано је тело 3 масе m. Крак отпора котрљању диска 1 по подлози је $k = 0.1R$. Одредити интензитет момента M да би се тело 3 кретало константним убрзањем интензитета g, смера навише.

2. Цев AB, занемарљиве масе, креће се у вертикалној равни. Крајем B, цев је везана зглобно за клизач који се креће дуж хоризонталне праволинијске вођице константним убрзањем $a_B = 2g$ (слика 2). Закон промене угла је $\varphi = \omega t$. Кроз цев може да се креће куглица M масе m. У почетном тренутку куглица је била у положају B и имала почетну релативну брзину $V_{r0} = g/(2\omega)$. Одредити коначну једначину релативног кретања куглице у односу на цев ($\xi = \xi(t)$), као и укупну реакцију везе у функцији од времена.

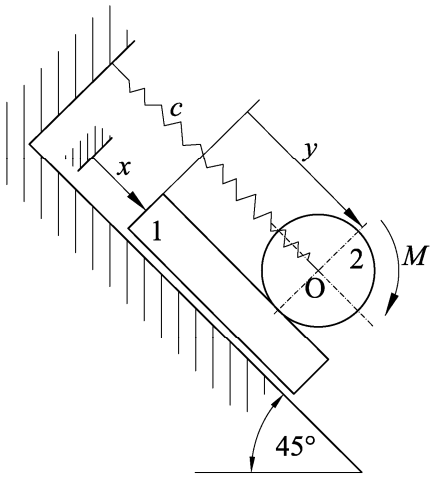
3. Материјални систем (слика 3) састоји се од тела 1, масе m и диска 2, масе m и полупречника R. На диск делује спрег момента интензитета M. Центар диска везан је опругом крутости c, чији је други крај везан за непокретну раван. Ако се диск по телу котрља без проклизавања, а систем креће по глаткој стрмој равни нагибног угла 45º, написати диференцијалне једначине кретања система за задате генералисане координате. У положају $x = y = 0$ опруга је ненапрегнута.



Слика 1



Слика 2



Слика 3

februar 19

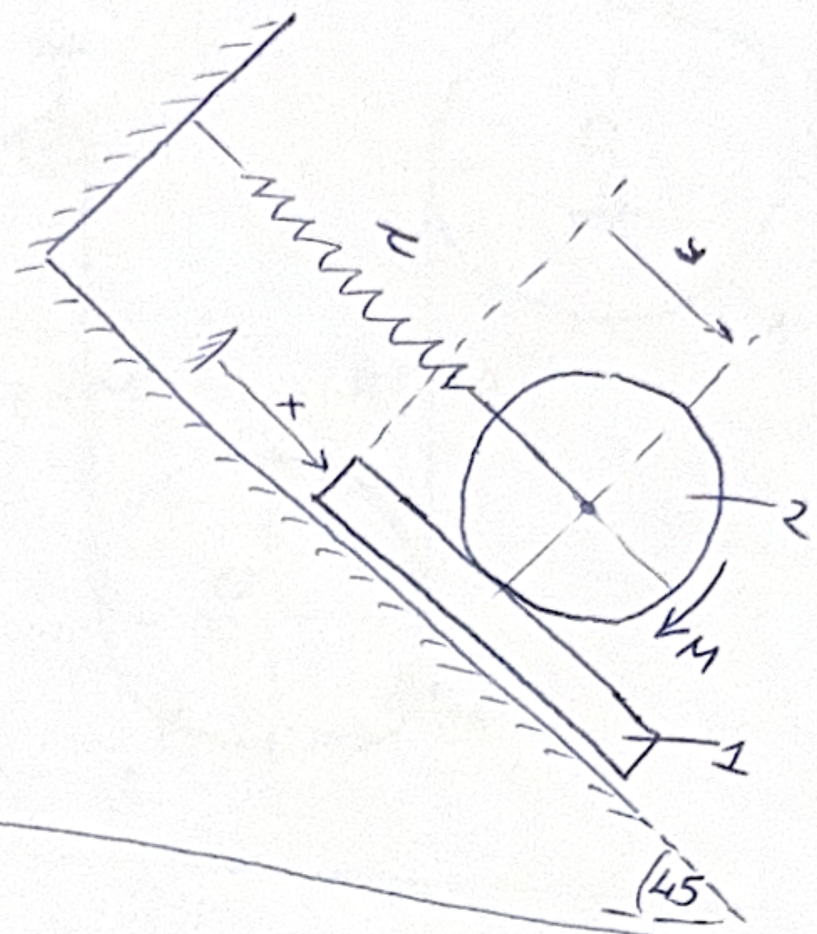
③ 1: m

2: m, R

spreg M

opruga c, za $x=0, y=0$ je neopregnuta

df. T-ne za x, y?



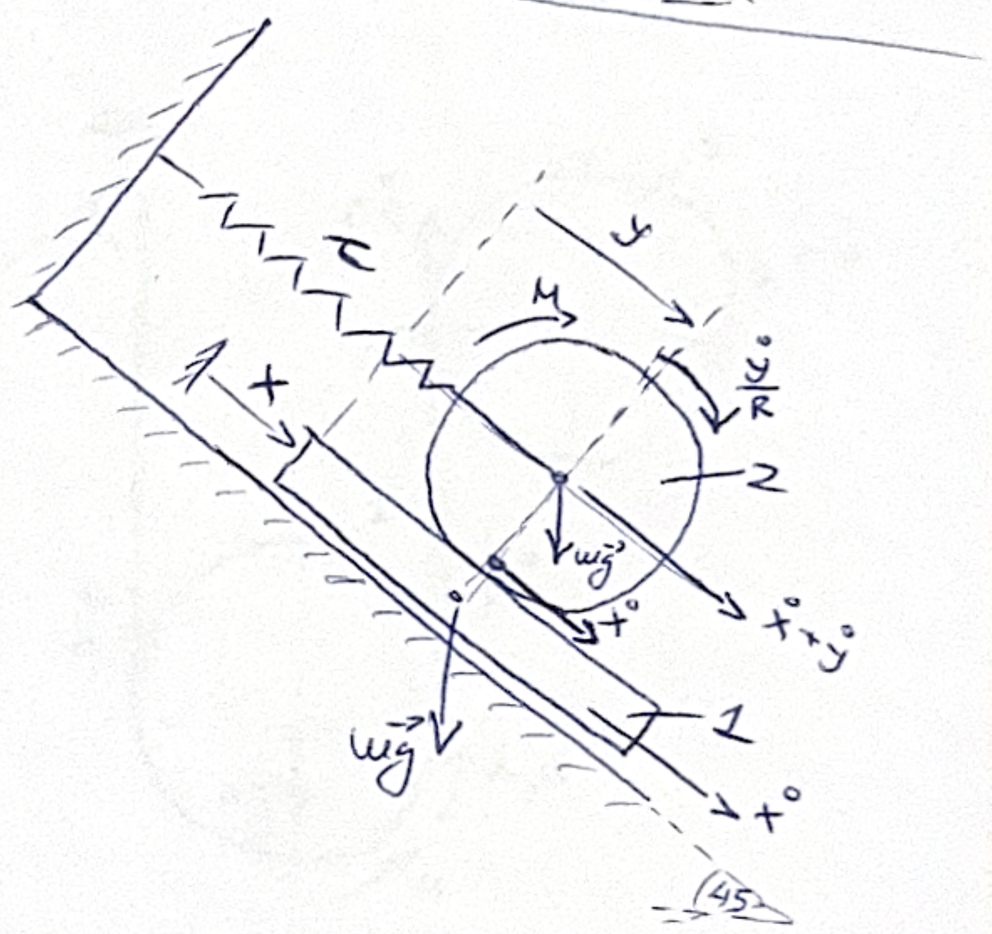
$$T = \left[\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 0\right] + \left[\frac{1}{2}m(\dot{x}+\dot{y})^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{\dot{y}}{R}\right)^2\right] =$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{y} + \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{4}m\dot{y}^2 =$$

$$T = m\dot{x}^2 + m\dot{x}\dot{y} + \frac{3}{4}m\dot{y}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + m\dot{y}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x} + m\ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = \frac{3}{2}m\dot{y} + m\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{y} + m\ddot{x}$$



$$\delta A = mg\frac{\sqrt{2}}{2}\delta x + mg\frac{\sqrt{2}}{2}(\delta x + \delta y) - c\xi d\xi + M\frac{\delta y}{R}$$

$$\dot{\xi} = \dot{x} + \dot{y} \rightarrow d\xi = dx + dy \rightarrow \xi = x + y$$

$$\delta A = mg\sqrt{2}\delta x + mg\frac{\sqrt{2}}{2}\delta y - c(x+y)(\delta x + \delta y) + \frac{M}{R}\delta y$$

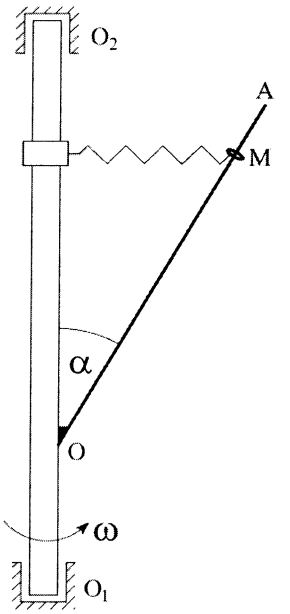
$$\delta A = mg\sqrt{2}\delta x + mg\frac{\sqrt{2}}{2}\delta y - c_x\delta x - c_y\delta y - c_x\delta y - c_y\delta x + \frac{M}{R}\delta y$$

$$2m\ddot{x} + m\ddot{y} = mg\sqrt{2} - c_x - c_y$$

$$\frac{3}{2}m\ddot{y} + m\ddot{x} = mg\frac{\sqrt{2}}{2} - c_x - c_y + \frac{M}{R}$$

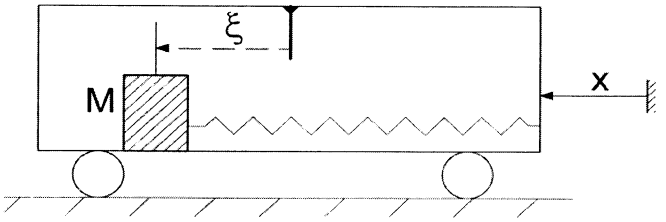
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

1. Po glatkoj cevi *OA* može da klizi prsten *M* mase *m* (slika 1). Cev je u tački *O* pod uglom $\alpha = 30^\circ$ zavarena za vertikalnu osovinu O_1O_2 koja može da se obrće oko vertikalne ose. Masa cevi je $2m$, a poluprečnik inercije u odnosu na osu obrtanja je $i_{Oz} = R$. Kretanje prstena ograničava horizontalna opruga krutosti $c=mg/R$. U početnom trenutku prsten je bio u položaju *A* u relativnom mirovanju, dužina opruge je iznosila $2R$, a ugaona brzina ω_0. Dužina nenapregnute opruge je *R*. Odrediti ugaonu brzinu cevi u trenutku kada prsten stigne u položaj u kome je opruga nenapregnuta, kao i relativnu brzinu prstena u tom trenutku.



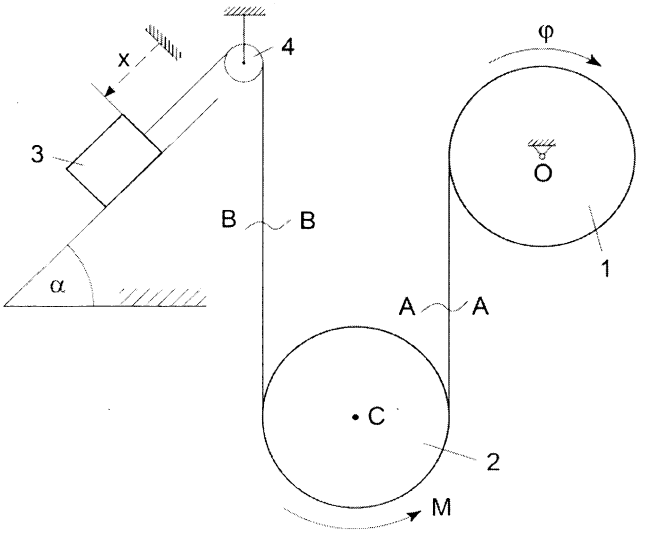
Slika 1.

2. Kolica se kreću po horizontalnoj podlozi (slika 2), zakon kretanja dat je sa $x = \sin(\omega t)$, gde je ω poznata konstanta. Unutar kolica nalazi se teret *M* mase *m* koji može da klizi po glatkoj unutrašnjoj horizontalnoj podlozi. Za teret je vezana opruga krutosti $c = 2m\omega^2$. Položaj tereta u odnosu na kolica odredjen je relativnom koordinatom ξ. U početnom trenutku, teret je bio u relativnom mirovanju u koordinatnom početku ($\xi = 0$), i opruga je tada bila nenapregnuta. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta *M*.



Slika 2.

3. Sistem prikazan na slici ispod nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva homogena diska *1* i *2* mase *m* i poluprečnika *R*, i tereta *3* mase *m* koji može da klizi po glatkoj strmoj ravni nagiba $\alpha = 30^\circ$. Disk *1* obrće se oko horizontalne ose koja prolazi tačku *O*. Uže je prebačeno preko kotura *4* zanemarljive mase. Izmedju užeta i diskova nema proklizavanja. Na disk *2* deluje spreg sila momenta $M = mgR/4$. Za zadate generalisane koordinate x i φ odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema, kao i sile u užetu u presecima *A-A* i *B-B*.



oktobar 2 19

③ 1,2: m, R

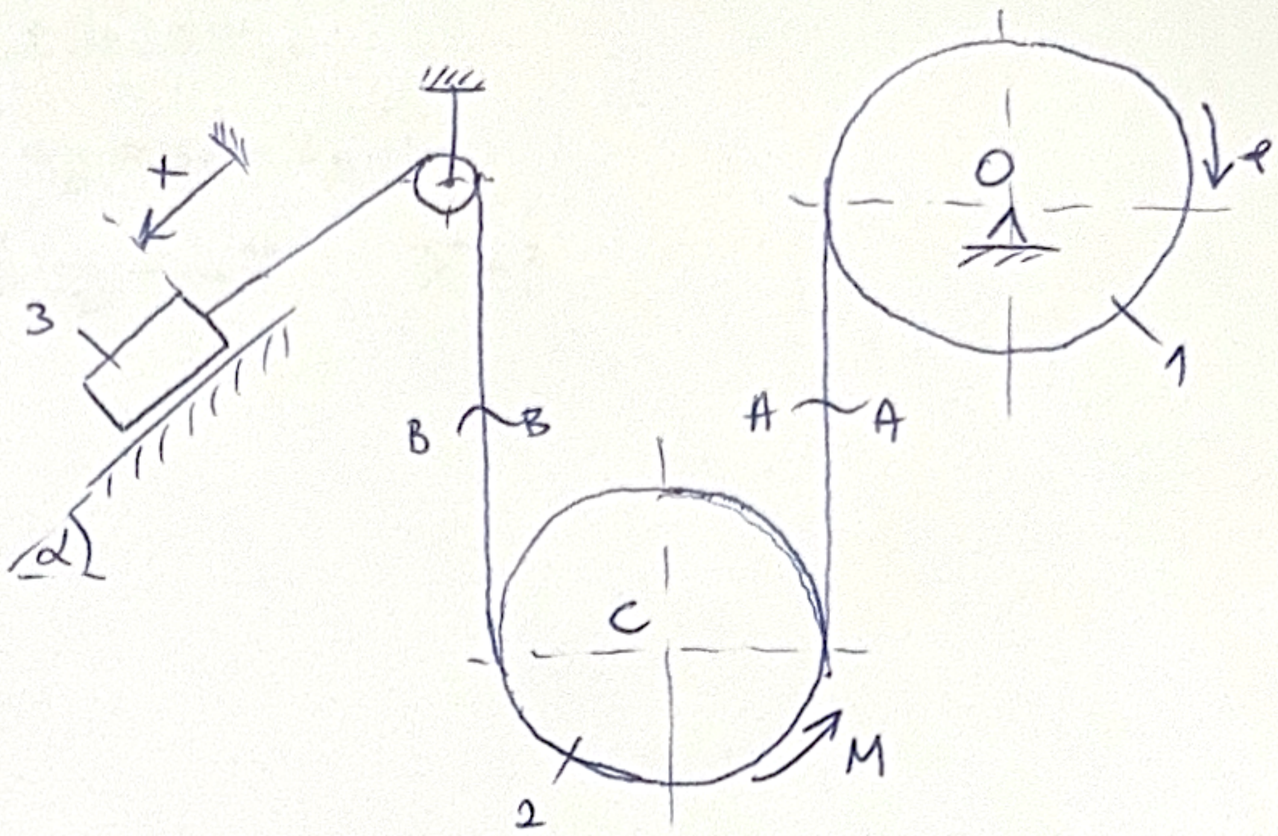
3: m

$\alpha = 30$

moment $M = \frac{mgR}{4}$

dif. T-ne za x, φ?

$S_A = ?$, $S_B = ?$



$T_1 = 0 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2$

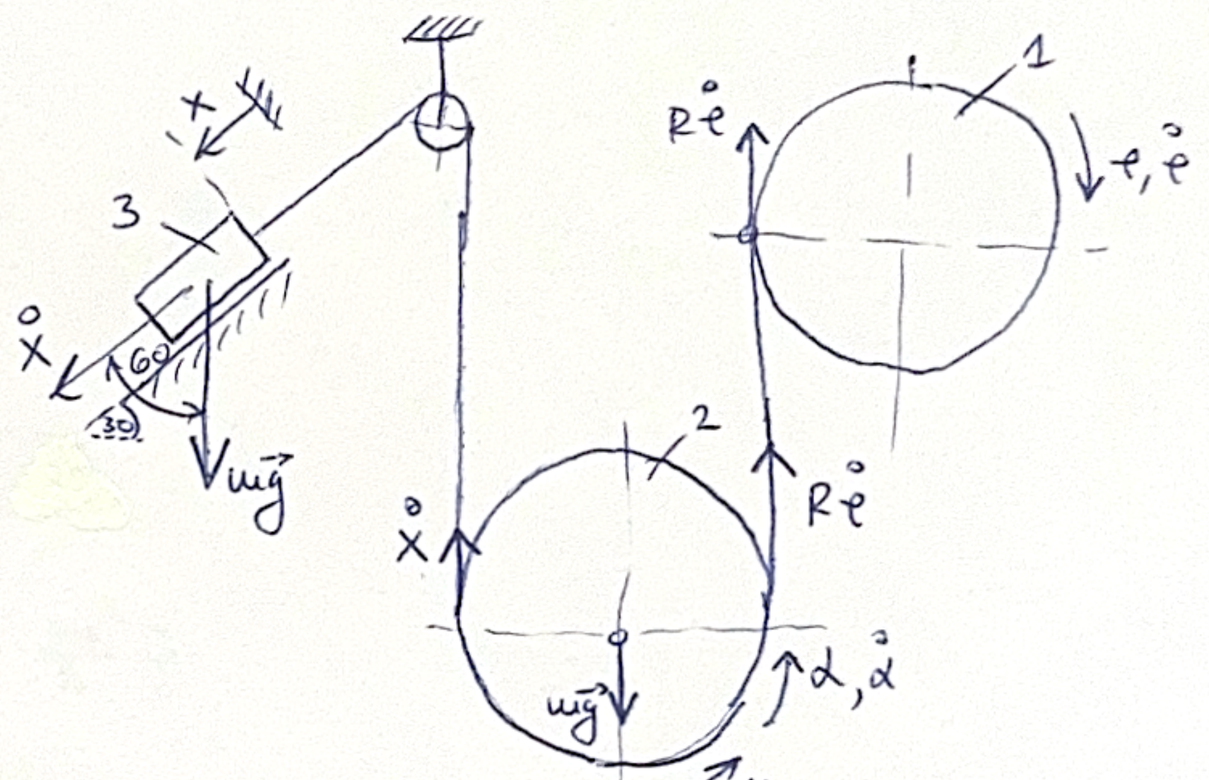
$T_2 = \frac{1}{2}m(R\dot{\alpha} + \dot{x})^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\alpha}^2 =$

$= \frac{1}{2}m\left(R\frac{R\dot{\varphi} - \dot{x}}{2R} + \dot{x}\right)^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{R\dot{\varphi} - \dot{x}}{2R}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2}m\left(\frac{R\dot{\varphi} + \dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{R\dot{\varphi} - \dot{x}}{2R}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2}m\left(\frac{R^2\dot{\varphi}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{x} + \dot{x}^2}{4}\right) + \frac{1}{4}m\left(\frac{R^2\dot{\varphi}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{x} + \dot{x}^2}{4}\right) =$

$= \frac{3}{16}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8}mR\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{3}{16}m\dot{x}^2$



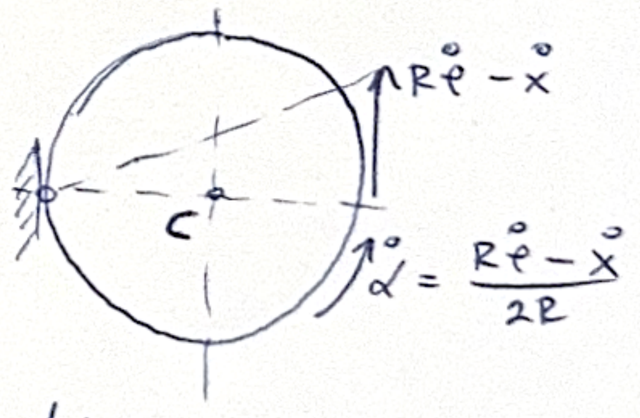
$T_3 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 0$

$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{11}{16}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}mR\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{7}{16}mR^2\dot{\varphi}^2$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{11}{8}m\dot{x} + \frac{1}{8}mR\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{11}{8}m\ddot{x} + \frac{1}{8}mR\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{7}{8}mR^2\dot{\varphi} + \frac{1}{8}mR\dot{x}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{7}{8}mR^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{8}mR\ddot{x}$

disk 2 - relativno:



apsolutno: $v_C = R\dot{\alpha} + \dot{x}$

$\delta A = mg\cos 60\,\delta x - mg\,\delta y_C + M\delta\alpha =$

$\delta A = \frac{1}{2}mg\delta x - mg(R\delta\alpha + \delta x) + \frac{1}{4}mgR\left(\frac{R\delta\alpha - \delta x}{2R}\right) =$

$\delta A = \frac{1}{2}mg\delta x - mgR\frac{R\delta\varphi - \delta x}{2R} - mg\delta x + \frac{1}{4}mg\cdot\frac{1}{2}R\delta\varphi - \frac{1}{4}mg\frac{1}{2}\delta x =$

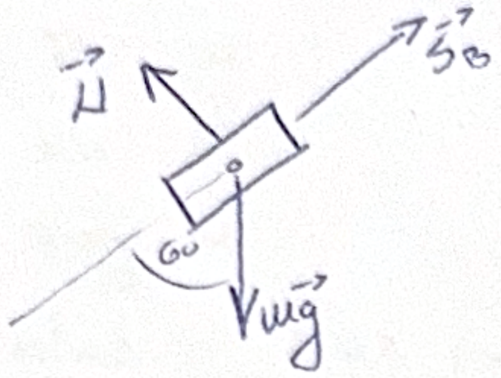
$\delta A = mg\delta x\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{8}\right) + mgR\delta\varphi\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{8}\right) =$

$\delta A = -\frac{1}{8}mg\delta x - \frac{3}{8}mgR\delta\varphi$

$\frac{11}{8}m\ddot{x} + \frac{1}{8}mR\ddot{\varphi} = -\frac{1}{8}mg \quad /\cdot\frac{8}{m} \Rightarrow \boxed{11\ddot{x} + R\ddot{\varphi} = -g} \quad (1)$

$\frac{7}{8}mR^2\ddot{\varphi} + \frac{1}{8}mR\ddot{x} = -\frac{3}{8}mgR \quad /\cdot\frac{8}{mR} \Rightarrow \boxed{7R\ddot{\varphi} + \ddot{x} = -3g} \quad (2)$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com



$$\underline{m\vec{a}_3 = m\vec{g} + \vec{S}_B + \vec{N}}$$

x: $\quad m\ddot{x} = mg\cos 60 - S_B$

$$S_B = \frac{1}{2}mg - m\ddot{x}\,, \qquad \ddot{x} = ?$$

(1) $\rightarrow \quad R\ddot{\varphi} = -g - 11\ddot{x}$

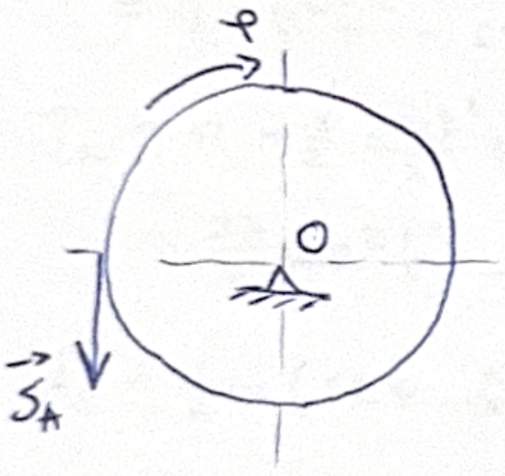
(2) $\rightarrow \quad -7g - 77\ddot{x} + \ddot{x} = -3g$

$$-76\ddot{x} = 4g$$

$$\ddot{x} = -\frac{1}{19}g$$

$$S_B = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{19}mg$$

$$\boxed{S_B = \frac{21}{38}mg}$$



$$\underline{\frac{dL_{Ot}}{dt} = \sum \vec{M}_{Ot}}$$

$$L_{Ot} = 0 + J_{Ot}\dot{\varphi} = \frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}$$

$$\frac{1}{2}mR^2\ddot{\varphi} = -S_A \cdot R$$

$$S_A = -\frac{1}{2}mR\ddot{\varphi}\,, \qquad \ddot{\varphi} = ?$$

(1) $\rightarrow \quad R\ddot{\varphi} = -g - 11\ddot{x} = -g + 11\cdot\frac{1}{9}g = -\frac{8}{19}g$

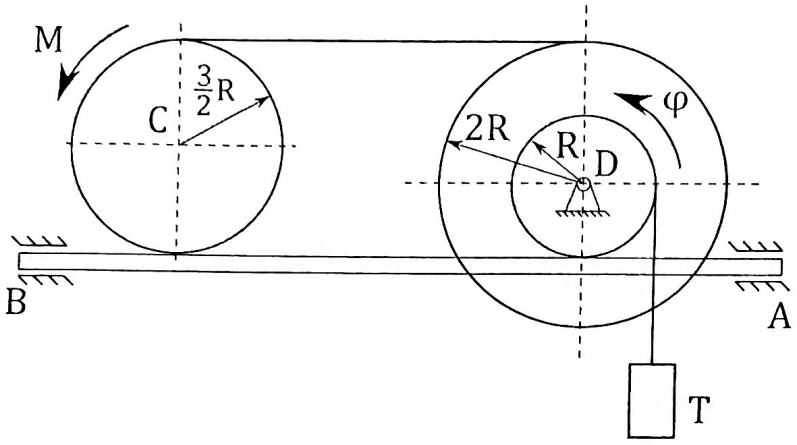
$$S_A = -\frac{1}{2}m\left(-\frac{8}{19}g\right)$$

$$\boxed{S_A = \frac{4}{19}mg}$$

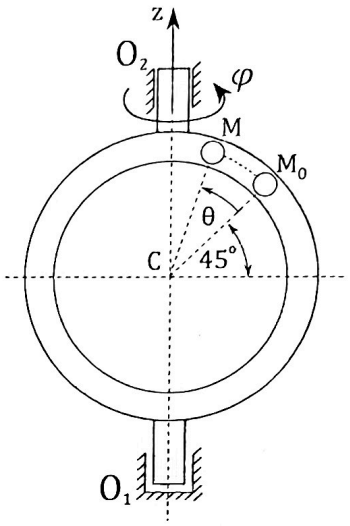
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Механика 3, 14.1.2022. група 1

1. Диск полупречника $\frac{3}{2}R$ (иначе m) може да се котрља без клизања по штапу AB масе $2m$. На диск делује спрег сила интензитета момента спрега $M = 3mgR$. Штап AB доводи у кретање коаксијални цилиндар масе $4m$, полупречника R и $2R$ и полупречника инерције $i_0 = \sqrt{2}R$, при чему између њих нема проклизавања. Коаксијални цилиндар може да се обрће око хоризонталне осе која пролази кроз тачку D. На мањи цилиндар намотано је лако неистегљиво уже о које је обешен терет T масе m. На већи цилиндар намотано је лако неистегљиво уже, чији је други крај намотан на диск. Одредити угаоно убрзање коаксијалног цилиндра.



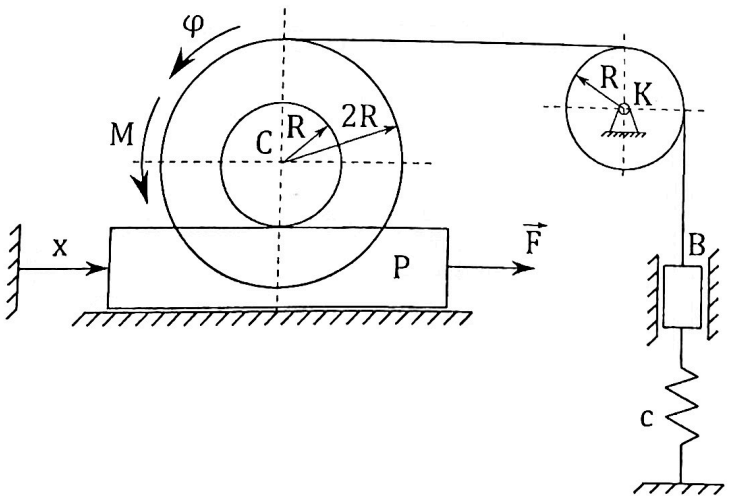
Слика 1



Слика 2

2. На Сл. 2 приказан је танак кружни прстен полупречника R, који може да се обрће око вертикалне осе z по закону $\varphi = \sqrt{\frac{g}{R}}t$. Унутар прстена може да се креће тачка M масе $m = 1$ kg, под дејством привлачне централне силе интензитета $F = 2\sqrt{3}mg$, са центром у тачки C. Тачка је започела кретање из положаја приказаног на слици, одређеним углом од 45°, а интензитет почетне брзине тачке је $V_0 = \sqrt{4gR}$. Одредити укупну реакцију жљеба на тачку M када она заузме положај одређен углом $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$.

3. Кућиште P масе m, које се налази под дејством силе интензитета F правца и смера приказаног на слици, може да клизи по глаткој хоризонталној подлози. По кућишту може да се котрља без клизања коаксијални цилиндар полупречника R и $2R$, масе $2m$ и полупречника инерције $i_0 = \sqrt{2}R$, на који делује спрег сила интензитета момента спрега M. На коаксијални цилиндар је намотано лако неистегљиво уже које је пребачено преко диска K полупречника R и масе $3m$. За други крај ужета везан је клизач B масе m који се креће по вертикалној вођици. Терет је такође везан за опругу крутости c. Написати диференцијалне једначине кретања система. За генералисане координате усвојити $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$. У почетном тренутку, када су вредности генералисаних координата $x(0) = 0$ и $\varphi(0) = 0$, опруга је била ненапрегнута.



Слика 3

januar 22

③ P: m

sila F

spreg M

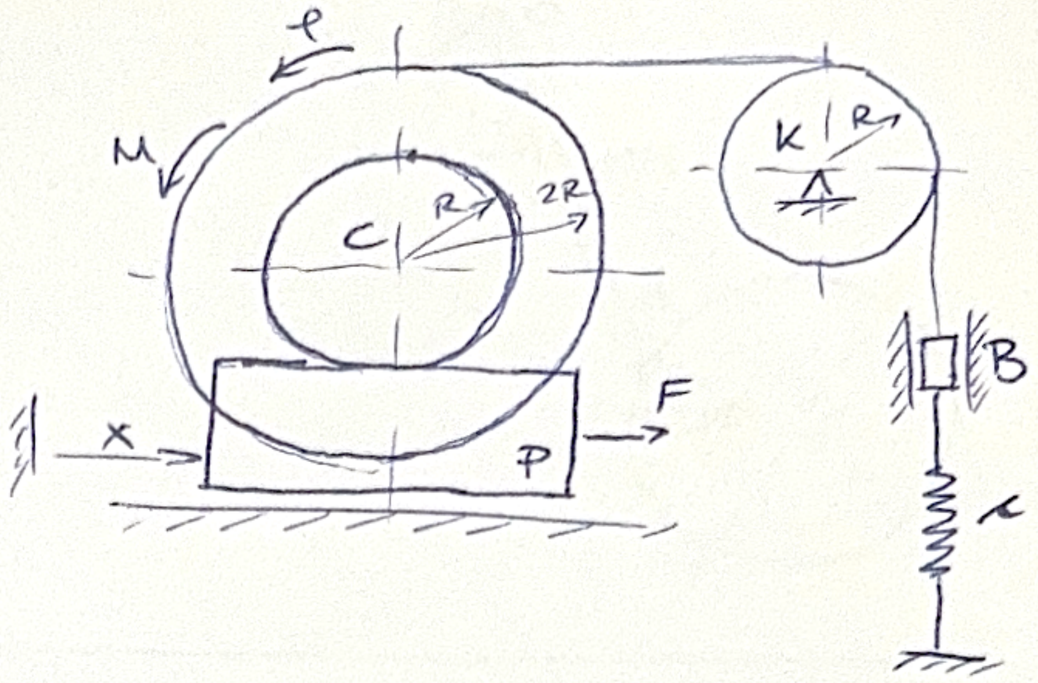
cilindar: R, 2R, 2m, $\rho = \sqrt{2}R$

disk K: R, 3m

B: m

opruga: c, za $x=0$, $\varphi=0$ je nenapregnuta

dif. j-ne kretanja ?



$T = T_P + T_C + T_K + T_B$

$T_P = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$

$T_C = \frac{1}{2} 2m (R\dot{\varphi} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2} 2m \cdot 2R^2 \dot{\varphi}^2 =$

$= mR^2\dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x} + m\dot{x}^2 + 2mR^2\dot{\varphi}^2 =$

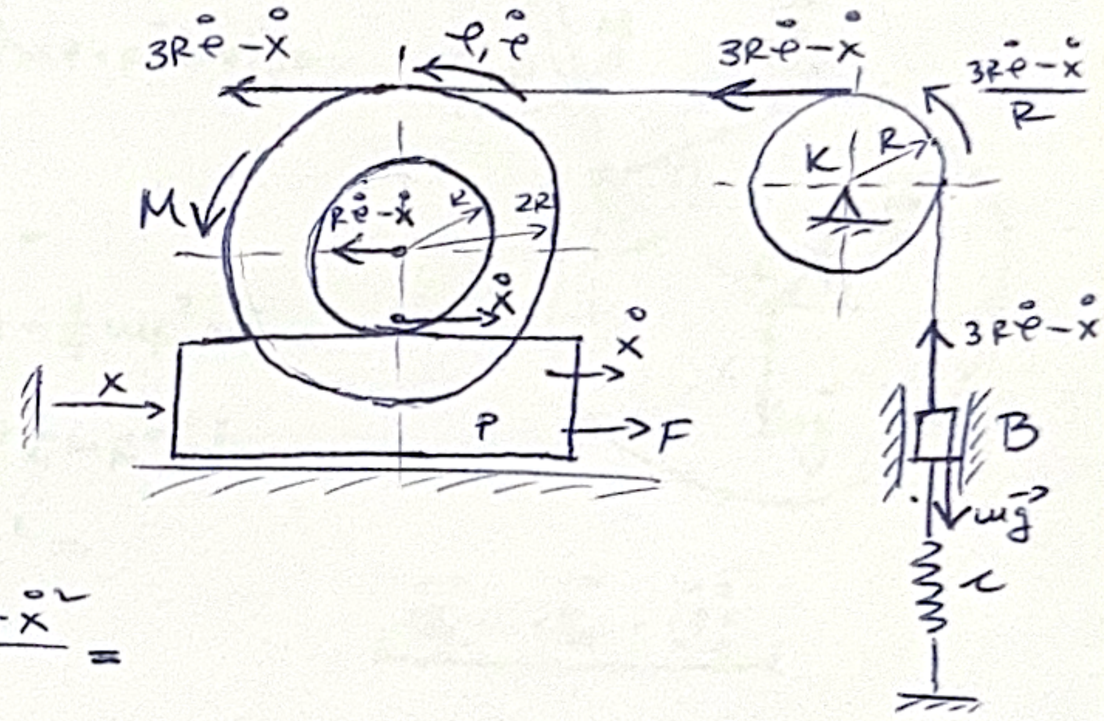
$= 3mR^2\dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x} + m\dot{x}^2$

$T_K = 0 + \frac{1}{2}\frac{3mR^2}{2}\left(\frac{3R\dot{\varphi} - \dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mR^2 \frac{9R^2\dot{\varphi}^2 - 6R\dot{\varphi}\dot{x} + \dot{x}^2}{R^2} =$

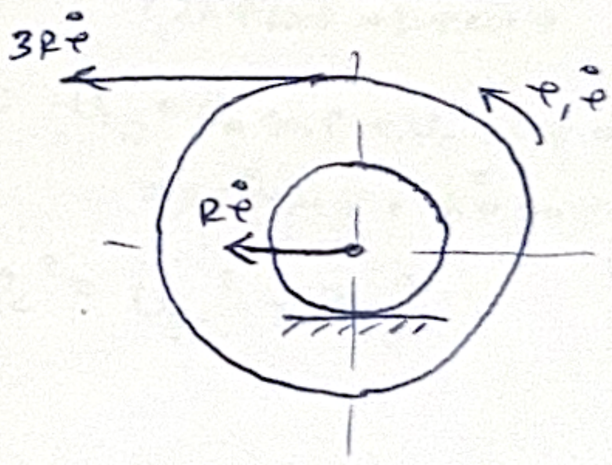
$= \frac{27}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 - \frac{9}{2}mR\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{3}{4}m\dot{x}^2$

$T_B = \frac{1}{2}m(3R\dot{\varphi} - \dot{x})^2 = \frac{9}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - 3mR\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

$T = \frac{11}{4}m\dot{x}^2 - \frac{19}{2}mR\dot{\varphi}\dot{x} + \frac{57}{4}mR^2\dot{\varphi}^2$



cilinder - relativno:



$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{11}{2}m\dot{x} - \frac{19}{2}mR\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{11}{2}m\ddot{x} - \frac{19}{2}mR\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{57}{2}mR^2\dot{\varphi} - \frac{19}{2}mR\dot{x}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{57}{2}mR^2\ddot{\varphi} - \frac{19}{2}mR\ddot{x}$

(↑y) $\delta A = F\delta x + M\delta\varphi - c\zeta d\zeta - mg\delta y_B$,

$\dot{\zeta} = 3R\dot{\varphi} - \dot{x} \rightarrow d\zeta = 3R\delta\varphi - \delta x \rightarrow \zeta = 3R\varphi - x$

$\dot{y}_B = 3R\dot{\varphi} - \dot{x} \rightarrow \delta y_B = 3R\delta\varphi - \delta x$

$\delta A = F\delta x + M\delta\varphi - c(3R\varphi - x)(3R\delta\varphi - \delta x) - mg(3R\delta\varphi - \delta x)$

$\delta A = F\delta x + M\delta\varphi - c\cdot 9R^2\varphi\delta\varphi + c\cdot 3R\cdot x\delta\varphi + c\cdot 3R\varphi\delta x - cx\delta x - 3mgR\delta\varphi + mg\delta x$

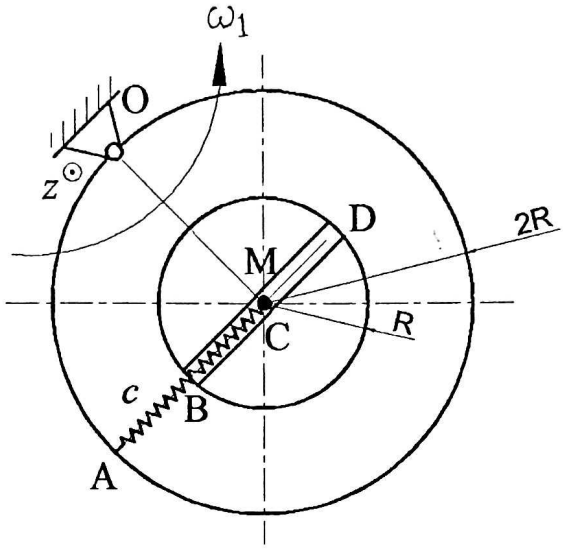
$$\frac{11}{2}m\ddot{x} - \frac{19}{2}mR\ddot{\varphi} = F + 3cR\varphi - cx + mg$$

$$\frac{57}{2}mR^2\ddot{\varphi} - \frac{19}{2}mR\ddot{x} = M - 9cR^2\varphi + 3cRx - 3mgR$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

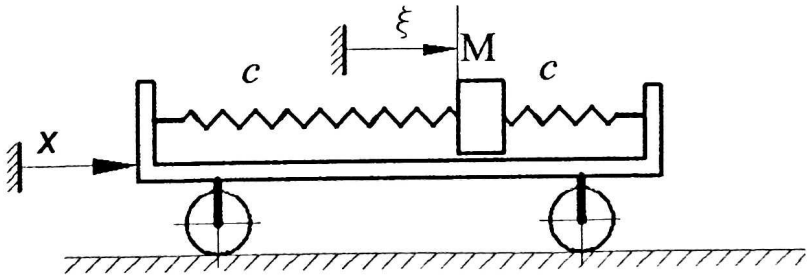
Mehanika 3, G1 5/1+ 2021.

1. Horizontalna ploča oblika koakcijalnog diska poluprečnika R i 2R, mase m i poluprečnika inercije i_O=3R može da se obrće oko vertikalne ose Oz. Po kanalu BD kreće se tačka M mase m koja je oprugom krutosti c vezana za tačku A ploče. U početnom trenutku, kada se tačka M nalazila u položaju D sistem je mirovao. Odrediti ugaonu brzinu ploče (ω_1) u trenutku t_1 kada tačka M stigne u tačku C (položaj prikazan na slici). Veze su idealne. Dužina nenapregnute opruge je R.



Slika uz zadatak 1

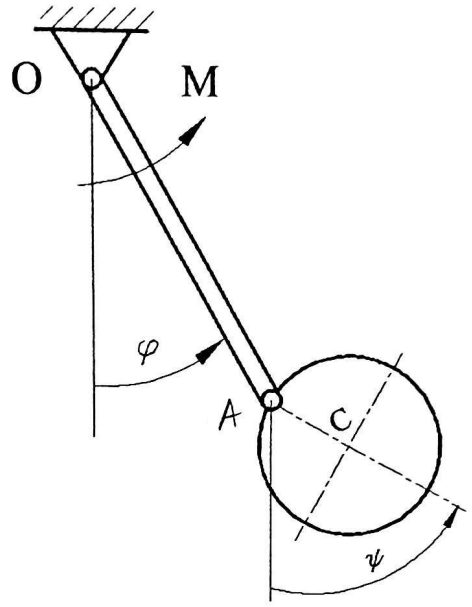
2. Teret M mase m=1 koji je oprugama krutosti c=1 vezan za kućište kreće se po idealno glatkoj površini istog kućišta. Opruga je nenapregnuta u položaju ξ=0 (koordinatna osa ξ vezana je za kućište). Homogeni diskovi kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Kućište se kreće po zakonu x=sin(t). U početnom trenutku sistem je mirovao i relativna koordinata tačke M bila je ξ(0)=0. Mase diskova i kućišta zanemariti. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M, ξ=ξ(t). Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.



Slika uz zadatak 2

JYIT 2021.

3. Štap OA dužine $2R$, mase m zglogno je vezan za nepomičnu tačku O i disk kao na slici. Homogeni disk je mase m i poluprečnika R. Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni. Na štap dejstvuje spreg sila momenta intenziteta M, pravca i smera kao na slici. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema u odnosu na generalisane coordinate φ i ψ.



Slika uz zadatak 3

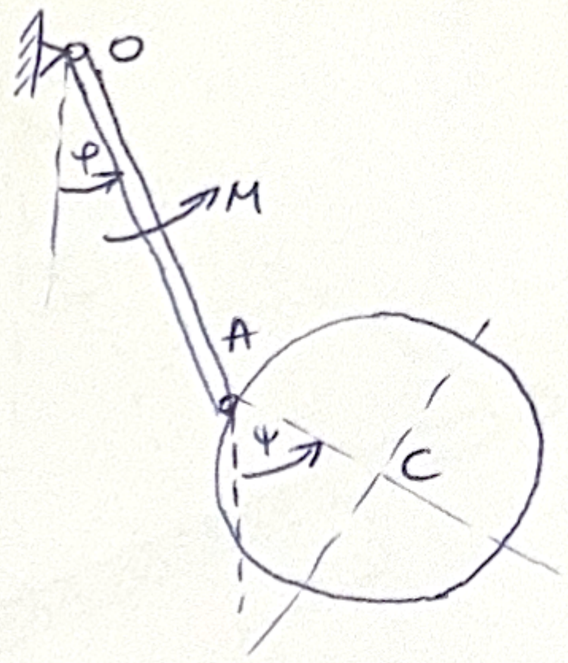
jun 21

③ OA: $2R, m$

disk: R, m

spreg M

dif. i-ve za φ, ψ?



$\underline{T = T_{OA} + T_C}$

$T_{OA} = \frac{1}{2} m (R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m (2R)^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} m R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{2}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2$

$T_C = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \dot{\psi}^2 = \frac{1}{2} m \left((2R\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\psi}\cos\psi)^2 + (2R\dot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\psi}\sin\psi)^2 \right) +$

$+ \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$

$= \frac{1}{2} m \left(4R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + R^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\varphi\cos\psi + \right.$

$\left. + 4R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + R^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\psi \right) + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$

$= \frac{1}{2} m \left(4R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\left(\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\right) \right) + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$

$= \frac{1}{2} m \left(4R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\psi}^2 + 4R^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) \right) + \frac{1}{4} m R^2 \dot{\psi}^2 =$

$= 2mR^2\dot{\varphi}^2 + 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{3}{4} m R^2 \dot{\psi}^2$

$T = \frac{8}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2 + 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi) + \frac{3}{4} m R^2 \dot{\psi}^2$

$\underline{\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)}$

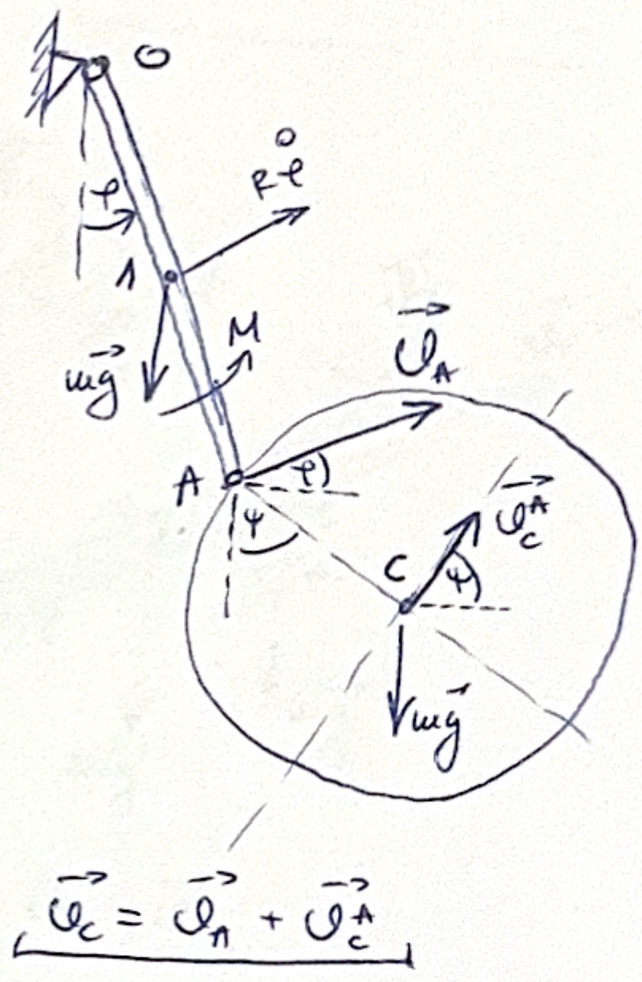
$\underline{\frac{\partial T}{\partial \psi} = 2mR^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)}$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{16}{3} m R^2 \dot{\varphi} + 2mR^2\dot{\psi}\cos(\varphi - \psi)$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = \frac{3}{2} m R^2 \dot{\psi} + 2mR^2\dot{\varphi}\cos(\varphi - \psi)$

$\underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{16}{3} m R^2 \ddot{\varphi} + 2mR^2\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)\cdot(\dot{\varphi} - \dot{\psi})}$

$\underline{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = \frac{3}{2} m R^2 \ddot{\psi} + 2mR^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\varphi}\sin(\varphi - \psi)\cdot(\dot{\varphi} - \dot{\psi})}$



$\underline{\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{v}_C^A}$

x: $v_{Cx} = v_A\cos\varphi + v_C^A\cos\psi =$

$= 2R\dot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\psi}\cos\psi$

y: $v_{Cy} = v_A\sin\varphi + v_C^A\sin\psi =$

$= 2R\dot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\psi}\sin\psi$

$v_C^2 = v_{Cx}^2 + v_{Cy}^2$

$(\uparrow y)$

$\delta A = -mg\delta y_1 - mg\delta y_C + M\delta\varphi$, $\dot{y}_1 = 2R\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\dot{y}_C = 2R\dot{\varphi}\sin\varphi + R\dot{\psi}\sin\psi$

$\delta A = -mgR\sin\varphi\delta\varphi - mg\cdot 2R\sin\varphi\delta\varphi - mgR\sin\psi\delta\varphi + M\delta\varphi$

$$\frac{16}{3} m R^2 \ddot{\varphi} + 2mR^2\ddot{\psi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\psi}\sin(\varphi - \psi)\cdot(\dot{\varphi} - \dot{\psi} - \dot{\varphi}) = -3mgR\sin\varphi + M$$

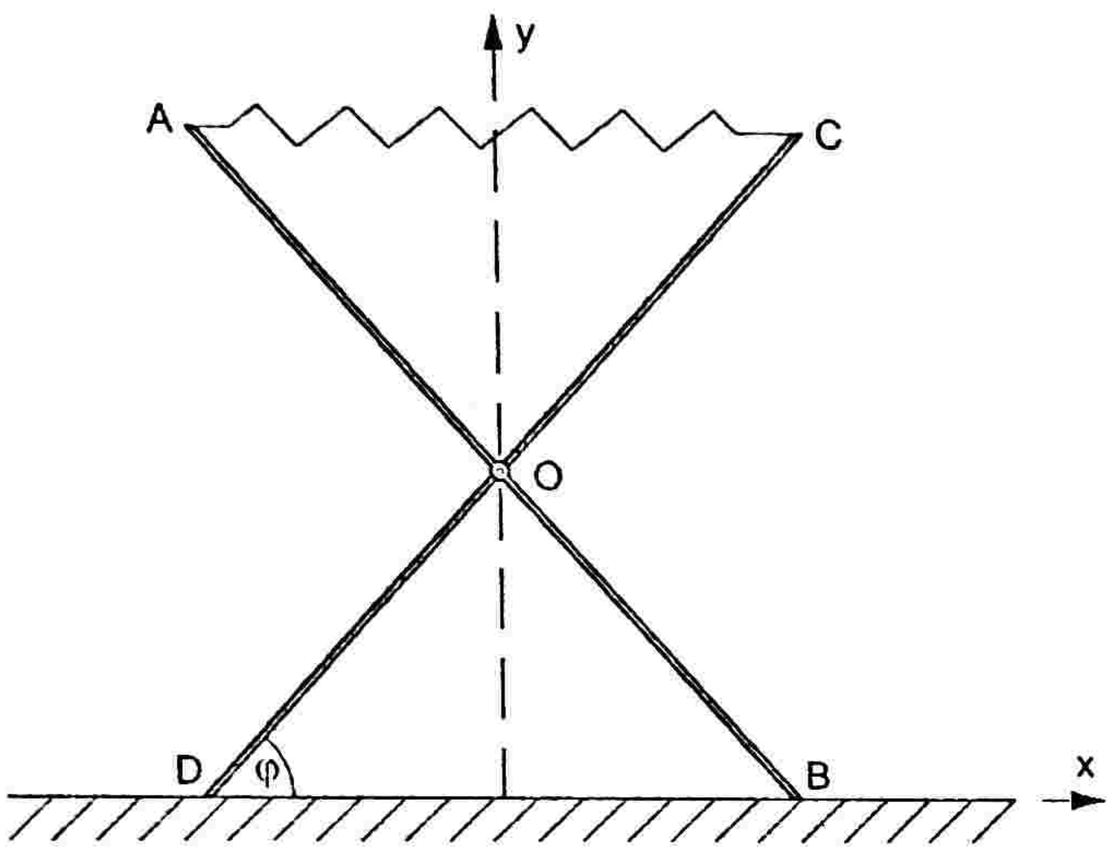
$$\frac{3}{2} m R^2 \ddot{\psi} + 2mR^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi - \psi) - 2mR^2\dot{\varphi}\sin(\varphi - \psi)(\dot{\varphi} - \dot{\psi} + \dot{\psi}) = -mgR\sin\varphi$$

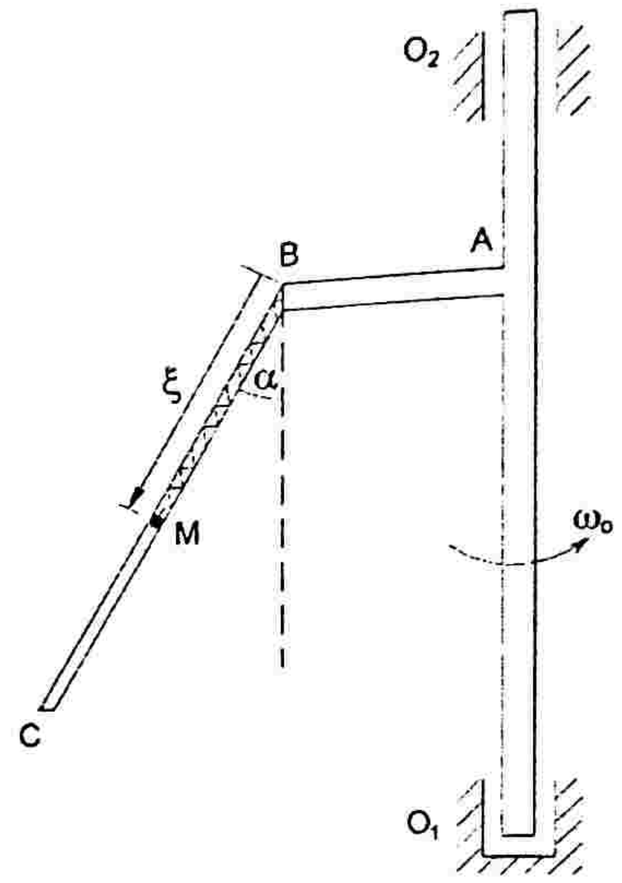
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

1. Mehanički sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji od dva identična homogena štapa AB i CD, od kojih je svaki mase m i dužine $2l$. Štapovi su medjusobno zglobno vezani u tački O (središte masa oba štapa). Krajevi štapova B i D mogu da klize po glatkoj horizontalnoj podlozi. Slobodni krajevi štapova A i C povezani su oprugom krutosti $c = \frac{mg}{l}$. U početnom trenutku $t_0 = 0$ opruga je nenapregnuta, a štapovi su mirovali i bili u položaju koji je odredjen uglom φ_0 ($\sin\varphi_0 = 0{,}8$).

a) Odrediti ugaonu brzinu štapova u trenutku t_1 kada štapovi zauzimaju ugao φ_1 u odnosu na horizontalu ($\sin\varphi_1 = 0{,}6$).

b) Odrediti ubrzanje tačke O u početnom trenutku t_0.



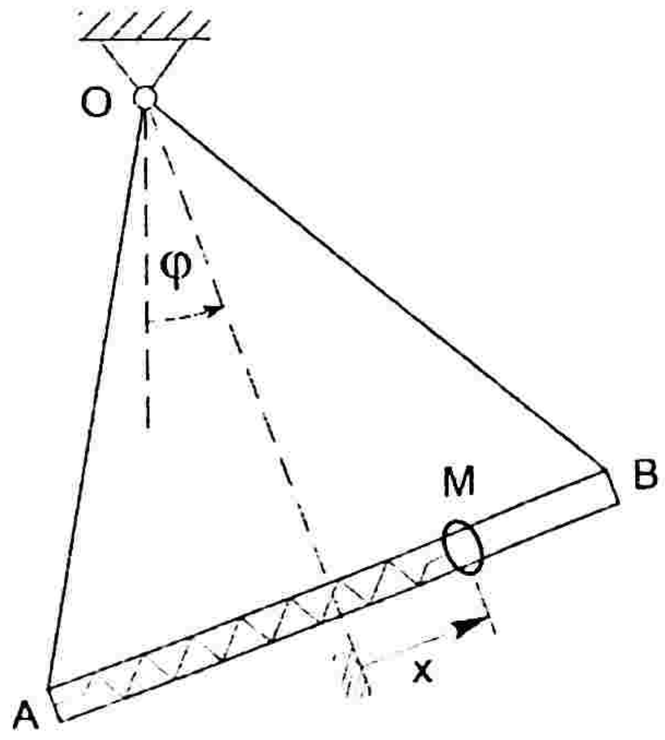


2. Kruta savijena cev ABC obrće se oko nepokretne vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω_0 u naznačenom smeru. Unutar cevi (po delu BC) može da se kreće bez trenja tačka M mase m. Tačka je vezana oprugom krutosti $c = m\omega_0^2$, drugi kraj opruge vezan je za tačku B. Dužina nenapregnute opruge iznosi l. Položaj tačke M odredjen je relativnom koordinatom ξ, kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku tačka je bila u relativnom mirovanju u položaju $\xi_0 = l$.

a) Ako je $\overline{AB} = l$ i $\alpha = 30°$, odrediti jednačinu relativnog kretanja tačke $\xi(t)$.

b) Odrediti reakciju cevi u funkciji vremena, $N(t)$ =?

3. Homogeni štap AB mase $2m$ i dužine $2l$ vezan je pomoću dva neistegljiva kanapa za nepokretnu tačku O. Položaj štapa u odnosu na vertikalu odredjen je uglom φ, kao što je prikazano na slici. Duž štapa može da klizi bez trenja prsten M mase m. Prsten je vezan oprugom krutosti c, drugi kraj opruge vezan je u tački A. Položaj prstena u odnosu na štap odredjen je relativnom koordinatom x. Opruga je nenapregnuta u položaju $x = 0$ (prsten je tada na sredini štapa). Za date generalisane koordinate (φ, x) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema. Dato je: $\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB}$.



januar 21

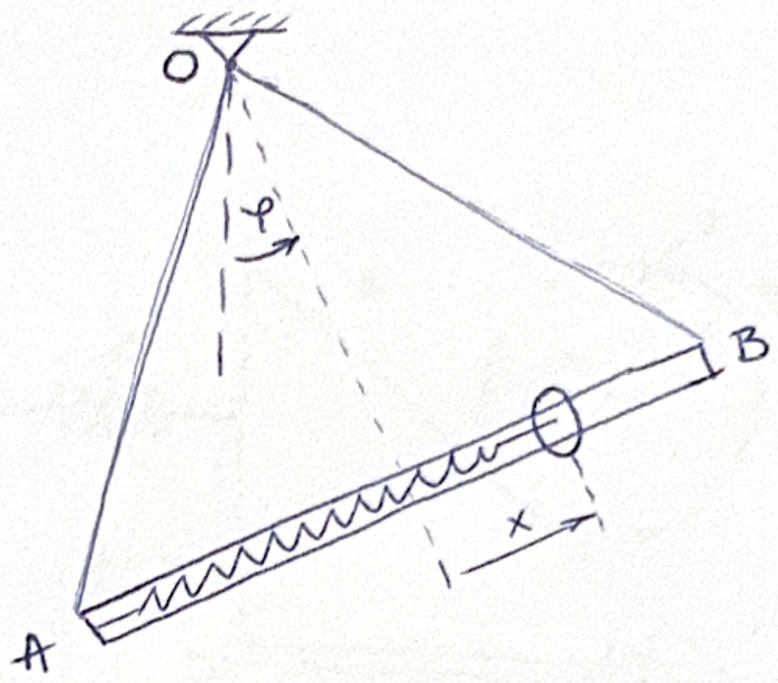
③ AB: $2m$, 2ℓ

M: m

opruga: c, za $x=0$ neopregnuta

dif. j-ne kretanja za x, φ?

$\overline{AB} = \overline{OA} = \overline{OB} = 2\ell$



$T = T_{AB} + T_M$

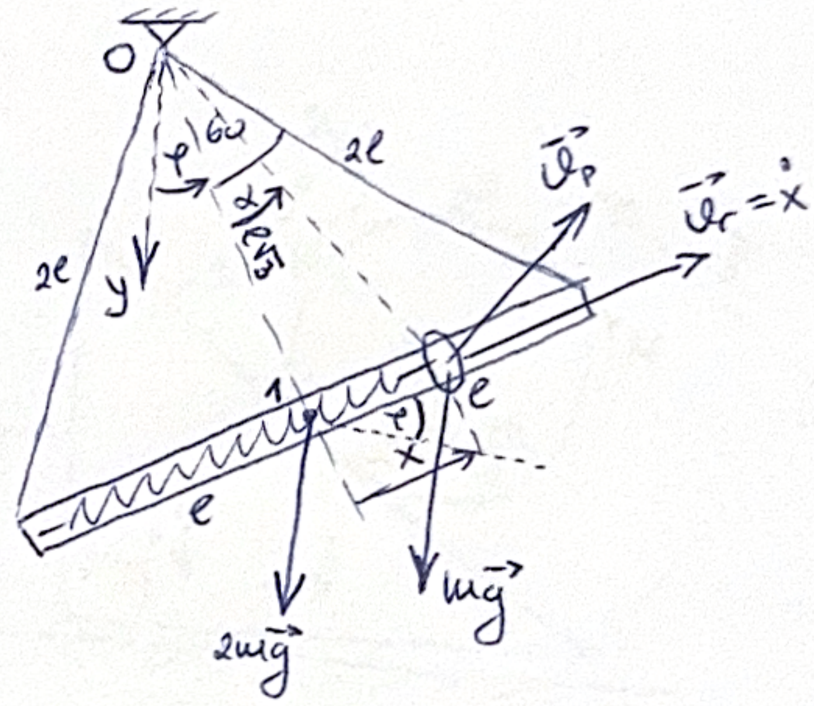
$T_{AB} = \frac{1}{2} 2m (\ell\sqrt{3}\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} 2m (2\ell)^2 \dot{\varphi}^2 = 3m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} m\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{10}{3} m\ell^2\dot{\varphi}^2$

$T_M = \frac{1}{2} m v_M^2 = \frac{1}{2} m \left((\dot{x} + \ell\sqrt{3}\dot{\varphi})^2 + (x\dot{\varphi})^2 \right) =$

$= \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + 3\ell^2\dot{\varphi}^2 + 2\sqrt{3}\ell\dot{\varphi}\dot{x} + x^2\dot{\varphi}^2) =$

$= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{3}{2} m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} x^2\dot{\varphi}^2 + \sqrt{3} m\ell\dot{\varphi}\dot{x} =$

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{29}{6} m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m x^2\dot{\varphi}^2 + \sqrt{3} m\ell\dot{\varphi}\dot{x}$



$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{29}{3} m\ell^2\dot{\varphi} + m x^2\dot{\varphi} + \sqrt{3} m\ell\dot{x}$,

$\frac{\partial T}{\partial x} = m x\dot{\varphi}^2$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + \sqrt{3} m\ell\dot{\varphi}$,

$\vec{v}_M = \vec{v}_p + \vec{v}_r$

$v_{px} = \ell\sqrt{3}\dot{\varphi}$

$v_{py} = x\dot{\varphi}$

$v_r = \dot{x}$

$v_M^2 = (\dot{x} + \ell\sqrt{3})^2 + (x\dot{\varphi})^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{29}{3} m\ell\ddot{\varphi} + x^2\ddot{\varphi} + 2m x\dot{x}\dot{\varphi} + \sqrt{3} m\ell\ddot{x}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + \sqrt{3} m\ell\ddot{\varphi}$

($\downarrow y$) $\delta A = 2mg\delta y_1 + mg\delta y_M - c\zeta\delta\zeta$,

$y_1 = \ell\sqrt{3}\cos\varphi \rightarrow \frac{\partial y_1}{\partial t} = -\ell\sqrt{3}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\sin\varphi$

$y_M = \ell\sqrt{3}\cos\varphi - x\sin\varphi \rightarrow \frac{\partial y_M}{\partial t} = -\ell\sqrt{3}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\sin\varphi - \frac{\partial x}{\partial t}\sin\varphi - x\frac{\partial \varphi}{\partial t}\cos\varphi$

$\zeta = x \rightarrow \delta\zeta = \delta x$

$\delta A = -2mg\ell\sqrt{3}\sin\varphi\delta\varphi - mg\ell\sqrt{3}\sin\varphi\delta\varphi - mg\sin\varphi\delta x - mgx\cos\varphi\delta\varphi - cx\delta x$

$\frac{29}{3} m\ell\ddot{\varphi} + m x^2\ddot{\varphi} + 2m x\dot{x}\dot{\varphi} + \sqrt{3} m\ell\ddot{x} = -3mg\ell\sqrt{3}\sin\varphi - mgx\cos\varphi$

$m\ddot{x} + \sqrt{3} m\ell\ddot{\varphi} - m x\dot{\varphi}^2 = -mg\sin\varphi - cx$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

ПРВА ГРУПА

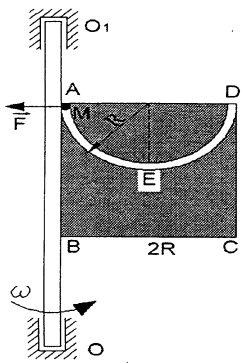
МЕХАНИКА 3

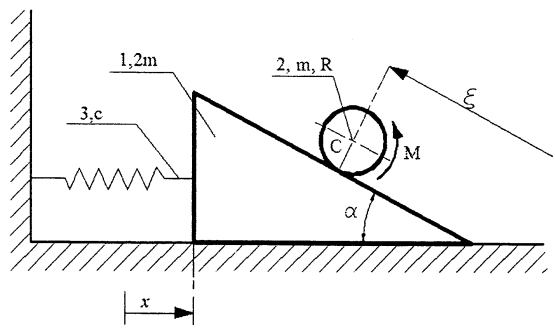
писмени део испита, 11.09.2014.

Задатак бр. 1: Хомогена квадратна плоча *ABCD* масе $3m$ и странице $2R$ обрће се угаоном брзином ω_0 око вертикалне осе OO_1. У неком тренутку у глатки кружни канал *AED* пуштена је куглица *M*, масе m без почетне брзине. У истом тренутку на куглицу почиње да делује константна сила интензитета $F = mg/2$, која је све време кретања хоризонтална и усмерена према оси обртања. Одредити апсолутну брзину куглице и угаону брзину плоче у тренутку када се куглица налази у положају *E*. Колики треба да буде интензитет силе *F* да би релативна брзина куглице у положају *E* била једнака нули?

Задатак бр. 2: Материјална тачка масе m креће се под дејством централне силе $F_r = -m a V_0^2 \frac{\cos\varphi}{r^2}$ тако да је интензитет почетне брзине V_0, $r_0 = a$, а почетна брзина управна је на почетни потег. Одредити $r = r(\varphi)$.

Задатак бр. 3: По глаткој стрмој равни призме *1* (нагиб α) масе *2m* може да се котрља без клизања хомогени диск *2*, масе *m*, полупречника *R*, на кога дејствује спрег сила момента *M*. Призма је везана опругом *3*, крутости *c*, за непомичну вертикалну раван, и при кретању призме опруга остаје стално хоризонтална. Опруга је недеформисана када је *x=0*. Ако се призма креће по глаткој хоризонталној подлози, написати диференцијалне једначине кретања. Генералисане координате, x и ξ, приказане су на слици.





- *Употреба литературе није дозвољена.*
- *Овај формулар са задацима предати заједно са испитном свеском.*
- *Сва евентуална питања у вези текста задатака постављати дежурним наставницима и асистентима.*
- *На насловној страни испитне свеске обавезно уписати све податке, а у рубрици* ***Напомене*** *име предметног наставника.*

Septembar 14

③ 1: $2m$

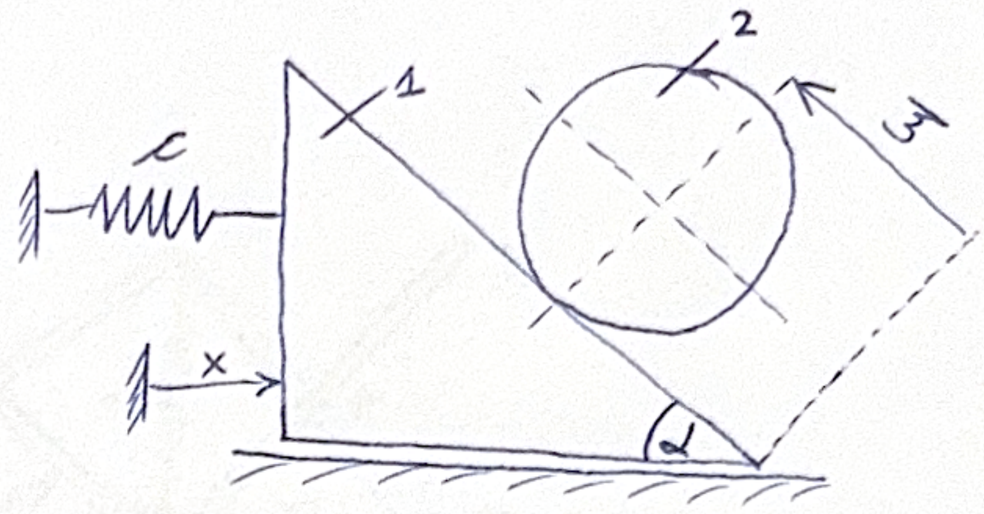
2: m, R

moment M

opruga: c, za $x=0$ je nedeformisana

dif. j-ne kretanja za x, ϑ?

(ϑ je rel. koord. u odnosu na pravu)



$T = T_1 + T_2$

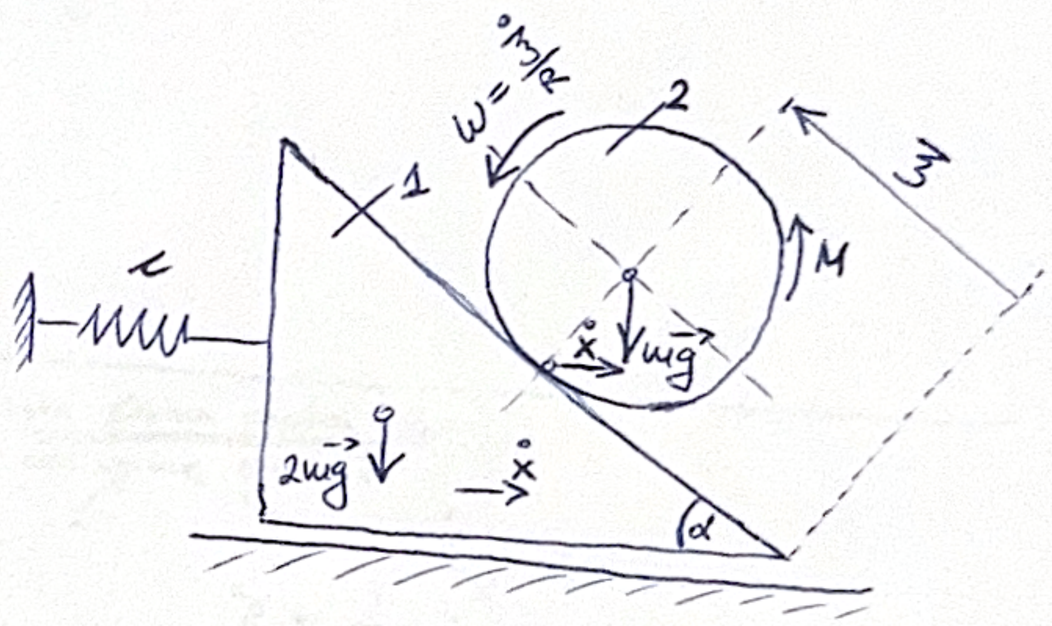
$T_1 = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2 + 0 = m\dot{x}^2$

$T_2 = \frac{1}{2} m v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{mR^2}{2} \omega^2 =$

$= \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\alpha + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{4} mR^2 \frac{\dot{\vartheta}^2}{R^2} =$

$= \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\alpha + \frac{3}{4} m\dot{\vartheta}^2$

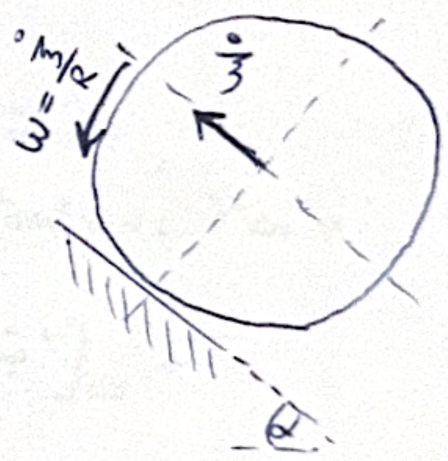
$T = \frac{3}{2} m\dot{x}^2 - m\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\alpha + \frac{3}{4} m\dot{\vartheta}^2$



$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x} - m\dot{\vartheta}\cos\alpha$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 3m\ddot{x} - m\ddot{\vartheta}\cos\alpha$

$\frac{\partial T}{\partial \vartheta} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = \frac{3}{2} m\dot{\vartheta} - m\dot{x}\cos\alpha$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}}\right) = \frac{3}{2} m\ddot{\vartheta} - m\ddot{x}\cos\alpha$

disk 2 - relativno

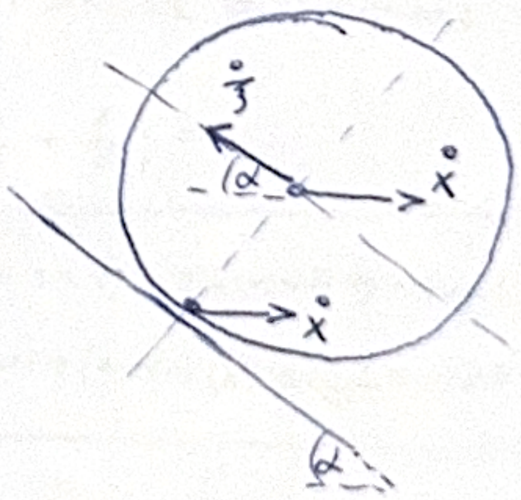


$\delta A = -cx\delta x + M\delta\varphi - mg\delta y_c = -cx\delta x + M\frac{\delta\vartheta}{R} - mg\delta\vartheta\sin\alpha$

$3m\ddot{x} - m\ddot{\vartheta}\cos\alpha = -cx$

$\frac{3}{2} m\ddot{\vartheta} - m\ddot{x}\cos\alpha = \frac{M}{R} - mg\sin\alpha$

disk 2 - apsolutno



$v_{cx} = \dot{x} - \dot{\vartheta}\cos\alpha$

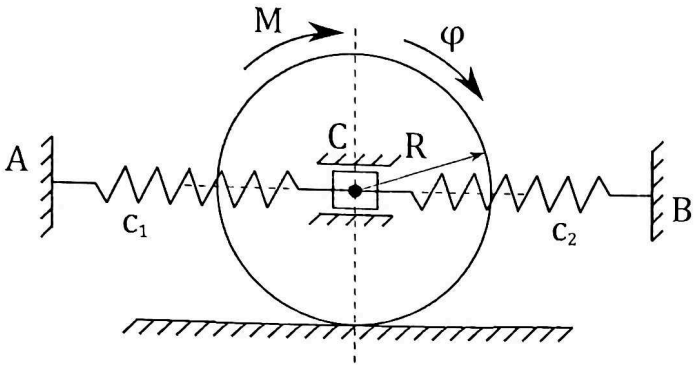
$v_{cy} = \dot{\vartheta}\sin\alpha$

$v_c^2 = \dot{x}^2 - 2\dot{x}\dot{\vartheta}\cos\alpha + \dot{\vartheta}^2\cos^2\alpha + \dot{\vartheta}^2\sin^2\alpha$

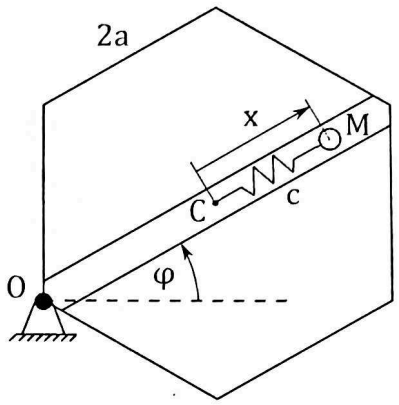
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Механика 3, 04.02.2022.

1. Диск полупречника $R = 2$ m и масе 2 kg може да се котрља без клизања по непокретној подлози. На диск делује спрег сила интензитета момента спрега $M = 64$ Nm. За центар диска C је зглобно везан клизач масе 1 kg, који може да се креће по глатким хоризонталним вођицама, као што је приказано на Сл. 1. За центар диска су такође везане две опруге: опруга крутости $c_1 = 12\,\mathrm{N/m}$ чији је други крај везан за непокретну тачку A, и опруга крутости $c_2 = 2c_1$ чији је други крај везан за непокретну тачку B. У почетном тренутку систем је мировао, а опруге су биле ненапрегнуте. Одредити закон кретања диска $\varphi = \varphi(t)$.



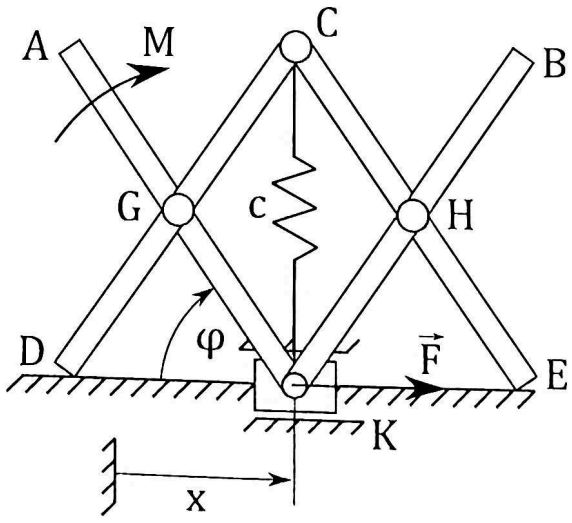
Слика 1



Слика 2

2. На Сл. 2 приказан је правилни шестоугао страница $2a$, који се може обртати око хоризонталне осе која пролази кроз теме O, по закону $\varphi = (\sqrt{g/a})t$. Дуж дијагонале шестоугла, која полази из темена O, урезан је жљеб унутар којег може да се креће материјална тачка M масе m. Материјална тачка M је везана опругом крутости $c = 2mg/a$, чији је други крај везан за центар C шестоугла. Материјална тачка је у почетном тренутку мировала у положају $x_0 = a$, а опруга је била ненапрегнута. Одредити реакцију жљеба на материјалну тачку M у зависности од времена.

3. Клизач K масе $3m$ може да клизи дуж хоризонталне вођице која се налази на непокретној подлози, под дејством силе инзензитета F. За клизач су у тачки K зглобно везани штапови AK и BK, једнаких маса m и дужина $2L$. На штап AK делује спрег сила интензитета момента спрега M. Штапови CD и CE (једнаких маса $2m$ и дужина $2L$) су зглобно везани на својим крајевима, у тачки C. Штап CD зглобно је везан у свом средишту за средиште штапа AK, у тачки G, док му се крај D креће по глаткој хоризонталној подлози. Штап CE зглобно је везан у свом средишту за средиште штапа BK, у тачки H, док му се крај E креће по глаткој хоризонталној подлози. Зглобови C и K су везани опругом крутости c. Написати диференцијалне једначине кретања система. За генералисане координате усвојити $q_1 = x$ и $q_2 = \varphi$. У почетном тренутку систем је мировао, штапови су имали вертикалан положај, а опруга је била ненапрегнута.



Слика 3

Februar 22

③ K: 3m

sila F

moment M

AK: m, 2L

BK: m, 2L

CD: 2m, 2L

CE: 2m, 2L

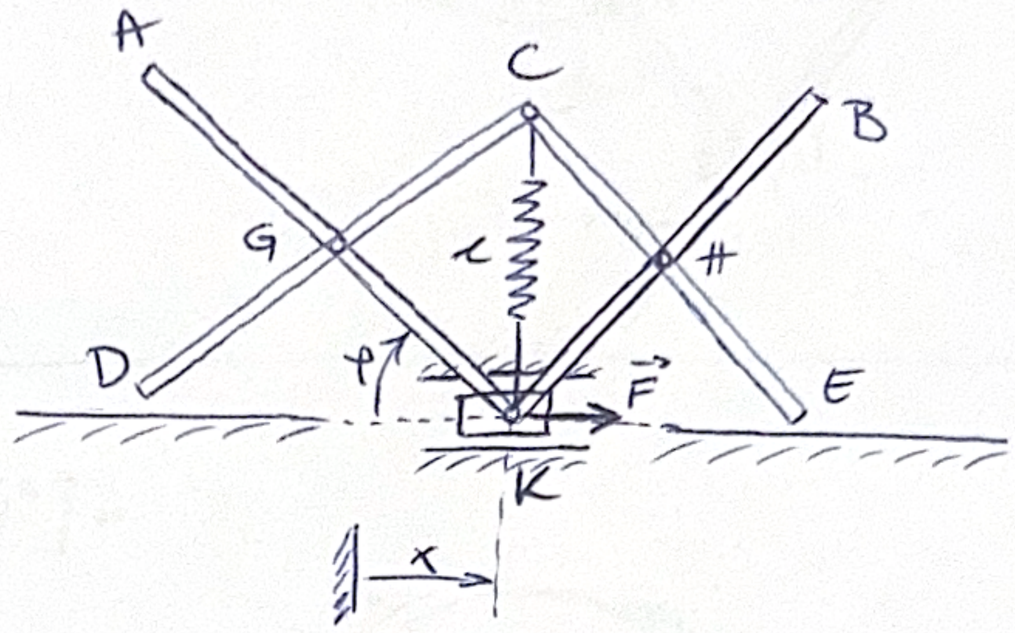
opruga: c

dif. j-ne kretanja za x, φ

$t_0 = 0$: sistem miruje

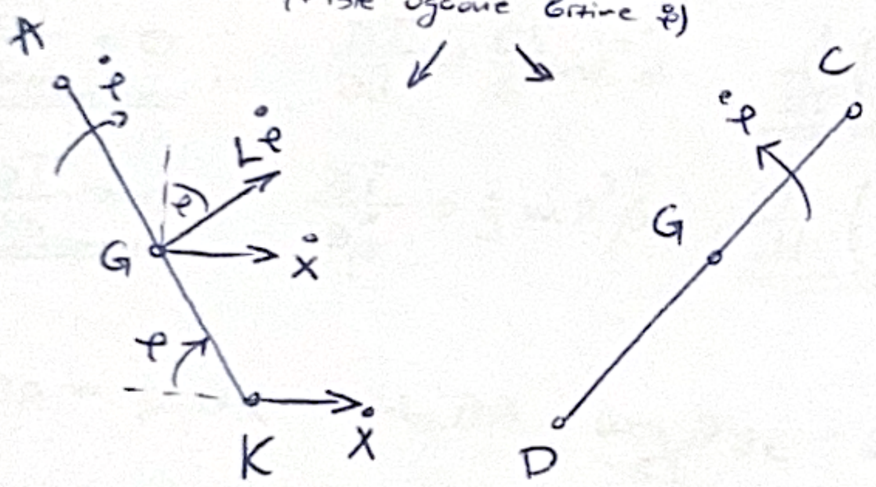
štapovi su vertikalni

opruga je neopregnuta



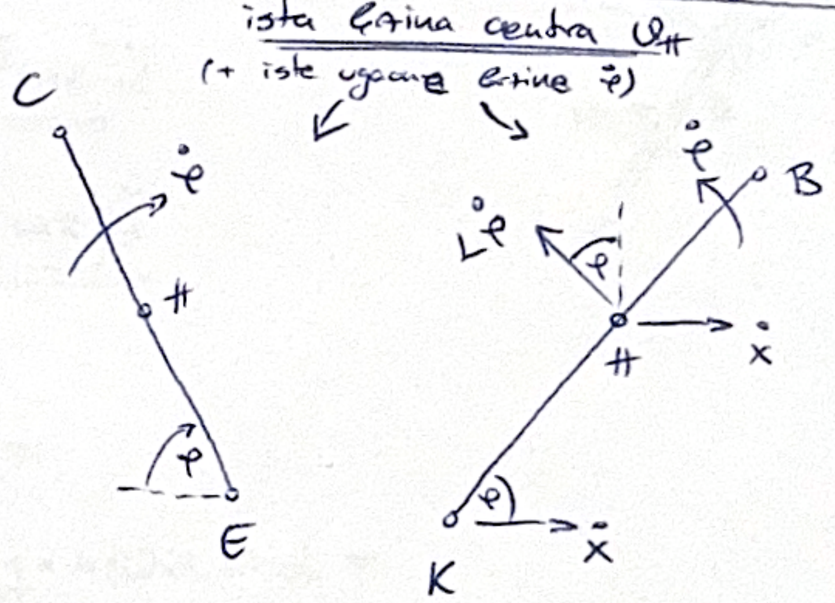
ista brzina centra v_G

(+ iste ugaone brzine $\dot\varphi$)



ista brzina centra v_H

(+ iste ugaone brzine $\dot\varphi$)



$v_{Gx} = \dot x + L\dot\varphi \sin\varphi$, $v_{Gy} = L\dot\varphi\cos\varphi$,

$v_G^2 = \dot x^2 + 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + L^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi$

$v_{Hx} = \dot x - L\dot\varphi\sin\varphi$, $v_{Hy} = L\dot\varphi\cos\varphi$,

$v_H^2 = \dot x^2 - 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2\sin^2\varphi + L^2\dot\varphi^2\cos^2\varphi$

$$T = \left[\tfrac{1}{2}3m\dot x^2 + 0\right]_K + \left[\tfrac{1}{2}m v_G^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{12}m(2L)^2\dot\varphi^2\right]_{AK} + \left[\tfrac{1}{2}2m v_G^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{12}2m(2L)^2\dot\varphi^2\right]_{CD} +$$

$$+ \left[\tfrac{1}{2}2m v_H^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{12}2m(2L)^2\dot\varphi^2\right]_{CE} + \left[\tfrac{1}{2}m v_H^2 + \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{12}m(2L)^2\dot\varphi^2\right]_{KB} =$$

$$T = \tfrac{3}{2}m\dot x^2 + \left[\tfrac{1}{2}m\left(\dot x^2 + 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2\right) + \tfrac{1}{6}mL^2\dot\varphi^2\right] + \left[m\left(\dot x^2 + 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2\right) + \tfrac{1}{3}mL^2\dot\varphi^2\right] +$$

$$+ \left[m\left(\dot x^2 - 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2\right) + \tfrac{1}{3}mL^2\dot\varphi^2\right] + \left[\tfrac{1}{2}m\left(\dot x^2 - 2L\dot x\dot\varphi\sin\varphi + L^2\dot\varphi^2\right) + \tfrac{1}{6}mL^2\dot\varphi^2\right] =$$

$$T = m\dot x^2\left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} + 1 + 1 + \tfrac{1}{2}\right) + mL^2\dot\varphi^2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + 1 + \tfrac{1}{3} + 1 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6}\right) =$$

$$T = \tfrac{9}{2}m\dot x^2 + 4mL^2\dot\varphi^2$$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot x} = 9m\dot x$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) = 9m\ddot x$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi} = 8mL^2\dot\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot\varphi}\right) = 8mL^2\ddot\varphi$

$\delta A = F\delta x - c\zeta\delta\zeta - 3mg\delta y_G - 3mg\delta y_H + M\delta\varphi$

$\zeta = 2L - 2L\sin\varphi = 2L(1-\sin\varphi)$

$\delta\zeta = -2L\cos\varphi\delta\varphi$

$\delta A = F\delta x - c\cdot 2L(1-\sin\varphi)(-2L\cos\varphi\delta\varphi) - 6mgL\cos\varphi\delta\varphi + M\delta\varphi$

$\delta A = F\delta x + 4cL^2\cos\varphi(1-\sin\varphi)\delta\varphi - 6mgL\cos\varphi\delta\varphi + M\delta\varphi$

$$9m\ddot x = F$$

$$8mL^2\ddot\varphi = 4cL^2\cos\varphi(1-\sin\varphi) - 6mgL\cos\varphi + M$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

ПРВА ГРУПА

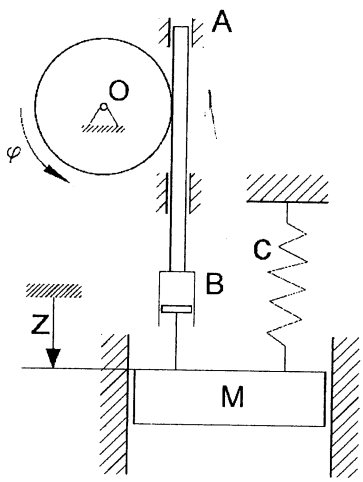
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://nastava.mas.bg.ac.rs/nastava/viewforum.php?f=65

МЕХАНИКА 3

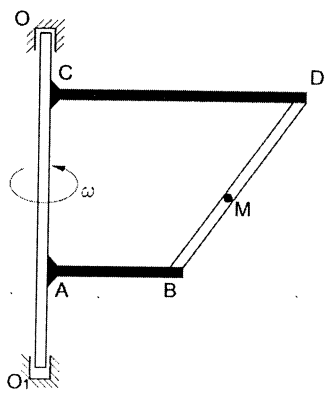
30. **септембар** 2017.

1. Два хоризонтална штапа AB (масе m и дужине R) и CD (масе $2m$ и дужине $2R$) круто су спојени за вертикалну осовину OO_1. За крајеве ових штапова заварена је глатка цев BD занемарљиве масе (слика 1). У почетном тренутку тачка M масе m се налазила у положају B и пуштена је да се креће кроз цев BD из стања релативног мировања. Одредити максимално растојање између штапова AB и CD да би тачка стигла у положај D ако је у почетном тренутку угаона брзина система $\omega_0 = \sqrt{g/R}$.

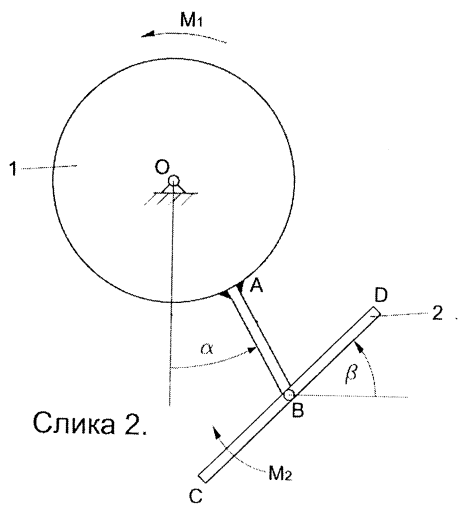
2. Зупчаник полупречника $R = 1m$ обрће се око непокретне хоризонталне осе која пролази кроз тачку O, при чему се угао обртања мења по закону $\varphi = \sin(t)[rad]$ (позитиван смер угла обртања је дат на слици). Зупчаник покреће зупчасту летву AB која се креће дуж вертикалних вођица. За крај B летве везан је цилиндар пригушивача. Тело M, масе $m = 1kg$, везано је за клип пригушивача и опругом крутости $c = 20N/m$ за непокретну тачку. Кретањем клипа у цилиндру пригушивача јавља се сила отпора кретању пропорционална првом степену брзине клипа у односу на цилиндар. Коефицијент пропорционалости је $b = 8Ns/m$. Одредити коначну једначину кретања тела M ако је у почетном тренутку оно мировало у положају статичке равнотеже. За координатни почетак узети положај статичке равнотеже (Оса z је усмерена вертикално наниже).



3. Материјални систем састоји се од тела 1, кога чине круто спојени диск полупречника R масе m и штап AB дужине R масе m, и тела 2-штапа CD дужине $2R$ масе $2m$ (слика 2). У тачки B зглобно су везани тело 1 и тело 2 тако да је $\overline{CB} = \overline{BD}$. На тело 1 дејствује спрег сила интензитета момента M_1, а на тело 2 спрег сила интензитета момента M_2. Ако се систем налази у вертикалној равни, написати диференцијалне једначине кретања система за задате генералисане координате.



Слика 1.



Слика 2.

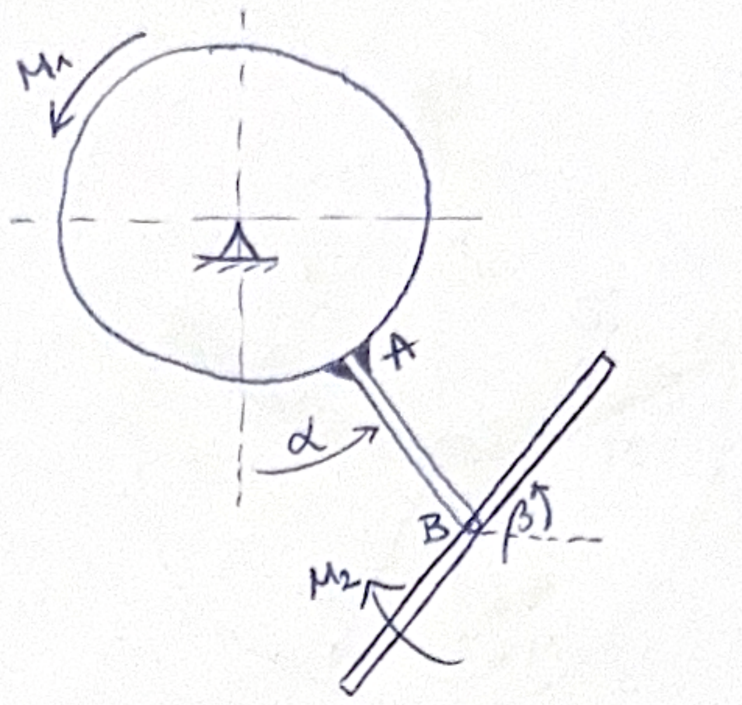
oktobar 17

③ 1: m, R (disk) + m, R (štap AB)

2: $2m, 2R$

spreg M_1, spreg M_2

dif. j-ne kretanja za α, β?



$$T = \left[0 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\alpha}^2\right]_{disk} + \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{3}{2}R\dot{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}mR^2\dot{\alpha}^2\right] +$$

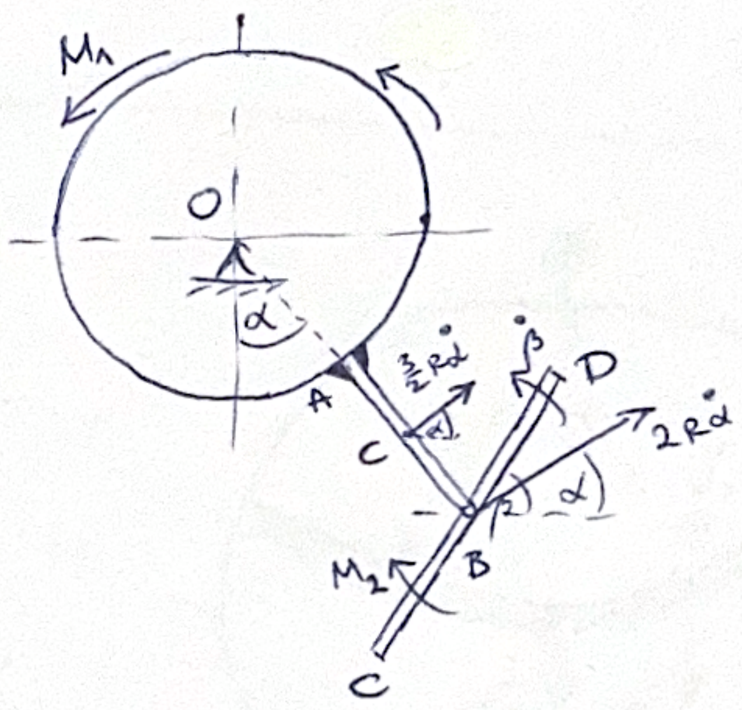
$$+ \left[\frac{1}{2}2m(2R\dot{\alpha})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}2m(2R)^2\dot{\beta}^2\right] =$$

$$T = mR^2\dot{\alpha}^2\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{8} + \frac{1}{24} + 4\right) + \frac{1}{3}mR^2\dot{\beta}^2 =$$

$$T = \frac{65}{12}mR^2\dot{\alpha}^2 + \frac{1}{3}mR^2\dot{\beta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}} = \frac{65}{6}mR^2\dot{\alpha}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\alpha}}\right) = \frac{65}{6}mR^2\ddot{\alpha}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \beta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}} = \frac{2}{3}mR^2\dot{\beta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\beta}}\right) = \frac{2}{3}mR^2\ddot{\beta}$$



$$\delta A = M_1\delta\alpha - M_2\delta\beta - mg\delta y_C - 2mg\delta y_B =$$

$$\delta A = M_1\delta\alpha - M_2\delta\beta - mg\cdot\frac{3}{2}R\delta\alpha\cdot\sin\alpha - mg\cdot 4R\delta\alpha\sin\alpha =$$

$$\delta A = M_1\delta\alpha - M_2\delta\beta - \frac{11}{2}mgR\sin\alpha\,\delta\alpha$$

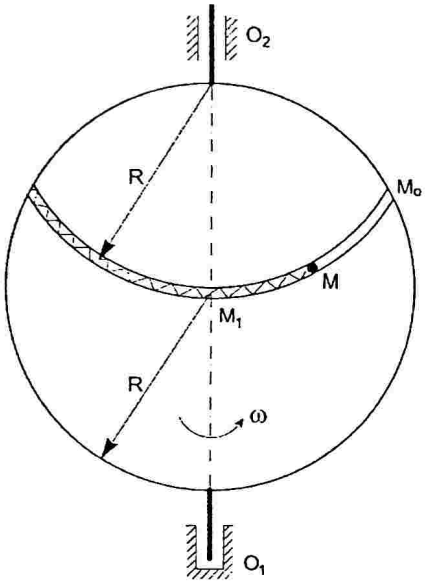
$$\frac{65}{6}mR^2\ddot{\alpha} = M_1 - \frac{11}{2}mgR\sin\alpha$$

$$\frac{2}{3}mR^2\ddot{\beta} = -M_2$$

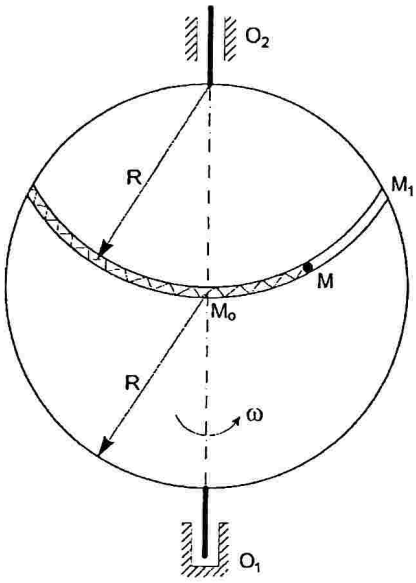
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

1. Homogeni disk mase m i poluprečnika R obrće se oko svoje vertikalne ose O_1O_2. U disk je urezan kružni žljeb poluprečnika R po kome može da klizi bez trenja tačka M mase m. Tačka je vezana oprugom nepoznate krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{R\pi}{3}$. U početnom trenutku, tačka se nalazila u položaju M_0 bez početne relativne brzine, dok se disk obrtao ugaonom brzinom $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}$. Odrediti ugaonu brzinu diska u trenutku kada se tačka nađe na njegovoj osi obrtanja (položaj M_1). Odrediti krutost opruge c iz uslova da se tačka zaustavi u položaju M_1.

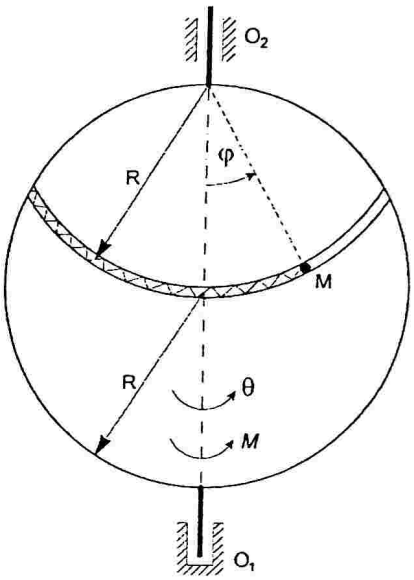
2. Disk poluprečnika R obrće se oko svoje vertikalne ose O_1O_2 konstantnom ugaonom brzinom ω. U disk je urezan kružni glatki žljeb poluprečnika R po kome može da se kreće tačka M mase m. Tačka je vezana oprugom krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{2R\pi}{3}$. U početnom trenutku, tačka se nalazila na osi obrtanja diska (položaj M_0) bez početne relativne brzine. Ako je $\omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$ i $c = \frac{9}{4\pi^2}\frac{mg}{R}$, odrediti relativnu brzinu tačke u položaju M_1. Odrediti ukupnu reakciju veze koja deluje na tačku u položaju M_1.



Zadatak 1.



Zadatak 2.



Zadatak 3.

3. Homogeni disk mase m i poluprečnika R može da se obrće oko svoje vertikalne ose O_1O_2. Ugao obrtanja diska određen je uglom θ. U disk je urezan kružni žljeb poluprečnika R po kome može da se kreće bez trenja tačka M mase m. Položaj tačke unutar žljeba određen je uglom φ, kao što je prikazano na slici. Tačka je vezana oprugom krutosti c čiji je drugi kraj vezan za obod diska. Dužina nenapregnute opruge iznosi $\frac{R\pi}{3}$. Na disk deluje spreg sila momenta intenziteta M u naznačenom smeru.

a) Za date generalisane koordinate (θ, φ) odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema.

b) Odrediti $M(\varphi)$, tj. zavisnost momenta od ugla φ tako da se disk obrće konstantnom ugaonom brzinom ω. U početnom trenutku važi $\varphi(0) = 0, \dot{\varphi}(0) = \dot{\varphi}_0$.

oktobar 21

③ disk: m, R

krutni žleb poluprečnika R

M: m

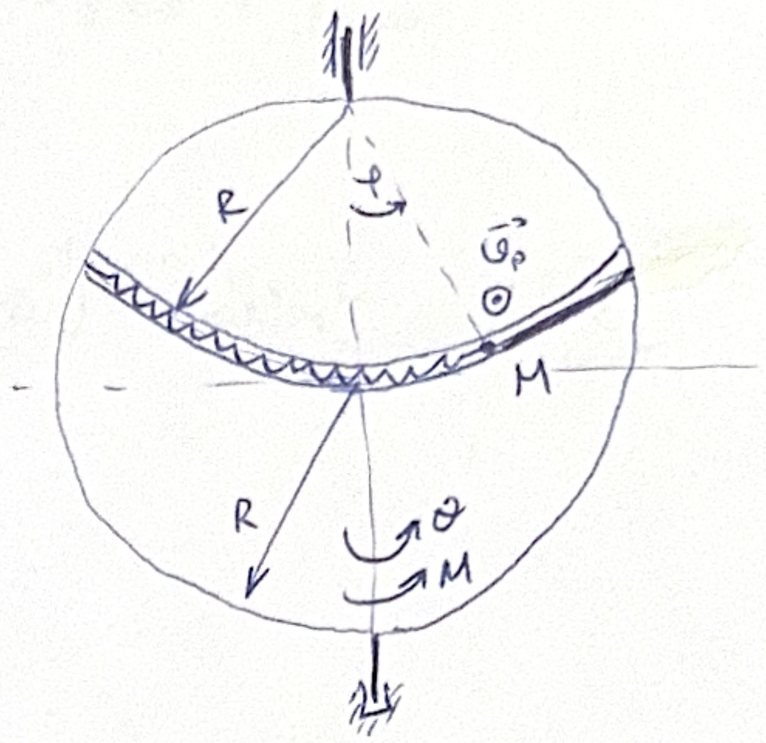
opruga: c, $l_0 = \frac{R\pi}{3}$

moment M

1) dif. j-ne za θ, φ

2) $M(\varphi)$? - tako da se disk obrće ugaonom brzinom $\omega = const.$

t_0: $\varphi_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 \neq 0$



$$T = \left[0 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{4}\dot{\theta}^2\right]_{disk} + \left[\frac{1}{2}m v_M^2 + 0\right]_M =$$

$$T = \frac{1}{8}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi$$

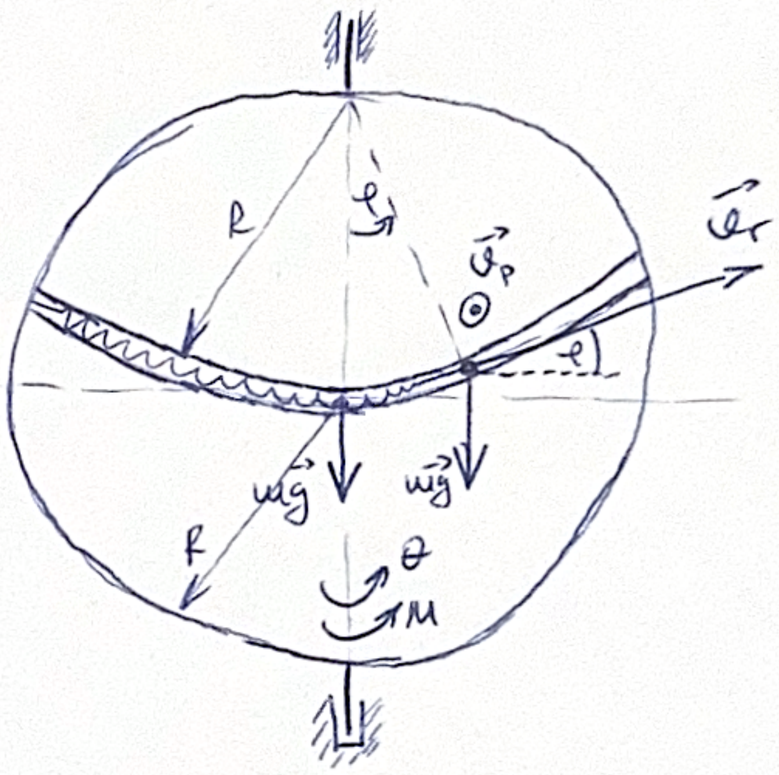
$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{4}mR^2\dot{\theta} + mR^2\dot{\theta}\sin^2\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = mR^2\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{4}mR^2\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2mR^2\dot{\theta}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = mR^2\ddot{\varphi}$$



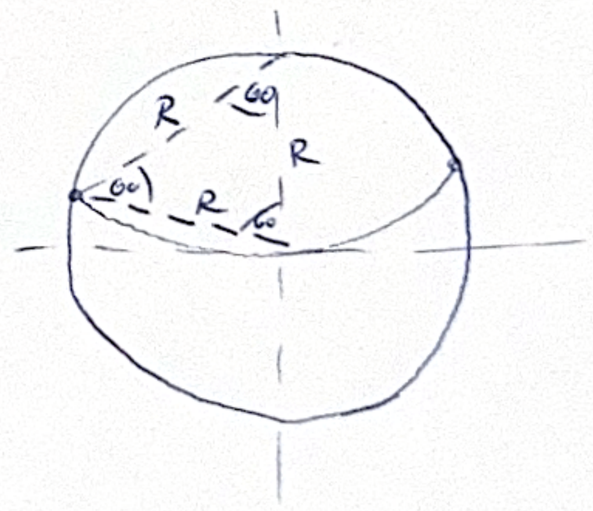
$$v_M^2 = v_r^2 + v_p^2 = (R\dot{\varphi})^2 + (x\dot{\theta})^2 =$$

$$v_M^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + (R\sin\varphi\dot{\theta})^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2\sin^2\varphi$$

$$\delta A = M\delta\theta - mg\delta y_M - c z\, dz$$

$$z = l - l_0 = \left(R\cdot\frac{\pi}{3} + R\varphi\right) - \left(R\frac{\pi}{3}\right) = R\varphi \quad \rightarrow \delta z = R\delta\varphi$$

$$\delta A = M\delta\theta - mgR\delta\varphi\sin\varphi - cR^2\varphi\delta\varphi$$



1)
$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{4}mR^2\ddot{\theta} + mR^2\ddot{\theta}\sin^2\varphi + 2mR^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = M \quad (1)\\ &mR^2\ddot{\varphi} - mR^2\dot{\theta}^2\sin\varphi\cos\varphi = -mgR\sin\varphi - cR^2\varphi \quad (2)\end{aligned}}$$

2) $\dot{\theta} = \omega = const \rightarrow \ddot{\theta} = 0$

(1) $\Rightarrow 0 + 2mR^2\omega\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = M$, $\dot{\varphi}(\varphi) = ?$

(2) $\Rightarrow mR^2\ddot{\varphi} - mR^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi = -mgR\sin\varphi - cR^2\varphi$, $\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\frac{d\varphi}{d\varphi} = \frac{\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}}{d\varphi}$

$$mR^2\frac{\dot{\varphi}\,d\dot{\varphi}}{d\varphi} = mR^2\omega^2\sin\varphi\cos\varphi - mgR\sin\varphi - cR^2\varphi \quad / \int d\varphi$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

$$\frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2\Big|_{\dot{\varphi}_0}^{\dot{\varphi}} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} mR^2\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi + mgR\cos\varphi\Big|_{\varphi_0=0}^{\varphi} - \frac{1}{2}cR^2\varphi^2\Big|_{\varphi_0=0}^{\varphi}$$

(smena: $u = \sin\varphi$, $du = \cos\varphi\, d\varphi$)

$$\frac{1}{2}mR^2(\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2) = \frac{1}{2}mR^2\omega^2\sin^2\varphi\Big|_{\varphi_0=0}^{\varphi} + mgR(\cos\varphi - \cos 0^\circ) - \frac{1}{2}cR^2\varphi^2 \quad / \cdot \frac{2}{mR^2}$$

$$\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_0^2 = \omega^2\sin^2\varphi + \frac{2g}{R}(\cos\varphi - 1) - \frac{1}{2}cR^2\varphi^2$$

$$\varphi^2 = \dot{\varphi}_0^2 + \omega^2\sin^2\varphi - \frac{2g}{R}(1 - \cos\varphi) - \frac{c}{m}\varphi^2$$

$$\boxed{M = 2mR^2\omega\dot{\varphi}\sin\varphi\cos\varphi = \ldots}$$

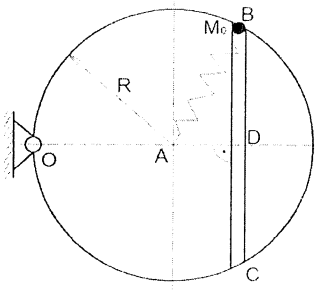
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

ПРВА ГРУПА

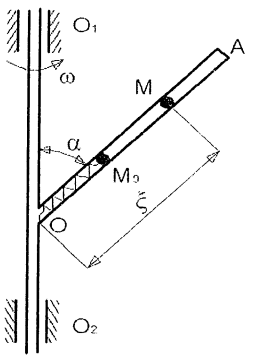
МЕХАНИКА 3

писмени део испита, 03.09.2016.

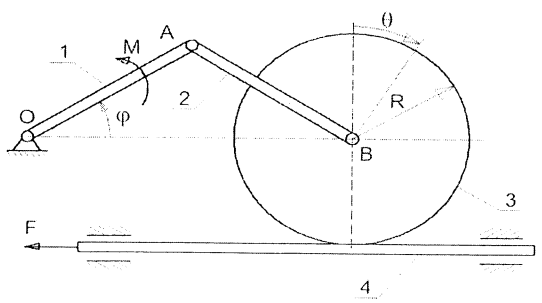
Задатак бр. 1: Диск полупречника R и масе m, који се налази у хоризонталној равни обрће се око вертикалне осовине Oz. По каналу BC (AD=R/2) креће се тачка M масе m, која је опругом, крутости c, везана за зглоб A. Дужина ненапрегнуте опруге је l_0=R/2. У почетном тренутку, када се тачка налазила на крају канала у тачки B систем је мировао. Одредити угаону брзину плоче ω_1 у тренутку када тачка стигне у средиште канала D.



Задатак бр. 2: Куглица M занемарљивих димензија, масе m, може да се креће унутар глатке цеви OA, која се обрће константном угаоном брзином ω око вертикалне осе O_1O_2 градећи са њом угао $\alpha = 45°$. У почетном тренутку куглица се налазила на растојању $a = 1/\omega^2$ од тачке O у релативном мировању. Куглица је везана опругом крутости $c = \frac{3}{2}m\omega^2$ за тачку O. У почетном тренутку опруга је била ненапрегнута. Одредити закон кретања куглице унутар цеви ($\xi = \overline{OM} = ?$).



Задатак бр. 3: Криваја 1, дужине l, масе m, може да се обрће у вертикалној равни око осе која пролази корз тачку O. Зупчаник 3, који се може сматрати хомогеним диском полупречника R, масе m, спрегнут је са зупчастом летвом 4, масе m, која може да се креће по хоризонталним вођицама. Криваја 1 и зупчаник 3 зглобно су везани штапом занемарљиве масе 2, дужине l. На зупчасту летву 4 делује сила интензитета F, а на кривају 1 спрег сила момента M. У почетном тренутку систем је мировао, а криваја 1 је заузимала хоризонталан положај, док је $\theta_0 = 0$. Саставити диференцијалне једначине кретања система ако су генералисане координате φ и θ и одредити почетне вредности угаоних убрзања криваје 1 и зупчаника 3 у почетном тренутку.



- *Употреба литературе није дозвољена.*
- *Овај формулар са задацима предати заједно са испитном свеском.*
- *Сва евентуална питања у вези текста задатака постављати дежурним наставницима и асистентима.*
- *На насловној страни испитне свеске обавезно уписати све податке, а у рубрици* ***Напомене*** *име предметног наставника.*
- *Шифра испита MEX 210 - 0799.*

septembar 16

③ 1: m, ℓ

3: m, R

4: m

2: $\emptyset, \ell$

sila F, spreg M

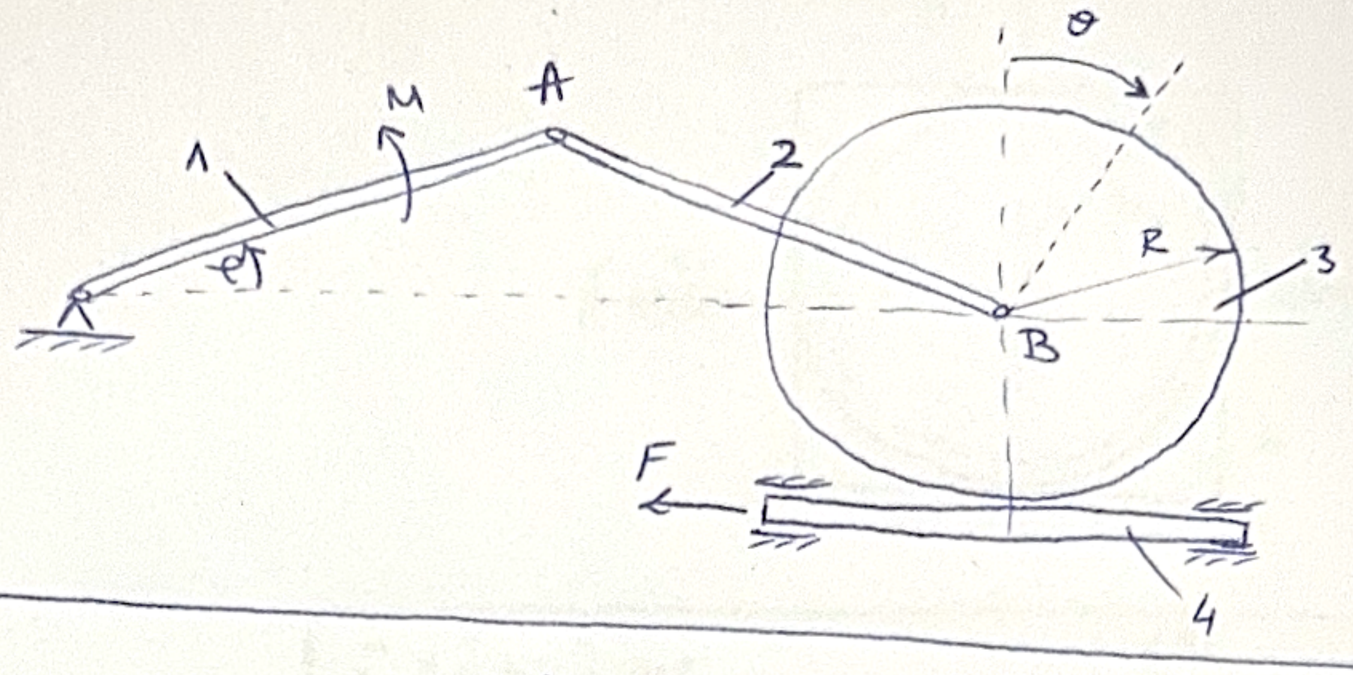
to: sistem miruje

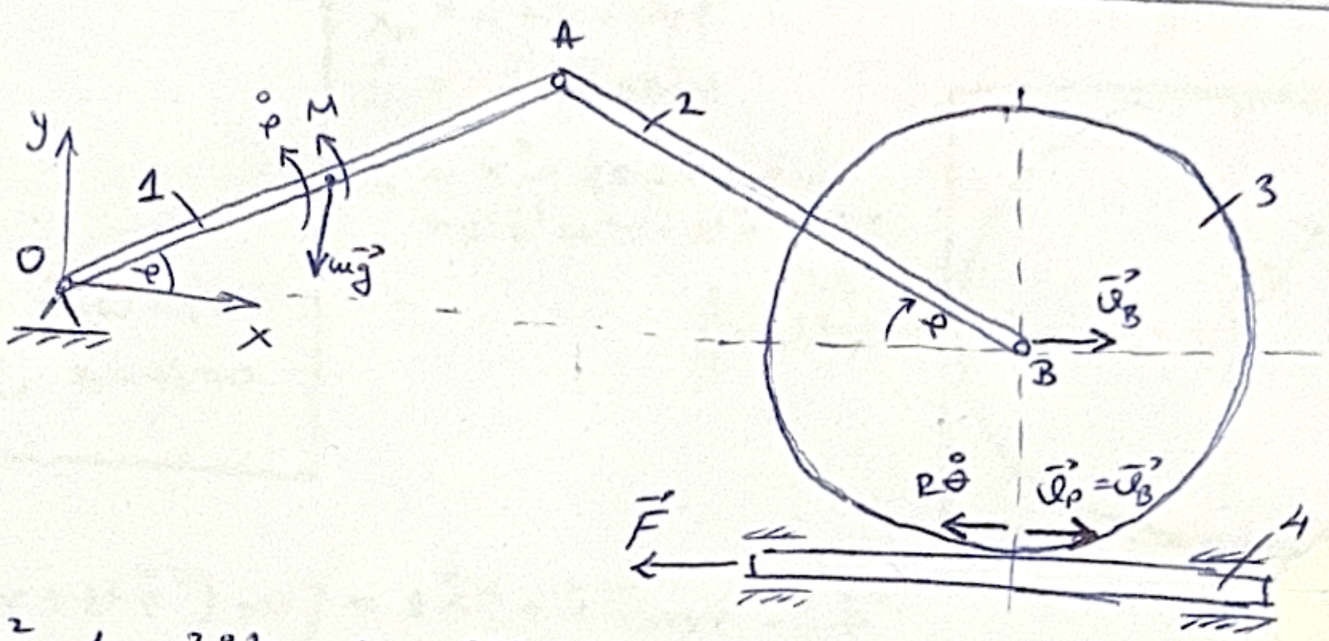
1 je horizontalan

$\varphi_0 = 0$

dif. j-ve za φ, θ?

$\ddot{\varphi}(t_0) = ?$, $\ddot{\theta}(t_0) = ?$





$T = T_1 + T_3 + T_4$

$T_1 = \frac{1}{2} m \left(\frac{\ell}{2}\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{8} m\ell^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{24} m\ell^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{6} m\ell^2\dot{\varphi}^2$

$T_3 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} m 4\ell^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi + \frac{1}{4} mR^2\dot{\theta}^2 =$

$= 2m\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{1}{4} mR^2\dot{\theta}^2$

$T_4 = \frac{1}{2} m v_4^2 + 0 = \frac{1}{2} m \left(R\dot{\theta} - v_B\right)^2 = \frac{1}{2} m \left(R\dot{\theta} + 2\ell\dot{\varphi}\sin\varphi\right)^2 =$

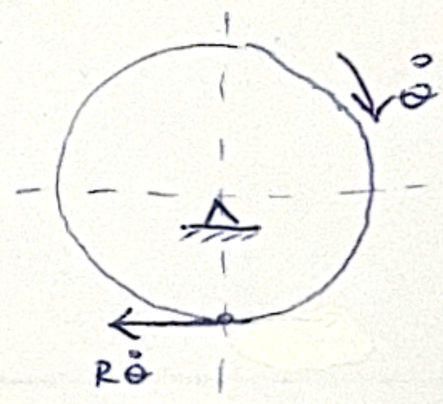
$= \frac{1}{2} m \left(R^2\dot{\theta}^2 + 4R\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi + 4\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right) =$

$= \frac{1}{2} mR^2\dot{\theta}^2 + 2mR\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi + 2m\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$

$T = \frac{1}{6} m\ell^2\dot{\varphi}^2 + 4m\ell^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + \frac{3}{4} mR^2\dot{\theta}^2 + 2mR\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\varphi$

$x_B = 2\ell\cos\varphi \rightarrow v_B = \dot{x}_B = -2\ell\dot{\varphi}\sin\varphi$

disk 3 - relativno



$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 8m\ell^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 2mR\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{1}{3} m\ell^2\dot{\varphi} + 8m\ell^2\dot{\varphi}\sin^2\varphi + 2mR\ell\dot{\theta}\sin\varphi$

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{3}{2} mR^2\dot{\theta} + 2mR\ell\dot{\varphi}\sin\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\varphi} + 8m\ell^2\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + 16 m\ell^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 2mR\ell\ddot{\theta}\sin\varphi + 2mR\ell\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{3}{2} mR^2\ddot{\theta} + 2mR\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi + 2mR\ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi$

$\delta A = M\delta\varphi + F\left(R\delta\theta - dx_B\right) - mg\,dy_1 = M\delta\varphi + F\left(R\delta\theta + 2\ell\sin\varphi\delta\varphi\right) - mg\,\delta\left(\frac{\ell}{2}\sin\varphi\right) =$

$\delta A = M\delta\varphi + FR\delta\theta + 2F\ell\sin\varphi\delta\varphi - \frac{1}{2} mg\ell\cos\varphi\delta\varphi$

$$\frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\varphi} + 8m\ell^2\ddot{\varphi}\sin^2\varphi + 8m\ell^2\dot{\varphi}^2\sin\varphi\cos\varphi + 2mR\ell\ddot{\theta}\sin\varphi = M + 2F\ell\sin\varphi - \frac{1}{2} mg\ell\cos\varphi \quad (1)$$

$$\frac{3}{2} mR^2\ddot{\theta} + 2mR\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi + 2mR\ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi = FR \quad (2)$$

$t_0 = 0$: $\varphi_0 = 0$, $\theta_0 = 0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$, $\dot{\theta}_0 = 0$

(1) => $\frac{1}{3} m\ell^2\ddot{\varphi}_0 = M - \frac{1}{2} mg\ell$ => $\boxed{\ddot{\varphi}_0 = \frac{3M}{m\ell^2} - \frac{3}{2}\frac{g}{\ell}}$

(2) => $\frac{3}{2} mR^2\ddot{\theta}_0 = FR$ => $\boxed{\ddot{\theta}_0 = \frac{2}{3}\frac{F}{mR}}$

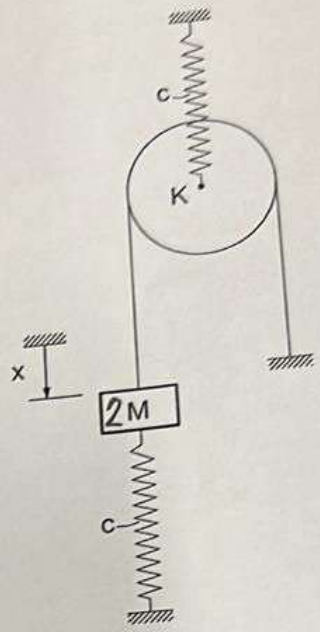
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

JUN 2024

2. GRUPA

MEHANIKA 3

1. Mehanički sistem prikazan na slici sastoji se od kotura K zanemarljive mase i tega M mase $2m$. Centar kotura vezan je za oprugu krutosti c čiji je drugi kraj vezan za nepokretan zid. Centar kotura može da se kreće pravolinijski duž vertikalnog pravca. Teg M vezan je sa donje strane za oprugu krutosti c čiji je drugi kraj vezan za nepokretnu podlogu. Sa gornje strane teg je vezan neistegljivim užetom koje je prebačeno preko kotura K i vezano za nepokretnu podlogu. Položaj tega meri se koordinatom x kao što je prikazano na slici. U početnom trenutku $t_0 = 0$ sistem je mirovao, opruge su bile nenapregnute i tada je $x = 0$.



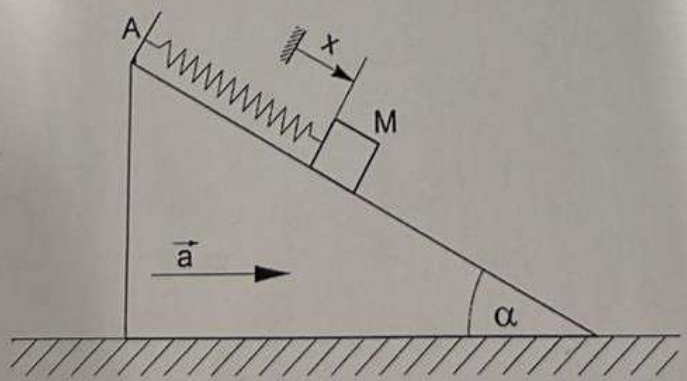
a) Odrediti pomeranje x_1 tela M u trenutku t_1, gde je t_1 prvi pozitivan trenutak kada se telo M ponovo zaustavi.

b) Odrediti ubrzanje tela M u tom istom trenutku t_1.

2. Trougaona prizma kreće se translatorno po horizontalnoj nepokretnoj ravni ubrzanjem $\vec{a}$ koje se menja po zakonu $a = \sqrt{3}g\sin(3t)\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ (g je ubrzanje sile Zemljine teže). Po strmoj strani prizme može da klizi bez trenja telo M mase m. Telo M je vezano oprugom krutosti c, dok je drugi kraj opruge vezan za prizmu u tački A. U početnom trenutku telo M je bilo u relativnom miru u položaju u kome je opruga nenapregnuta, i tada je $x = 0$. Dato je: $\alpha = 30°$ i $\frac{c}{m} = 3\ \frac{1}{\text{s}^2}$.

a) Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja $x(t)$ tela M duž strme ravni.

b) Odrediti reakciju veze između tela M i prizme u funkciji vremena.



JUN 2024

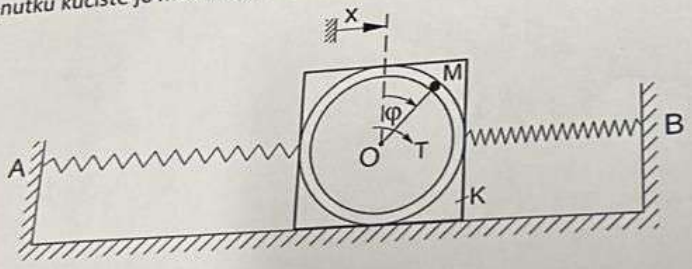
2. GRUPA

MEHANIKA 3

3. Kućište K mase 3 kg može da se kreće po glatkoj horizontalnog podlozi. Kućište je vezano za dve identične opruge krutosti $c = 8\ \frac{kg}{s^2}$ čiji su suprotni krajevi vezani za nepokretne tačke A i B. Položaj kućišta određen je koordinatom x (kada je $x = 0$ opruge su nenapregnute). U kućištu je urezan žleb poluprečnika $R = 1$ m po kome može da se kreće bez trenja materijalna tačka M mase 1 kg. Tačka M dovodi se u kretanje posredstvom poluge OM zanemarljive mase $(\overline{OM} = R)$, a položaj tačke meri se uglom φ, kao što je prikazano na slici. Na polugu deluje spreg sila momenta intenziteta T.

a) Za date generalisane koordinate x i φ napisati diferencijalne jednačine kretanja sistema.

b) Odrediti $x(t)$ u slučaju da se poluga OM obrće konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 4\ \frac{1}{s}$. U početnom trenutku kućište je mirovalo i važilo je $x_0 = \varphi_0 = 0$.



jun 24

③ K: 3 kg

opruge: $c = 8 \frac{kg}{s^2}$

$\Delta l = 0$ za $x = 0$

žlob $R = 1\ m$

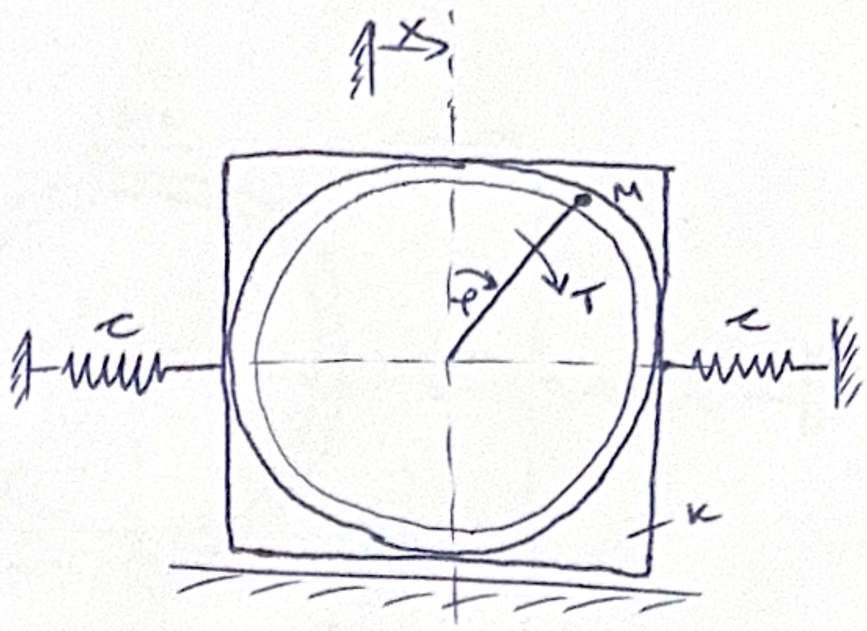
M: 1 kg

OM: φ, R

moment T

1) dif. j-ne za x, φ

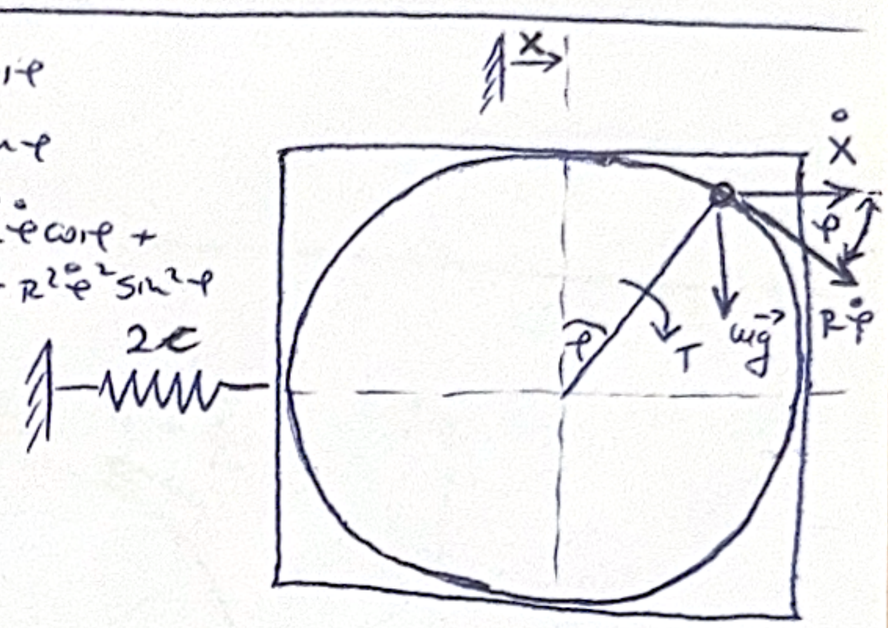
2) $x(t) = ?$ - za slučaj kada je $\dot{\varphi} = \omega = 4 s^{-1}$
to: kućište miruje, $x_0 = \varphi_0 = 0$



$\dot{x}_M = \dot{x} + R\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\dot{y}_M = -R\dot{\varphi}\sin\varphi$

$v_M^2 = \dot{x}^2 + 2R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$



$T = \left[\frac{1}{2}3\dot{x}^2 + 0\right]_K + \left[\frac{1}{2}1(\dot{x}^2 + 2R\dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + R^2\dot{\varphi}^2) + 0\right] = 2\dot{x}^2 + \dot{x}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 4\dot{x} + \dot{\varphi}\cos\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 4\ddot{x} + \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \dot{\varphi} + \dot{x}\cos\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \ddot{\varphi} + \ddot{x}\cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$

$\delta A = T\delta\varphi - 2cx\delta x - g\delta y_M = T\delta\varphi - 16x\delta x + g\delta\varphi\cos\varphi$

1)
$$\boxed{\begin{aligned} 4\ddot{x} + \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi &= -16x \\ \ddot{\varphi} + \dot{x}\cos\varphi &= T + g\cos\varphi \end{aligned}}$$

2) $\dot{\varphi} = \omega = 4$, $\ddot{\varphi} = 0$

$4\ddot{x} + 0 - 16\sin\varphi = -16x \quad /:4$

$\ddot{x} + 4x = 4\sin(4t)$, $\omega^2 = 4$ ($\omega = 2$) , $\Omega = 4$, $h_1 = 4$

$x_h = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t$

$x_p = A\cos 4t + B\sin 4t$

$\ddot{x}_p = -16(A\cos 4t + B\sin 4t)$

$-16A + 4A = 0 \rightarrow \underline{A = 0}$

$-16B + 4B = 4 \rightarrow \underline{B = -\frac{1}{3}}$

$x = C_1\cos 2t + C_2\sin 2t - \frac{1}{3}\sin 4t$

$\dot{x} = -2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t - \frac{4}{3}\cos 4t$

$x(t_0) = C_1 + 0 = 0 \rightarrow \underline{C_1 = 0}$

$\dot{x}(t_0) = 0 + 2C_2 - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow \underline{C_2 = \frac{2}{3}}$

$$\boxed{x(t) = \frac{2}{3}\sin 2t - \frac{1}{3}\sin 4t}$$

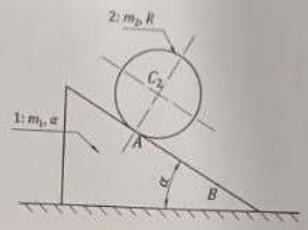
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
28.6.2024.

Mehanika 3

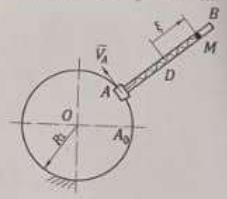
Julski ispitni rok 2024. – grupa 2

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase $m_1 = m$ i nagibnog ugla $\alpha = 30°$ i diska 2 mase $m_2 = 2m$ i poluprečnika R. Prizma može da klizi bez trenja po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi, a disk 1 može da se kotrlja bez klizanja po strmoj stranici prizme. U početnom trenutku sistem miruje, a disk dodiruje prizmu u tački A. Odrediti pomeranje prizme do trenutka kada se disk nađe u tački B prizme, ako je dužina $\overline{AB} = 4\sqrt{3}R$. U istom trenutku odrediti brzinu prizme i ugaonu brzinu diska.



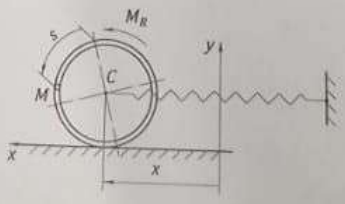
Slika uz zadatak 1.

2. Klizač A kreće se brzinom konstantnog intenziteta $V_A = \omega_0 R$, smera kao na slici, po nepokretnoj kružnoj vođici poluprečnika $R_1 = R$, koja se nalazi u vertikalnoj ravni. Za klizač A kruto je vezana cev AB upravno na tangentu vođice. U cevi AB nalazi se kuglica M zanemarljivih dimenzija i mase m, koja je oprugom krutosti $c = 5m\omega_0^2$ vezana za tačku A cevi. Ako se klizač A u početnom trenutku nalazio u položaju A_0 prikazanom na slici, a kuglica u tački D cevi, pri čemu je opruga u tom položaju nenapregnuta, odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja kuglice u odnosu na tačku D cevi i reakciju cevi u funkciji vremena. Dato je $\overline{AD} = R$.



Slika uz zadatak 2.

3. Disk 1 mase $m_1 = 4m$ i poluprečnika R može da se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za središte diska C vezana je opruga krutosti c. Po tankom žlebu diska može da klizi bez trenja kuglica M mase $m_2 = m$, gde se relativan položaj kuglice na disku meri lučnom koordinatom s. Na disk deluje spreg sila momenta intenziteta M_R, smera kao na slici. Ako su se u početnom trenutku središte C diska i kuglica M nalazili na y osi i opruga bila nenapregnuta, odrediti Lagranževe diferencijalne jednačine druge vrste u odnosu na generalisane koordinate s i x.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

jul 24

③ 1: $m_1 = 4m$, R (disk)

opruga: c

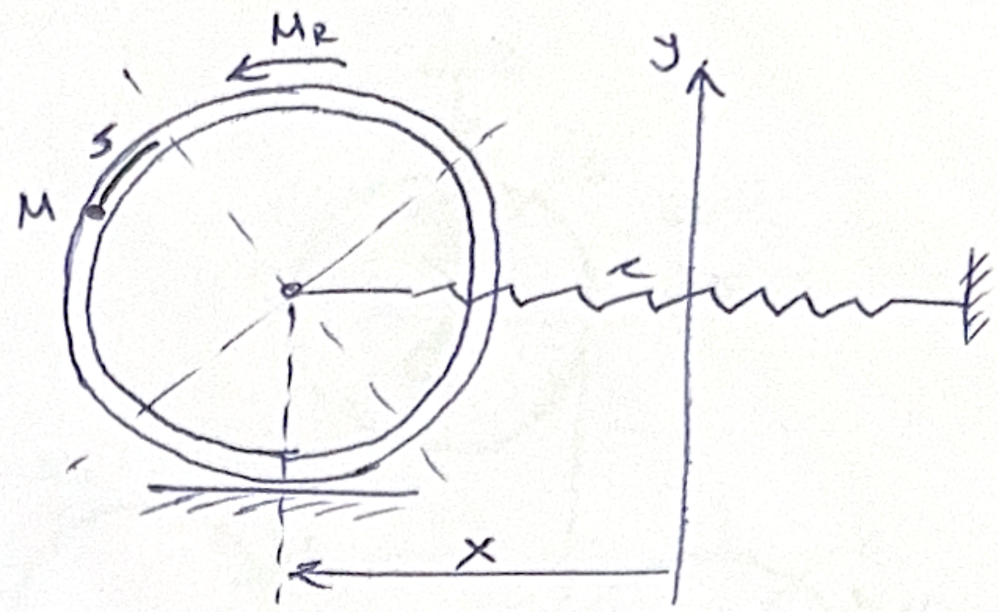
M: $m_2 = m$

moment M_R

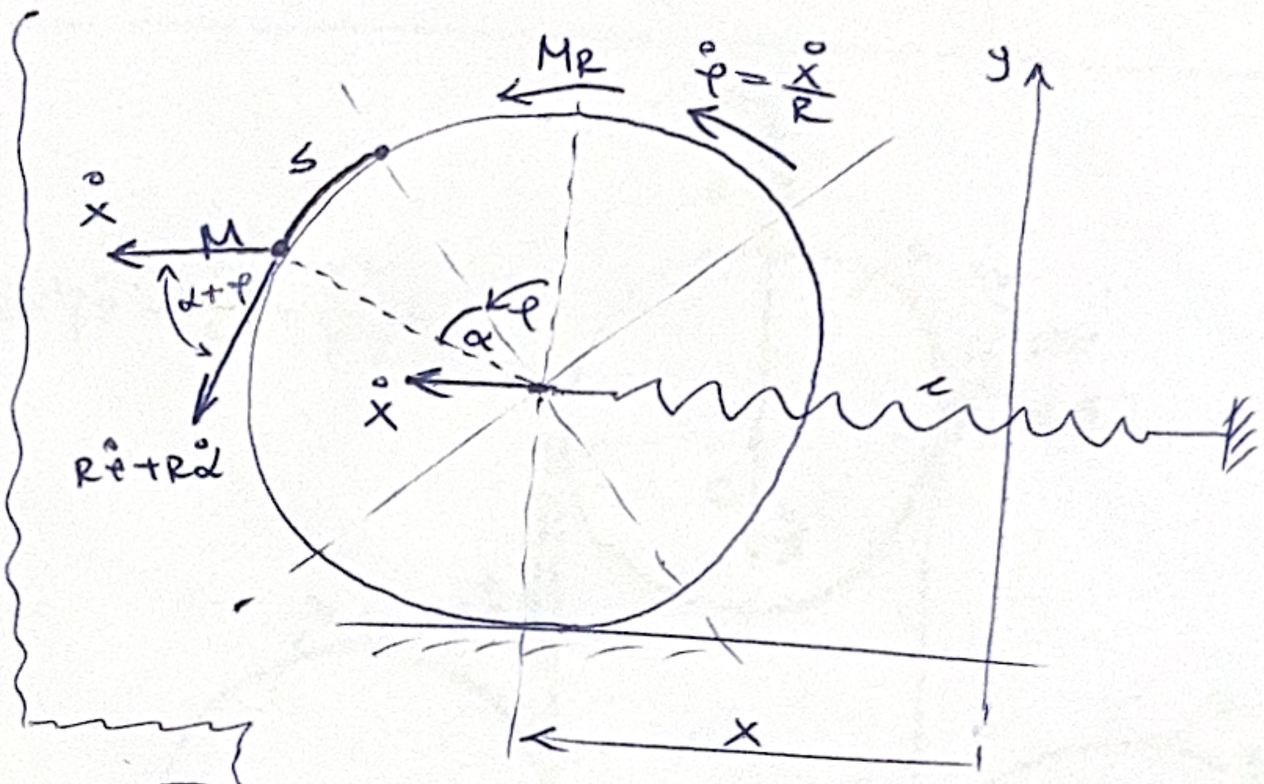
t: C; M su na osi y

opruga je nenapregnuta

dif. j-ne za s, x?



$T = T_C + T_M$



$$T_C = \frac{1}{2}4m\dot x^2 + \frac{1}{2}\frac{4mR^2}{2}\left(\frac{\dot x}{R}\right)^2 = 3m\dot x^2$$

$$T_M = \frac{1}{2}m v_M^2 + 0 =$$

$$= m\dot x^2 + m\dot x\dot s + \frac{1}{2}m\dot s^2 + m\dot x^2\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) + m\dot x\dot s\cos\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$T = 4m\dot x^2 + m\dot x\dot s + \frac{1}{2}m\dot s^2 + m\dot x^2\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) + m\dot x\dot s\cos\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = -m\dot x^2\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)\cdot\frac{1}{R} - m\dot x\dot s\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)\cdot\frac{1}{R} = \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot s} = m\dot x + m\dot s + m\dot x\cos\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot s}\right) = m\ddot x + m\ddot s + m\ddot x\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) - m\dot x\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)\cdot\left(\frac{\dot s+\dot x}{R}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot x} = 8m\dot x + m\dot s + 2m\dot x\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) + m\dot s\cos\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot x}\right) = 8m\ddot x + m\ddot s + 2m\ddot x\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) - 2m\dot x\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)\cdot\left(\frac{\dot s+\dot x}{R}\right) + m\ddot s\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) - m\dot s\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)\cdot\left(\frac{\dot s+\dot x}{R}\right)$$

$$\alpha = \frac{s}{R},\quad \dot\alpha = \frac{\dot s}{R},\quad \varphi = \frac{x}{R},\quad \dot\varphi = \frac{\dot x}{R}$$

$$\dot x_M = \dot x + (R\dot\varphi + R\dot\alpha)\cos(\alpha+\varphi) = \dot x + (\dot x + \dot s)\cos\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$\dot y_M = -(R\dot\varphi + R\dot\alpha)\sin(\alpha+R) = -(\dot x+\dot s)\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$v_M^2 = \dot x^2 + 2\dot x(\dot x+\dot s)\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) + (\dot x+\dot s)^2\cos^2\left(\frac{s+x}{R}\right) + (\dot x+\dot s)^2\sin^2\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$v_M^2 = \dot x^2 + 2\dot x^2\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) + 2\dot x\dot s\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) + (\dot x^2 + 2\dot x\dot s + \dot s^2) =$$

$$v_M^2 = 2\dot x^2 + 2\dot x\dot s + \dot s^2 + 2\dot x^2\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) + 2\dot x\dot s\cos\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$\delta A = -c\,x\,\delta x + M_R\delta\varphi - mg\,\delta y_M = -c\,x\,\delta x + M_R\frac{\delta x}{R} + mg(\delta x + \delta s)\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$m\ddot x + m\ddot s + m\ddot x\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) = mg\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

$$8m\ddot x + m\ddot s + 2m\ddot x\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) - m\dot x\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)\cdot\left(\frac{\dot s+\dot x}{R}\right) + m\ddot s\cos\left(\frac{s+x}{R}\right) - m\dot s\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)\cdot\left(\frac{\dot s+\dot x}{R}\right) =$$

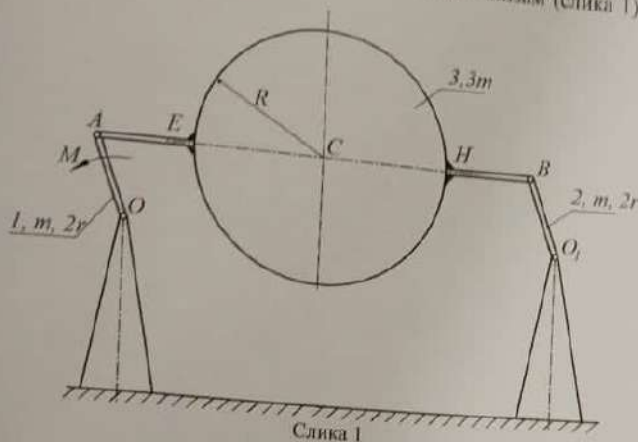
$$= -c\,x\,\delta x + \frac{M_R}{R} + mg\sin\left(\frac{s+x}{R}\right)$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
МАШИНСКОГ ФАКУЛТЕТА У БЕОГРАДУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35

МЕХАНИКА 3, шифра предмета МЕХ-210-0799, 15.09.2023., друга група, ИТ

Задатак 1. Зглобно-паралелограмни механизам (слика 1) који се налази у вертикалној равни, чине хомогени штапови (кривље) 1 и 2 (истих дужина $OA = O_1B = 2r$, и истих маса, m) и тело 3 (које чине круто везани штапови AE и HB и диск са центром у тачки C чији је полупречник $R = 3r$), масе $3m$. Штапови 1 и 2 обрћу се око непокретних оса које пролазе кроз тачке O и O_1, респективно, и управне су на раван кретања механизма (на раван цртежа). Систем (механизам) се доводи у кретање помоћу спрега сила момента интензитета $M = 40mgr$, који дејствује на хомогени штап OA. Одредити брзину центра диска C, након што кривља OA, полазећи из стања мировања, направи три пуна обрта.



Слика 1

Задатак 2. Тело M, масе m, обешено је о доњи крај редно везаних опруга крутости c_1 и c_2. На тело делује принудна сила $F_\Omega = F_0 \sin(\Omega t)$.

А) Одредити једначину принудних осцилација тела M.
Б) Одредити период слободних осцилација тела M.
В) Одредити коначну једначину кретања тела M, ако је кретање започето из положаја статичке равнотеже из стања мировања.

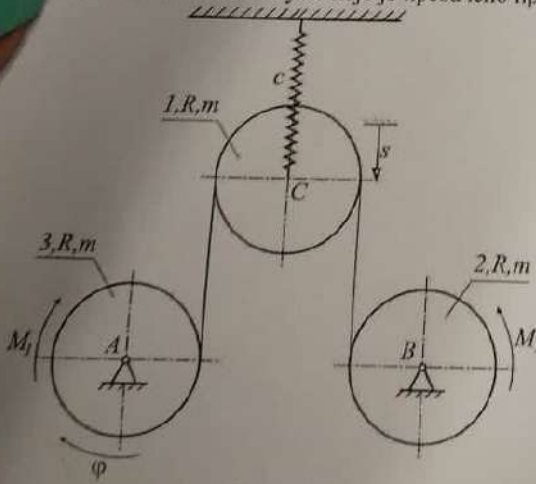
Дато је: $m = 1kg$, $c_1 = c$, $c_2 = 2c$, $\Omega = \sqrt{\dfrac{2c}{3m}}$, $F_0 = const$.

Координатни почетак узети у положају статичке равнотеже тела.



Слика 2

Задатак 3. Котурови 2 и 3, једнаких маса, m, и полупречника, R, могу да се обрћу око хоризонталних оса које пролазе кроз непокретне тачке A и B, услед дејства спрегова сила момената константних интензитета M_1 и M_2 (слика 3). На котурове 2 и 3 намотано је гипко, лако и нерастегљиво уже које је пребачено преко котура 1, масе m, полупречника R. За центар C, котура 1, везана је једним крајем опруга крутости c, која је другим крајем везана за непокретни плафон. Опруга је била ненапрегнута у почетном положају. Одредити закон кретања центра C, котура 1, $\left(s = s(t) = ?\right)$, ако су почетни услови: $s(0) = 0$, $\dot{s}(0) = 0$.



Слика 3

За генералисане координате усвојити: s (положај тачке C) и φ (угао обртања котура 3). Проклизавања нема, трење занемарити. При кретању система уже је увек затегнуто. Котурове 1,2 и 3 сматрати хомогеним дисковима. Систем се креће у вертикалној равни.

oktober 23

③ 2: m, R

3: m, R

spregovi M_1, M_2

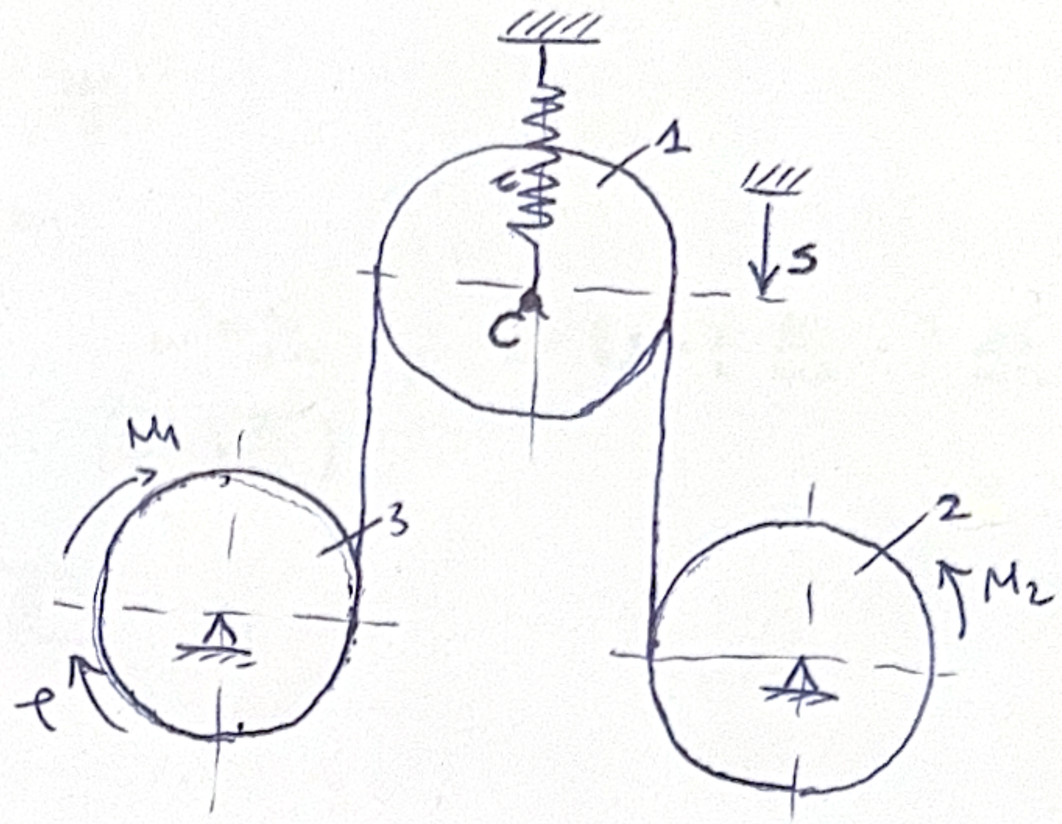
1: m, R

opruga: c, $\Delta l(t)=0$

$s(t)=?$

t_0: $s_0=0$, $\dot{s}_0=0$

general. koord. s, φ



$T = T_1 + T_2 + T_3$

$T_1 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\varphi} - \frac{\dot{s}}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\dot{\varphi}^2 - \frac{2\dot{\varphi}\dot{s}}{R} + \frac{\dot{s}^2}{R^2}\right) =$

$= \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}mR\dot{\varphi}\dot{s}$

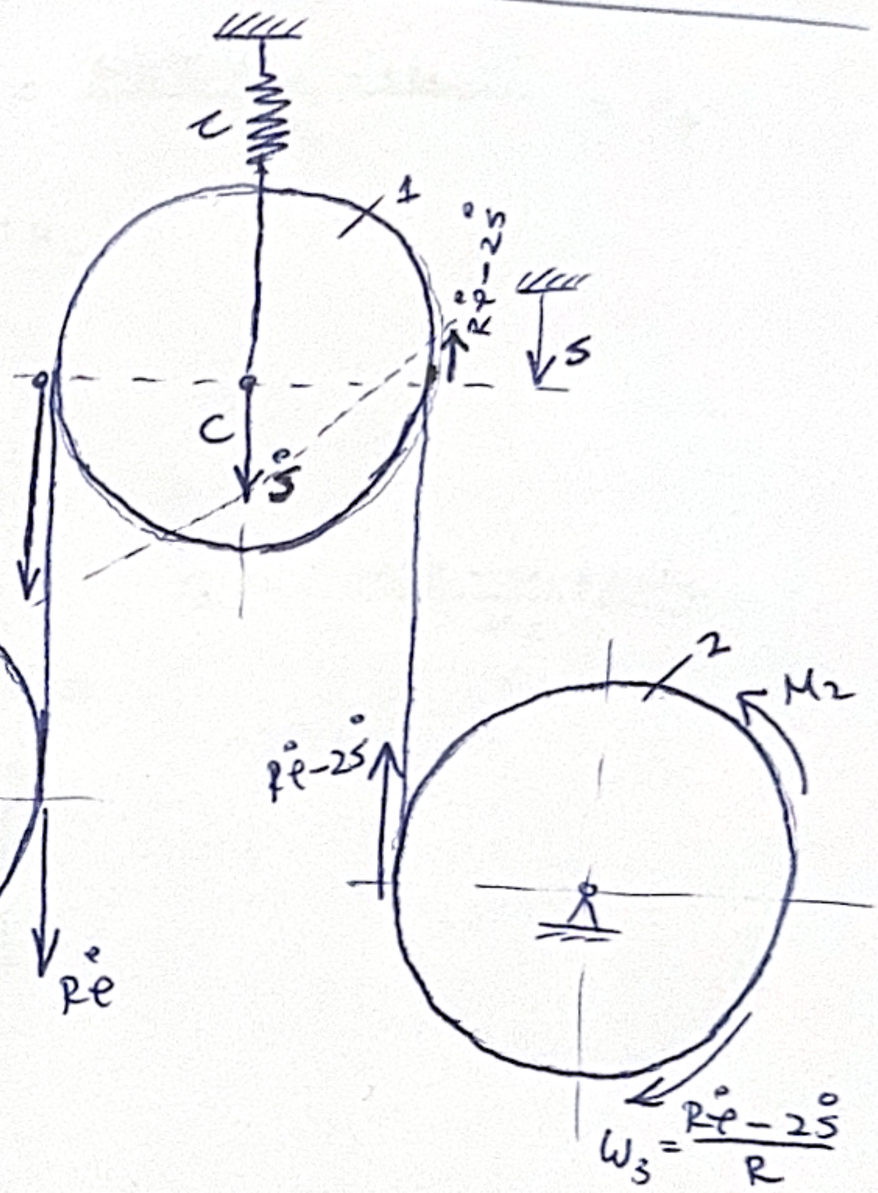
$T_3 = 0 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2$

$T_2 = 0 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\dot{\varphi} - \frac{2\dot{s}}{R}\right)^2 =$

$= \frac{1}{4}mR^2\left(\dot{\varphi}^2 - \frac{4\dot{\varphi}\dot{s}}{R} + \frac{4\dot{s}^2}{R^2}\right) =$

$= \frac{1}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{s}^2 - mR\dot{\varphi}\dot{s}$

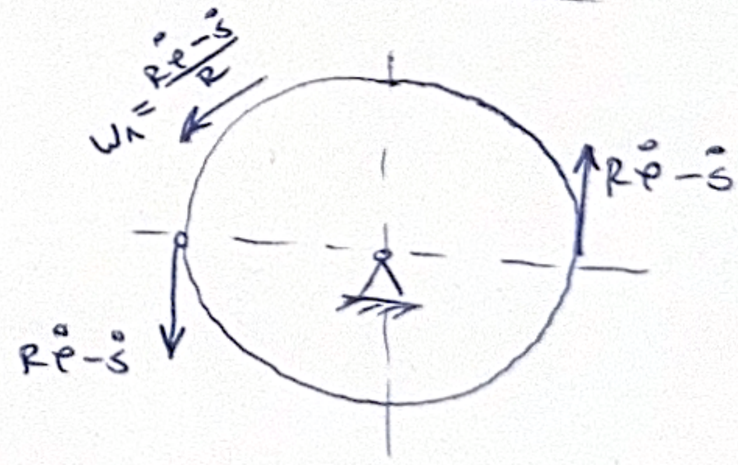
$T = \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{7}{4}m\dot{s}^2 - \frac{3}{2}mR\dot{\varphi}\dot{s}$



$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{3}{2}mR^2\dot{\varphi} - \frac{3}{2}mR\dot{s}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}mR\ddot{s}$

$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = \frac{7}{2}m\dot{s} - \frac{3}{2}mR\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = \frac{7}{2}m\ddot{s} - \frac{3}{2}mR\ddot{\varphi}$

disk 1 - reševno



$\delta A = M_1\delta\varphi + mg\delta s - cs\delta s - M_2\left(\delta\varphi - \frac{2\delta s}{R}\right)$

$\frac{3}{2}mR^2\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}mR\ddot{s} = M_1 - M_2$ (1)

$\frac{7}{2}m\ddot{s} - \frac{3}{2}mR\ddot{\varphi} = mg - cs - \frac{2M_2}{R}$ (2)

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

(1) => $\frac{3}{2} mR\ddot{\varphi} = \frac{3}{2} m\ddot{s} + \frac{M_1}{R} - \frac{M_2}{R}$

(2) => $\frac{7}{2} m\ddot{s} - \frac{3}{2} m\ddot{s} - \frac{M_1}{R} + \frac{M_2}{R} = mg - cs - \frac{2M_2}{R}$

$2m\ddot{s} + cs = mg + \frac{M_1}{R} - \frac{3M_2}{R} \quad / : 2m$

$\ddot{s} + \frac{c}{2m} s = \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} \frac{M_1}{mR} - \frac{3}{2} \frac{M_2}{mR}$, $\omega^2 = \frac{c}{2m}$, $h = \frac{1}{2} g + \frac{1}{2} \frac{M_1}{mR} - \frac{3}{2} \frac{M_2}{mR}$

$\ddot{s} + \omega^2 \cdot s = h$ $\left(\omega = \sqrt{\frac{c}{2m}}\right)$

#: $\lambda^2 + \omega^2 = 0 \rightarrow \lambda_{1/2} = 0 \pm i \cdot \omega = 0 \pm i \cdot \sqrt{\frac{c}{2m}}$

$s_h = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{2m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{2m}} t\right)$

P: $x_p = A$, $\ddot{x}_p = 0$

$0 + \omega^2 A = h \rightarrow A = \frac{h}{\omega^2} = \frac{\frac{mgR + M_1 - 3M_2}{2mR}}{\frac{c}{2m}} = \frac{mgR + M_1 - 3M_2}{cR} = x_p$

$s = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{c}{2m}} t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{c}{2m}} t\right) + \frac{mgR + M_1 - 3M_2}{cR}$

$\dot{s} = -C_1 \sqrt{\frac{c}{2m}} \sin\left(\sqrt{\frac{c}{2m}} t\right) + C_2 \sqrt{\frac{c}{2m}} \cos\left(\sqrt{\frac{c}{2m}} t\right)$

$s(t_0) = 0 \rightarrow C_1 + \frac{mgR - M_1 + 3M_2}{cR} = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{mgR - M_1 + 3M_2}{cR}$

$\dot{s}(t_0) = 0 \rightarrow 0 + C_2 = 0 \rightarrow C_2 = 0$

$$s(t) = \frac{mgR + M_1 - 3M_2}{cR} \left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{c}{2m}} t\right)\right)$$

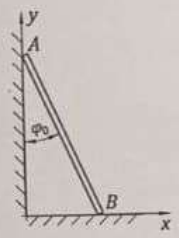
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
30.9.2023.

Mehanika 3

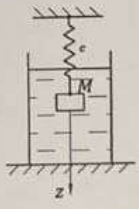
Oktobar 2. – grupa 1

1. Homogeni štap AB, dužine $\overline{AB} = 2l$, nalazi se u vertikalnoj ravni i oslanja se krajem A na glatki vertikalni zid, a krajem B o glatku horizontalnu ravan. U početnom trenutku štap miruje i sa vertikalnim zidom zaklapa ugao φ_0 i započinje kretanje pod dejstvom svoje težine. Pri kojoj vrednosti ugla φ će se kraj A štapa odvojiti od vertikalnog zida?



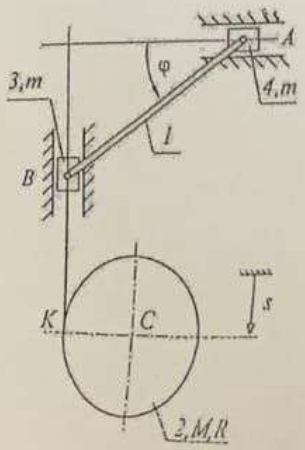
Slika uz zadatak 1.

2. Teret M, mase m i zanemarljivih dimenzija, okačen je o kraj opruge krutosti c i kreće se u otpornoj sredini u vertikalnoj ravni. Intenzitet sile otpora kretanju proporcionalan je prvom stepenu intenziteta brzine: $F_w = bv$, gde je b pozitivna realna konstanta. Odrediti konačnu jednačinu kretanja tereta $z(t)$, ako je u početnom trenutku teret bio pomeren iz položaja statičke ravnoteže vertikalno naniže za dužinu a i pušten da osciluje bez početne brzine. Dato je $m = 10\ \text{gr}$, $c = 10\ \text{gr/cm}$, $b = 1{,}6\ \text{gr} \cdot \text{s/cm}$, $a = 4\ \text{cm}$.



Slika uz zadatak 2.

3. Laki štap 1 dužine l zglobno je vezan krajevima A i B za klizače 3 i 4 jednakih masa m. Klizač 3 kreće se po vertikalnoj vođici dok se klizač 4 kreće po horizontalnoj vođici. Za klizač 3 vezano je jednim krajem glatko, lako i nerastegljivo uže, koje je drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 2, mase M. Cilindar 2 kreće se tako da viseći deo užeta, koje se odmotava sa cilindra, stalno ostaje vertikalan. Primenom Lagranževih jednačina druge vrste napisati diferencijalne jednačine kretanja opisanog materijalnog sistema. Generalisane koordinate su: s i φ. Sva trenja zanemariti.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

oktobar 2 23

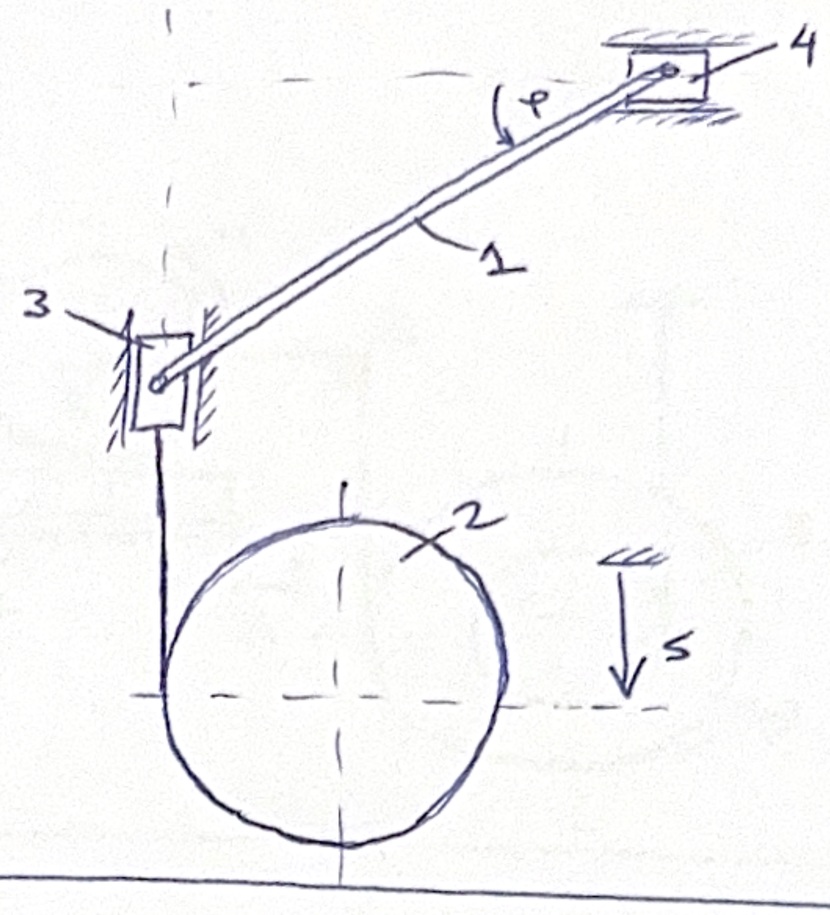
③ 1: ϕ, e

3: m

4: m

2: M (cilindar)

dif. jne kr. za s, φ



$$T = \left[\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + 0\right]_4 + \left[\frac{1}{2}m(l\dot{\varphi}\cos\varphi)^2 + 0\right]_3 +$$

$$+\left[\frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}MR^2\left(\frac{\dot{s} - l\dot{\varphi}\cos\varphi}{R}\right)^2\right]_2 =$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}M\dot{s}^2 + \frac{1}{2}M\left(\dot{s}^2 - 2l\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi - l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi\right) =$$

$$T = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}Ml^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + M\dot{s}^2 - Ml\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -Ml^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + Ml\dot{\varphi}\dot{s}\sin\varphi \qquad \frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2\dot{\varphi} + Ml^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi - Ml\dot{s}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = ml^2\ddot{\varphi} + Ml^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 2Ml^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi -$$
$$- Ml\ddot{s}\cos\varphi + Ml\dot{s}\dot{\varphi}\sin\varphi$$

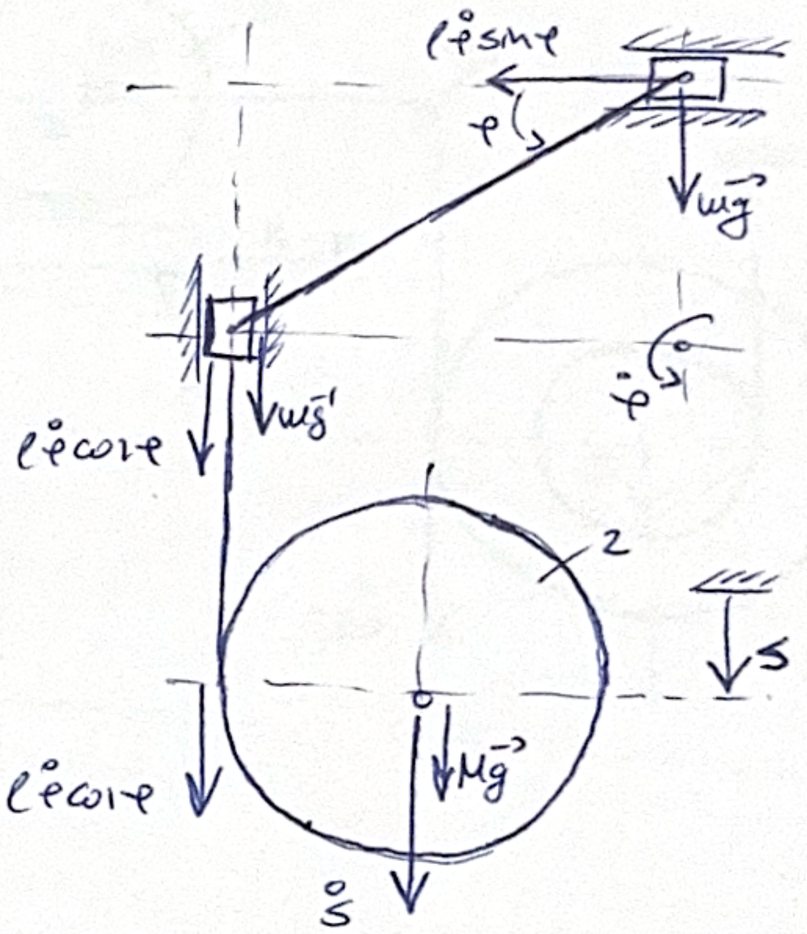
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 2M\dot{s} - Ml\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = 2M\ddot{s} - Ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + Ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi$$

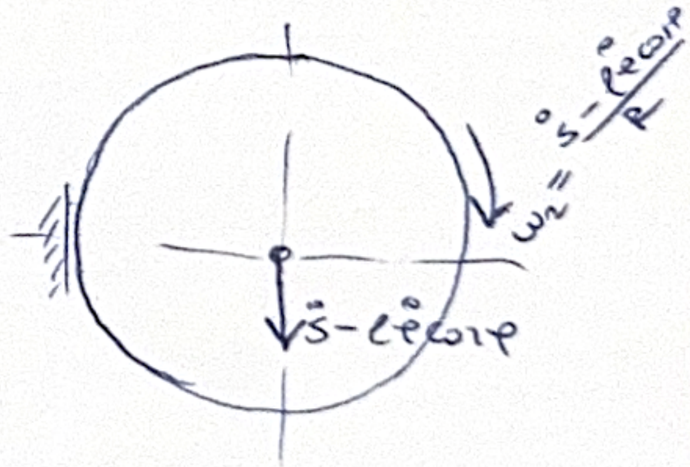
$$\delta A = mg\cdot l\delta\varphi\cos\varphi + Mg\delta s$$

$$ml\ddot{\varphi} + Ml^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - Ml^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi - Ml\ddot{s}\cos\varphi = mgl\cos\varphi$$

$$2M\ddot{s} - Ml\ddot{\varphi}\cos\varphi + Ml\dot{\varphi}^2\sin\varphi = Mg$$



cilindar 2 - relativno



Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

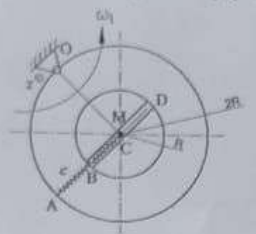
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
МАШИНСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35

МЕХАНИКА 3

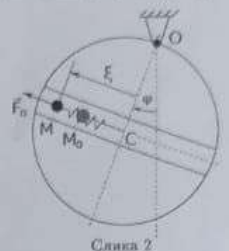
Јануарски испитни рок, 19. јануар 2024. године

Друга група

1. Тело које се састоји од два круто спојена коаксијална диска полупречника R и $2R$, укупне масе m и полупречника инерције $i_0 = 3R$ може да се обрће око вертикалне осе O_z управне на раван цртежа. По каналу BD креће се тачка M масе m, која је опругом крутости c везана за тачку A плоче. У почетном тренутку, када се тачка M налазила у положају D систем је мировао. Одредити угаону брзину плоче ω_1 у тренутку t_1 када тачка M стигне у тачку C (положај приказан на слици 1). Везе наметнуте систему су идеалне, а дужина ненапрегнуте опруге је R.



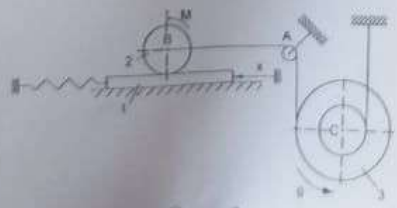
Слика 1



Слика 2

2. На слици 2 приказан је диск полупречника R који може да се обрће око вертикалне осе O_z, управне на раван цртежа, по закону $\varphi = at$, $a = \text{const}$. Дуж централне осе диска је урезан жлеб по коме може да се креће тачка M масе m. Тачка M је везана опругом крутости c, чији је други крај везан за центар диска C. На тачку M, такође, дејствује сила $\vec{F}_\Omega$, интензитета $F_\Omega = \beta \sin(\Omega t + \gamma)$; ($\beta, \gamma$ и Ω су константе), правца и смера приказаног на слици. У почетном тренутку тачка M је мировала на растојању $\overline{CM_0} = l$, а опруга је била ненапрегнута. Одредити коначну једначину релативног кретања материјалне тачке, као и укупну реакцију жлеба на тачку M у произвољном тренутку, ако је $\sqrt{(c - ma^2)/m} = \Omega$.

3. Механички систем налази се у вертикалној равни и састоји се од платформе 1 масе $2m$, хомогеног диска 2 масе m и полупречника R, и коаксијалног цилиндра 3 масе m и полупречника R и $2R$. Полупречник инерције цилиндра за осу управну на раван цртежа, а која пролази кроз средиште маса C, износи $i_C = \sqrt{2}R$. Тачка C за све време кретања задржана вертикални правац. Диск 2 може да се котрља без клизања по платформи 1, моја може да клизи без трења по хоризонталној подлози. Платформа је везана опругом крутости c, чији је други крај везан за непокретни зид. Систем је спојен неистегљивим ужадима занемарљиве масе као што је приказано на слици 3. Масу котура A занемарити. На диск 2 дејствује спрег сила момента интензитета M у назначеном смеру. За дате генералисане координате (θ, x) одредити диференцијалне једначине кретања материјалног система. Опруга је ненапрегнута у положају $x = 0$.



Слика 3

februar 24

③ 1: $2m$

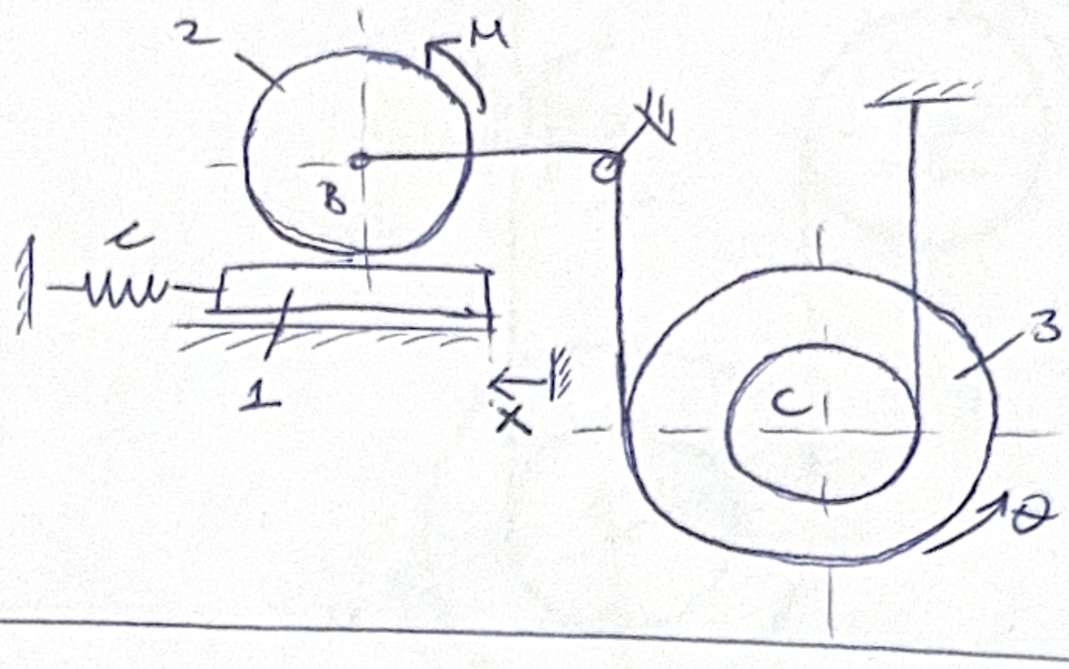
2: m, R (disk)

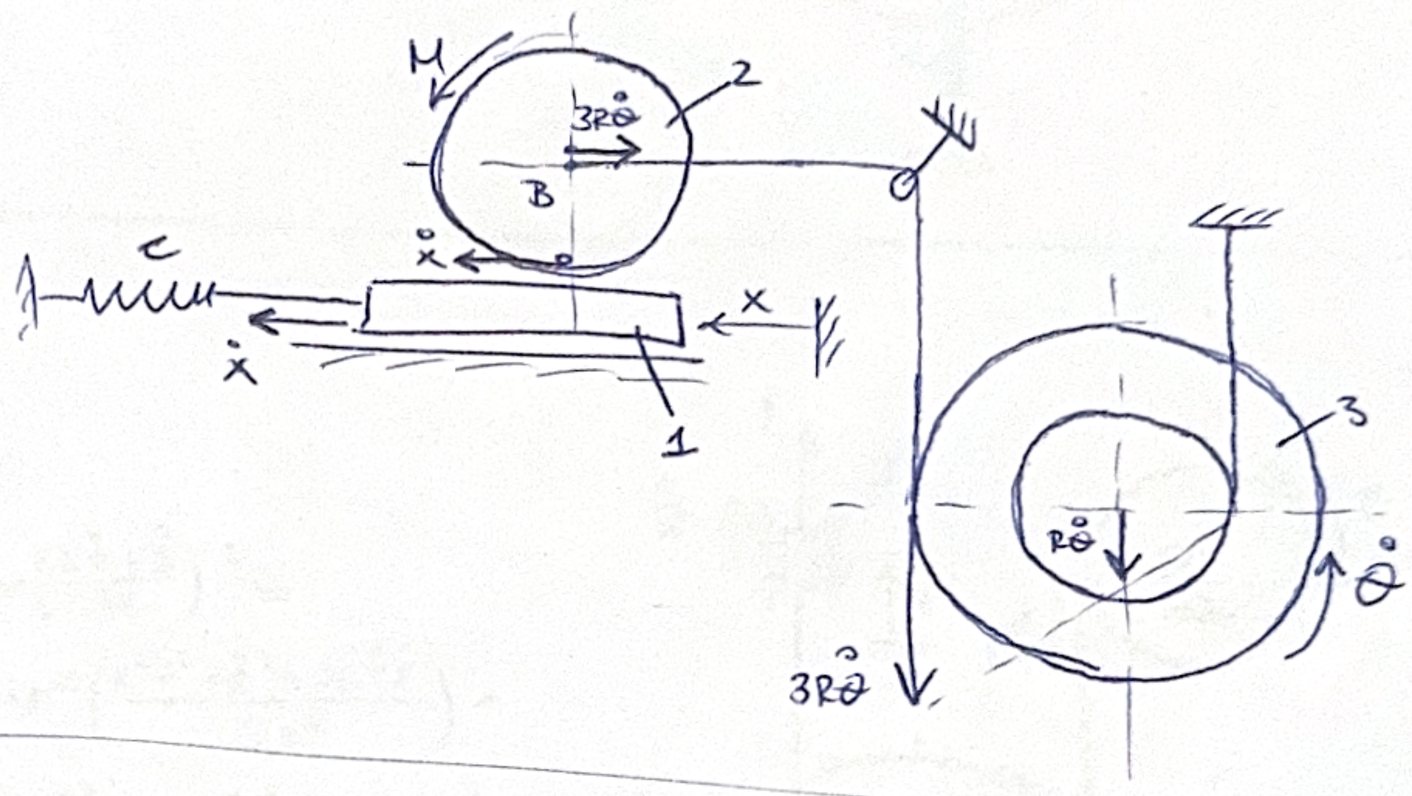
3: $m, R, 2R, \rho_C = \sqrt{2}R$

opruga: c, za $x=0$ je neopregnuta

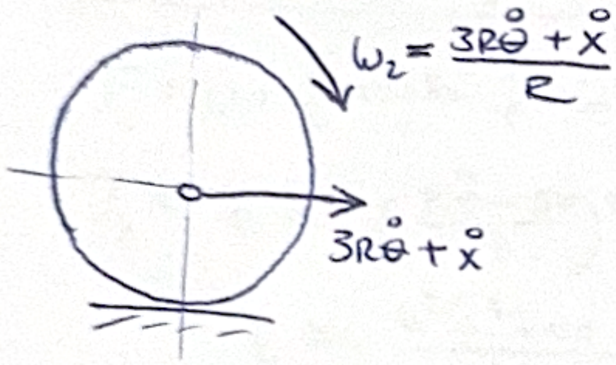
sprg M

elf. j-ve za θ, x?





disk 2 - relativno



$T = T_1 + T_2 + T_3$

$T_1 = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2 = m\dot{x}^2$

$T_2 = \frac{1}{2}m(3R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\frac{mR^2}{2}\left(\frac{3R\dot{\theta}+\dot{x}}{R}\right)^2 = \frac{9}{2}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}mR^2\left(\frac{9R^2\dot{\theta}^2 + 6R\dot{\theta}\dot{x} + \dot{x}^2}{R^2}\right) =$

$= \frac{27}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}mR\dot{\theta}\dot{x}$

$T_3 = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m \cdot 2R^2 \cdot \dot{\theta}^2 = \frac{3}{2}mR^2\dot{\theta}^2$

$T = \frac{5}{4}m\dot{x}^2 + \frac{33}{4}mR^2\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}mR\dot{\theta}\dot{x}$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{5}{2}m\dot{x} + \frac{3}{2}mR\dot{\theta}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{5}{2}m\ddot{x} + \frac{3}{2}mR\ddot{\theta}$

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{33}{2}mR^2\dot{\theta} + \frac{3}{2}mR\dot{x}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{33}{2}mR^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2}mR\ddot{x}$

$\delta A = -cx\delta x - M\left(\frac{3R\delta\theta + \delta x}{R}\right) + mgR\delta\theta$

$$\frac{5}{2}m\ddot{x} + \frac{3}{2}mR\ddot{\theta} = -cx - \frac{M}{R}$$

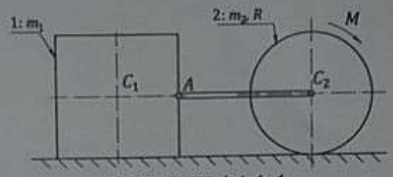
$$\frac{33}{2}mR^2\ddot{\theta} + \frac{3}{2}mR\ddot{x} = -3M + mgR$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
9.2.2024.

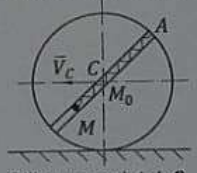
Mehanika 3
Februarski ispitni rok – grupa 2

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase m_1 i diska 2 mase $m_2 = 2m$ i poluprečnika R, na koji deluje spreg sila momenta $M = mgR$. Centar C_2 diska vezan je lakim štapom za tačku A prizme. Veze u tačkama A i C_2 su zglobne. Prizma može da klizi po horizontalnoj nepokretnoj podlozi sa koeficijentom trenja klizanja $\mu_1 = 1/4$. Ako je koeficijent trenja klizanja između diska i podloge $\mu_2 = 1/2$, odrediti najveću moguću vrednost mase m_1 prizme 1 pri kojoj neće doći do proklizavanja diska 2. Otpor trenja kotrljanja diska zanemariti.



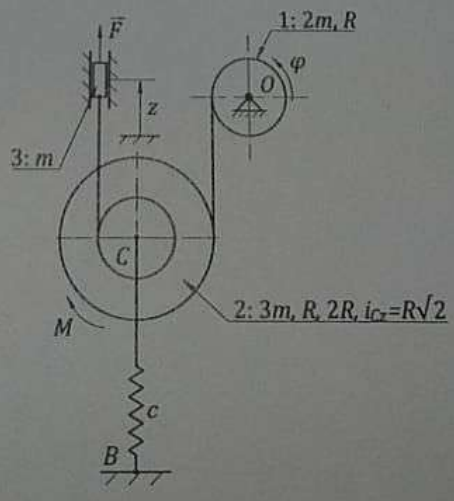
Slika uz zadatak 1.

2. Disk poluprečnika R, kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj horizontalnoj podlozi tako da mu je brzina središta konstantnog intenziteta $V_C = R\omega$. Na disku je urezan žleb po kome se kreće tačka M, mase m. Tačka M je oprugom krutosti $c = 10m\omega^2$ vezana za kraj A žleba. U početnom trenutku žleb je bio horizontalan i tačka je relativno mirovala u centru diska pri čemu je opruga tada bila nenapregnuta. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tačke po žlebu u odnosu na početni položaj i reakciju veze između žleba i tačke u zavisnosti od vremena.



Slika uz zadatak 2.

3. Homogeni disk 1 mase $2m$ i poluprečnika R može da se obrće oko središnje horizontalne ose koja prolazi kroz tačku O. Lako neistegljivo uže namotano je jednim krajem na disk 1, a drugim krajem na veći disk koaksijalnog kotura 2. Na manji disk koaksijalnog kotura namotano je drugo lako neistegljivo uže, koje je vezano za klizač 3 mase m, na koji deluje konstantna vertikalna sila $\vec{F}$, intenziteta $F = 6mg$. Koaksijalni kotur 2 ima masu $3m$, poluprečnike diskova R i $2R$ i poluprečnik inercije, u odnosu na horizontalnu osu Cz, $i_{Cz} = R\sqrt{2}$. Na kotur deluje spreg sila momenta M, a za njegov centar C vezana je vertikalna opruga krutosti $c = 27mg/R$. U početnom trenutku $(z(0) = 0, \varphi(0) = 0)$, kada je sistem mirovao, opruga je bila nenapregnuta. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema po generalisanim koordinatama z i φ.



Slika uz zadatak 3.

februar 24

③ 1: $2m, R$ (disk)

2: $3m, R, 2R, \rho_{cT} = R\sqrt{2}$

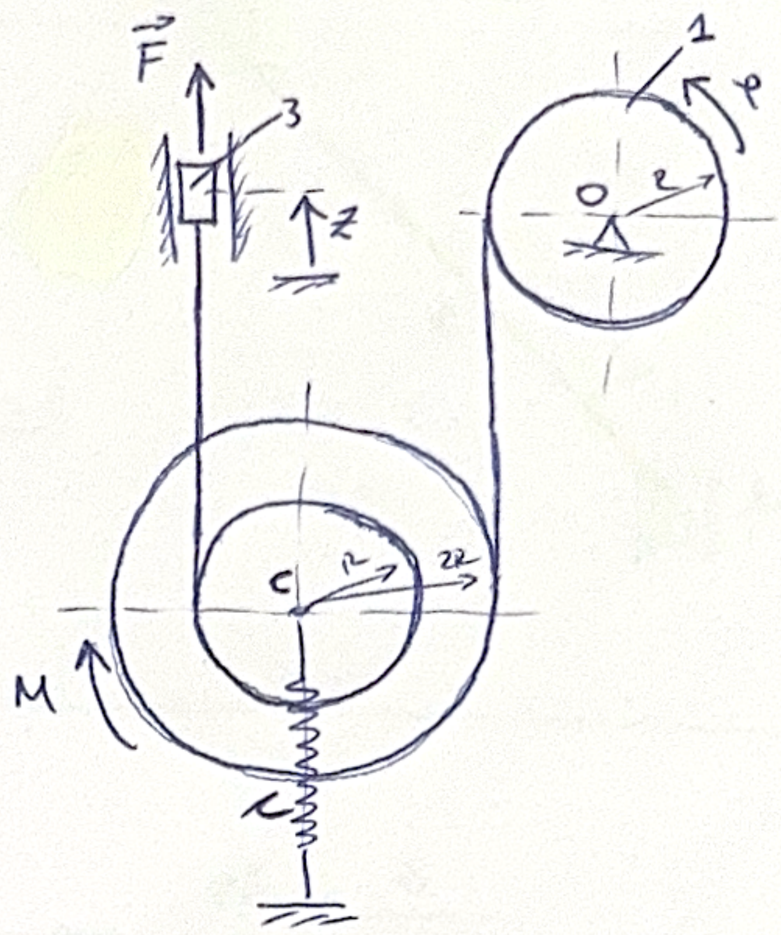
3: m

sila $F = 6mg$, spreg M

opruga: $c = 27\frac{mg}{R}$

to: $z_0 = 0$, $\varphi_0 = 0$
sistem miruje
opruga nenapregnuta

d.f. i-ve za z, φ?



$T = T_1 + T_2 + T_3$

$T_1 = 0 + \frac{1}{2}\frac{2mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2$

$T_2 = \frac{1}{2}3m\left(\frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3}\right)^2 + \frac{1}{2}3m\cdot R^2\cdot 2\cdot\left(\frac{R\dot{\varphi} + \dot{z}}{3R}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2}3m\,\frac{R^2\dot{\varphi}^2 + 4\dot{z}^2 - 4R\dot{\varphi}\dot{z}}{9} + 3mR^2\left(\frac{R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2 + 2R\dot{\varphi}\dot{z}}{9R^2}\right) =$

$= mR^2\dot{\varphi}^2\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) + m\dot{z}^2\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\right) + mR\dot{\varphi}\dot{z}\left(-\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\right) =$

$= \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + m\dot{z}^2$

$T_3 = \frac{1}{2}2m\dot{z}^2 = m\dot{z}^2$

$T = mR^2\dot{\varphi}^2 + 2m\dot{z}^2$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2mR^2\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = 4m\dot{z}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = 4m\ddot{z}$

$\delta A = -c_3\delta\zeta + F\delta z + M\delta\varphi_2 - mg\delta z - 3mg\delta y_C$

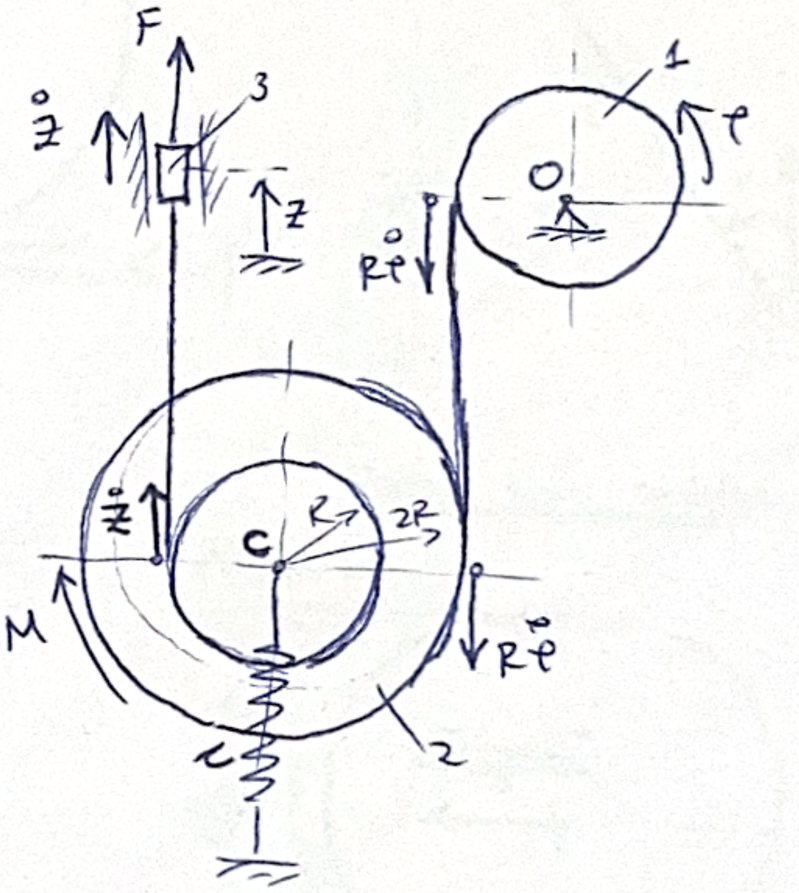
$\dot{\zeta} = \frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3} \rightarrow d\zeta = \frac{R\delta\varphi - 2\delta z}{3} \rightarrow \zeta = \frac{R\varphi - 2z}{3} + C_1^{\,0}$

$\delta A = -27\frac{mg}{R}\left(\frac{R\varphi}{3} - \frac{2z}{3}\right)\left(\frac{R\delta\varphi}{3} - \frac{2\delta z}{3}\right) + 6mg\delta z + M\left(\frac{R\delta\varphi}{3R} + \frac{\delta z}{3R}\right) -$
$- mg\delta z + 3mg\left(\frac{R\delta\varphi}{3} - \frac{2\delta z}{3}\right) =$

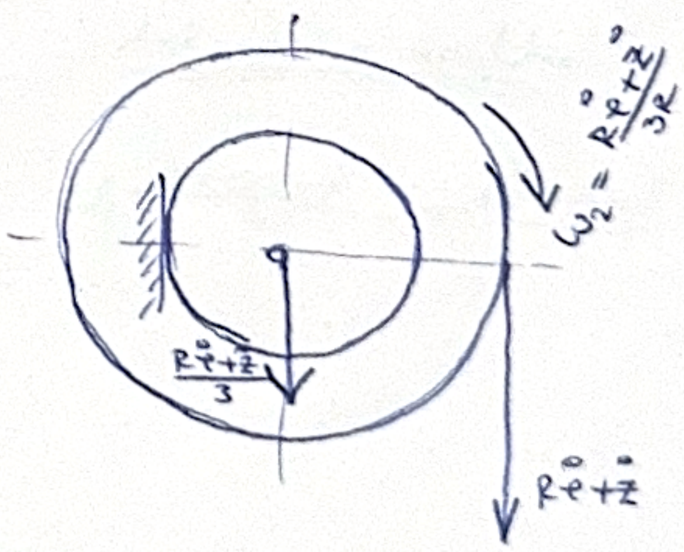
$\delta A = -27\frac{mg}{R}\left(\frac{R^2\varphi\delta\varphi}{9} - \frac{2}{9}R\varphi\delta z - \frac{2}{9}Rz\delta\varphi + \frac{4}{9}z\delta z\right) + 6mg\delta z +$
$+ \frac{1}{3}M\delta\varphi + \frac{1}{3}\frac{M}{R}\delta z - mg\delta z + mgR\delta\varphi - 2mg\delta z =$

$\delta A = -3mgR\varphi\delta\varphi - 6mg\varphi\delta z - 6mgz\delta\varphi + 12\frac{mg}{R}z\delta z + 3mg\delta z +$
$+ mgR\delta\varphi + \frac{1}{3}M\delta\varphi + \frac{1}{3}\frac{M}{R}\delta z$

$$\boxed{\begin{aligned} 2mR^2\ddot{\varphi} &= -3mgR\varphi - 6mgz + mgR + \tfrac{1}{3}M \\ 4m\ddot{z} &= -6mg\varphi + 12\tfrac{mg}{R}z + 3mg + \tfrac{1}{3}\tfrac{M}{R} \end{aligned}}$$



disk 2 - relativno



disk 2 - apsolutno

$v_c = \frac{R\dot{\varphi} + \dot{z}}{3} - \dot{z} = \frac{R\dot{\varphi} - 2\dot{z}}{3}$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

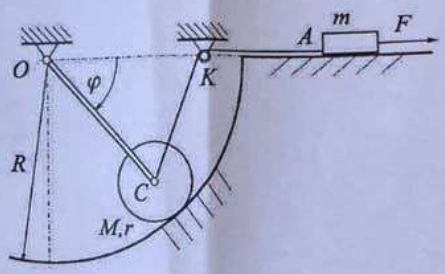
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
МАШИНСКОГ ФАКУЛТЕТА УНИВЕРЗИТЕТА У БЕОГРАДУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35

МЕХАНИКА 3

Септембарски испитни рок, 25. август 2023. године

Прва група

1. Хомогени диск C, масе M и полупречника r котрља се без клизања по унутрашњости непокретне цилиндричне површи полупречника R. За центар диска C, зглобно је везан лаки штап OC, чији је други крај зглобно везан за непокретну тачку O. За диск је у тачки C везано и лако, глатко, неистегљиво уже које је пребачено преко лаког, непокретног котура K занемарљивих димензија. На другом крају ужета везан је клизач A, масе m, који може да се креће по хоризонталној глаткој равни. На клизач дејствује хоризонтална сила интензитета F смера приказаног на слици 1. Одредити интензитет силе F у функцији угла φ тако да се лаки штап OC обрће константном угаоном брзином Ω. Посматрани систем се налази у вертикалној равни. Тачке O, K и A припадају истој хоризонталној правој. Дато је: $OK = R\text{-}r$.



Слика 1.

2. Материјална тачка M, јединичне масе, креће се под дејством централне силе, чија се пројекција на радијалну осу поларног координатног система мења по закону:

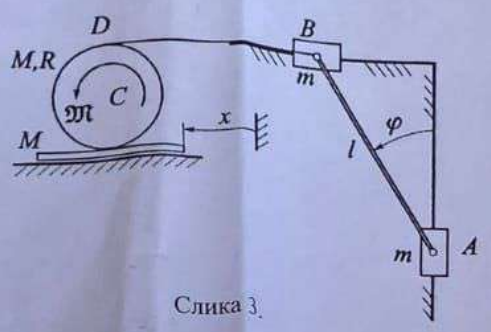
$$F_\rho = -\frac{\pi\varphi + 1}{\rho^2},$$

где је ρ растојање тачке од центра дејства силе, док је φ поларни угао. Почетни услови кретања тачке су:

$$t_0 = 0,\ \ \varphi_0 = 0,\ \ \rho_0 = 1,\ \ v_0 = \sqrt{2},\ \ \alpha_0 = \frac{\pi}{4},$$

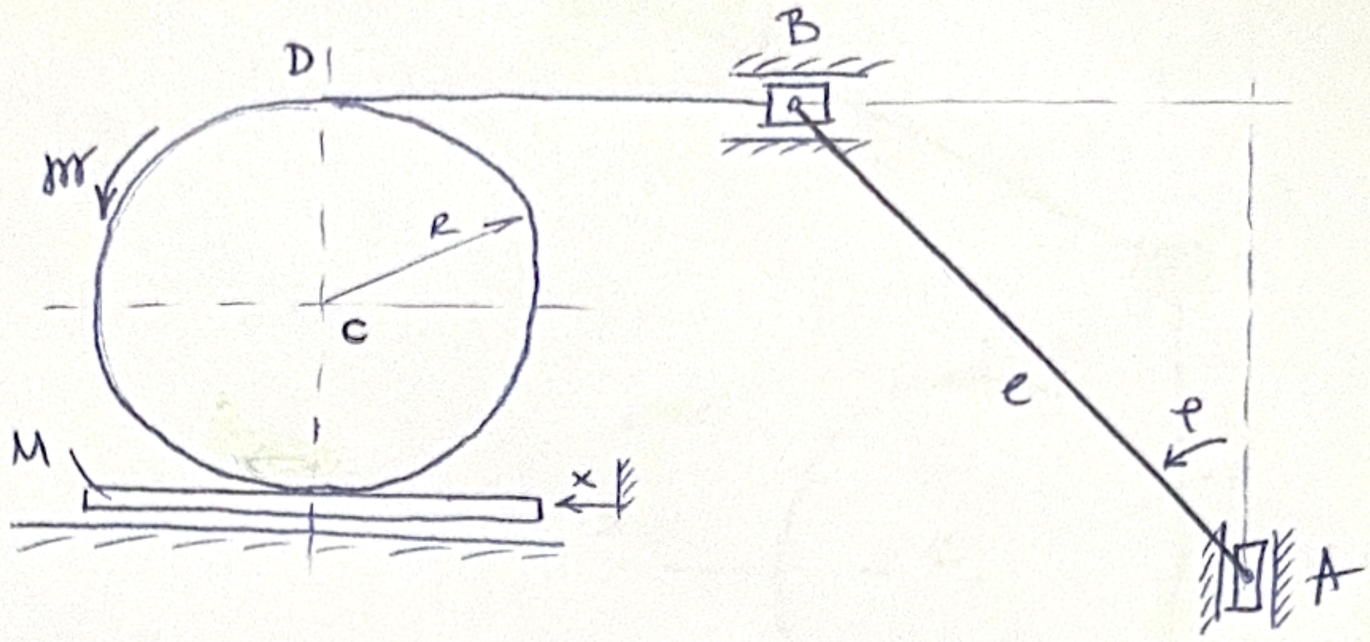
при чему је α_0 угао између вектора почетне брзине $\vec{v}_0$ материјалне тачке и почетног потега. Одредити линију путање тачке $\rho(\varphi)$ и интензитет брзине тачке у положају M_1 када је поларни угао $\varphi_1 = \pi$.

3. Лаки штап AB дужине l везан је зглобно својим крајевима за два клизача A и B једнаких маса m, који се крећу по глатким, међусобно управним вертикалним и хоризонталним вођицама, респективно, као што је приказано на слици 3. За клизач B везано је лако, глатко, неистегљиво уже које је другим крајем намотано на диск C масе M чији је полупречник R. Диск се котрља без клизања по плочи масе M, која се креће по глаткој хоризонталној подлози. На диск дејствује спрег момента $\mathfrak{m}$ у смеру приказаном на слици. Написати диференцијалне једначине кретања посматраног материјалног система, уколико су дате генералисане координате x и φ. Посматрани систем налази се у вертикалној равни. Напомена: део ужета BD је хоризонталан.



Слика 3.

Septembar 23



③ AD: $\emptyset$, e

A: u

B: u

C: M, R (disk)

ploča: M

moment M_M

dif. j-ne kretanja za x, φ ?

$T = T_p + T_C + T_A + T_B$

$T_p = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + 0$

$T_C = \frac{1}{2} M \left(\frac{e\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{x}}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{MR^2}{2} \left(\frac{e\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{x}}{2R} \right)^2 =$

$= \frac{1}{8} M \left(e^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \dot{x}^2 + 2e\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi \right) +$

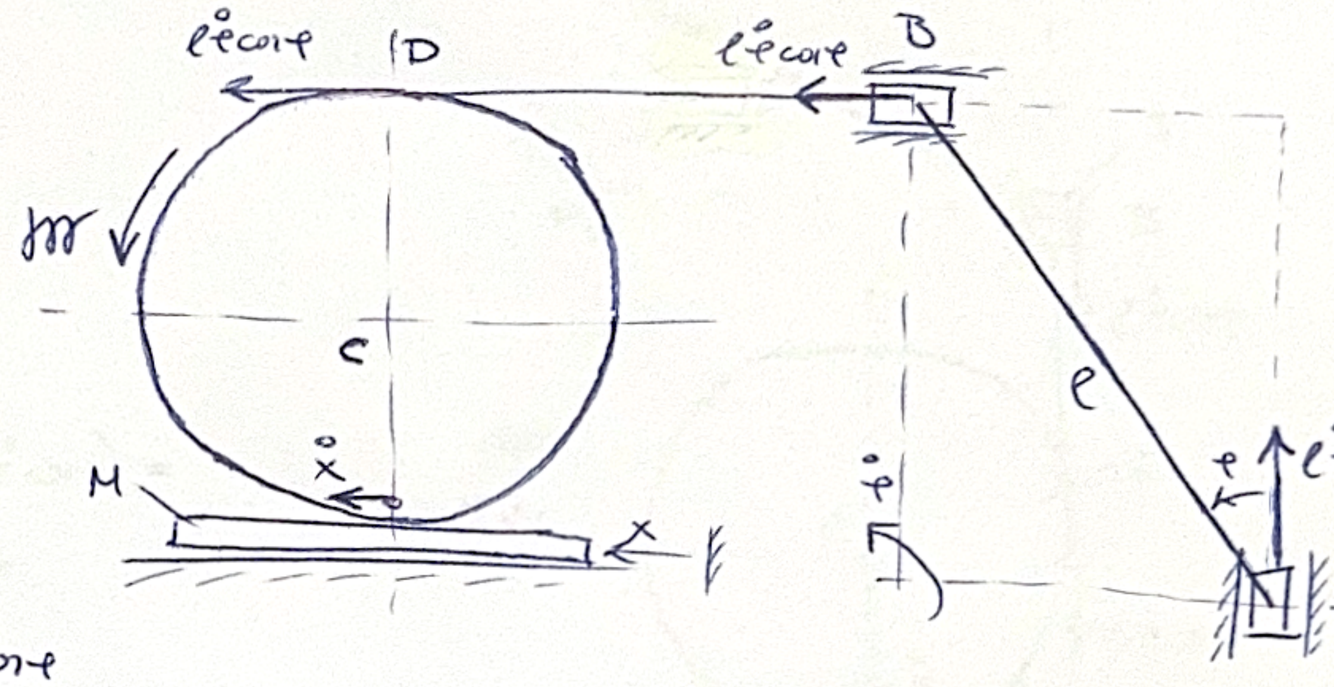
$+ \frac{1}{16} M \left(e^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \dot{x}^2 - 2e\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi \right) =$

$= \frac{3}{16} Me^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{3}{16} M\dot{x}^2 + \frac{1}{8} Me\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi$

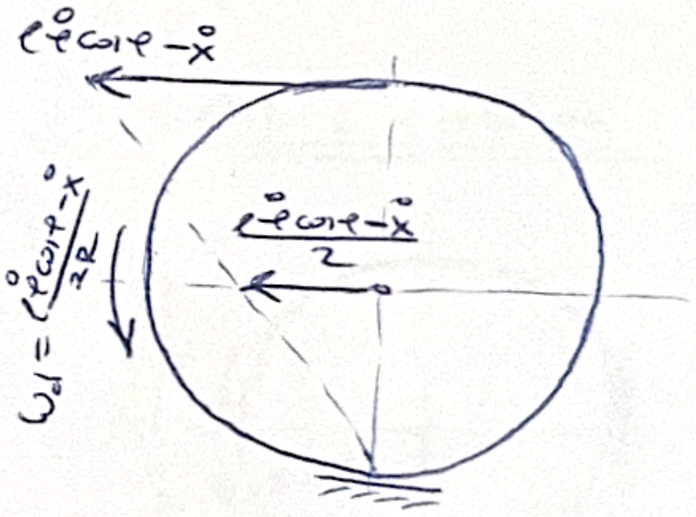
$T_A = \frac{1}{2} m \left(e\dot{\varphi}\sin\varphi \right)^2 + 0 = \frac{1}{2} me^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$

$T_B = \frac{1}{2} m \left(e\dot{\varphi}\cos\varphi \right)^2 + 0 = \frac{1}{2} me^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi$

$T = \frac{11}{16} M\dot{x}^2 + \frac{1}{2} me^2\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{16} Me^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + \frac{1}{8} Me\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi$



disk C - relativno



disk C - apsolutno

$v_c = \frac{e\dot{\varphi}\cos\varphi - \dot{x}}{2} + \dot{x} = \frac{e\dot{\varphi}\cos\varphi + \dot{x}}{2}$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$,

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -\frac{3}{8} Me^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi - \frac{1}{8} Me\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi$,

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{11}{8} M\dot{x} + \frac{1}{8} Me\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = me^2\dot{\varphi} + \frac{3}{8} Me^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi + \frac{1}{8} Me\dot{x}\cos\varphi$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{11}{8} M\ddot{x} + \frac{1}{8} Me\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{8} Me\dot{\varphi}^2\sin\varphi$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = me^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{8} Me^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - \frac{3}{4} Me^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{8} Me\ddot{x}\cos\varphi - \frac{1}{8} Me\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi$

$\partial A = M_M \partial\varphi_2 - mg\partial y_A = M_M \cdot \frac{e\partial\varphi\cos\varphi - \partial x}{2R} - mge\partial\varphi\sin\varphi$

$$\frac{11}{8} M\ddot{x} + \frac{1}{8} Me\ddot{\varphi}\cos\varphi - \frac{1}{8} Me\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -\frac{1}{2} \frac{M_M}{R}$$

$$me^2\ddot{\varphi} + \frac{3}{8} Me^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - \frac{3}{8} Me^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + \frac{1}{8} Me\ddot{x}\cos\varphi = \frac{1}{2} \frac{M_M e\cos\varphi}{2R} - mge\sin\varphi$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Mehanika 3

Julski ispitni rok, II grupa

June 30, 2023

1. Teret 1, mase m vezan je lakim gipkim i nerastegljivim užetom koje je prebačeno preko lakog kotura 2 i drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 3 mase $2m$. Cilindar se kotrlja po nepokretnoj strmoj ravni nagiba α. Odrediti maksimalni ugao α pri kome je moguće kotrljanje cilindra bez klizanja, ako je koeficijent trenja klizanja između cilindra i strme ravni $\mu = 0.2$. Otpor kotrljanju zanemariti. Takođe zanemariti trenje u osovini kotura 2. Deo užeta između cilindra 3 i delova 2 paralelan je strmoj ravni.

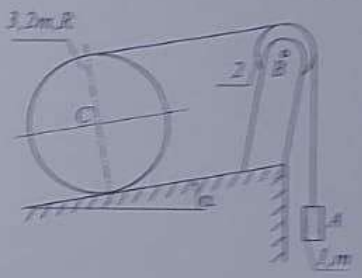


Figure 1: Slika uz zadatak 1

2. Kuglica M, mase m, zanemarljivih dimenzija može da se kreće unutar glatke cevi OK koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω oko vertikalne ose O_1O_2 (dimenzije na slici). U početnom trenutku kuglica se nalazila u položaju O u stanju relativnog mirovanja. Odrediti intenzitet vertikalne komponente apsolutne brzine materijalne tačke u položaju K. Dato je:

$$\alpha = 30^0 \ ; \ \omega = \sqrt{\frac{2g}{R \tan \alpha}}.$$

3. Laki štap 1 dužine l zglobno je vezan krajevima A i B za klizače 3 i 4 jednakih masa m. Klizač 3 kreće se po vertikalnoj vodjici, dok se klizač 4 kreće po horizontalnoj vodjici. Za klizač 3 vezano je jednim krajem glatko, lako i nerastegljivo uže, koje je drugim krajem namotano na homogeni kružni cilindar 2, mase M. Cilindar 2 kreće se tako da viseći deo užeta, koje se odmotava sa cilindra, stalno ostaje vertikalan. Primenom Lagranževih jednačina druge vrste napisati diferencijalne jednačine kretanja opisanog materijalnog sistema. Generalisane koordinate su: s i φ. Sva trenja zanemariti.

Iz Kabineta za Mehaniku

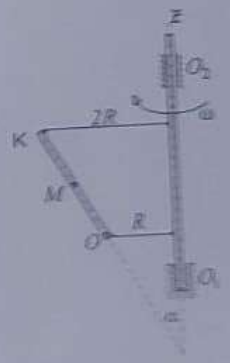


Figure 2: Slika uz zadatak 2

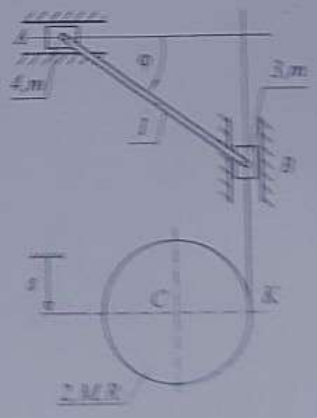
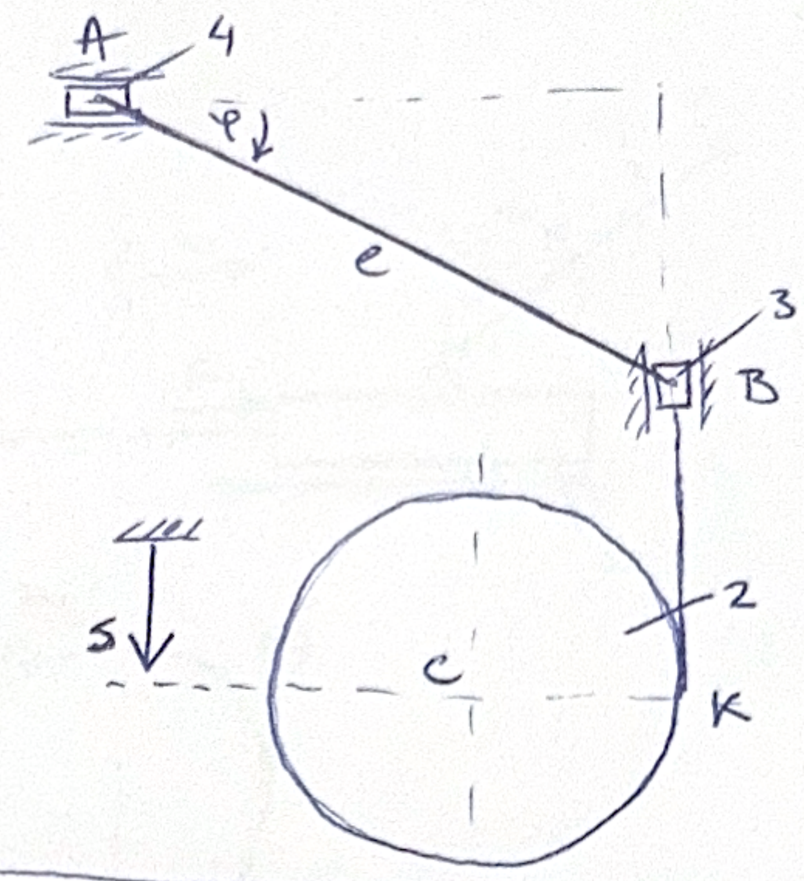


Figure 3: Slika uz zadatak 3

jul 23



③ 1: ϕ, e

3: m

4: m

2: M (cilindar)

dif. j-ne za s i φ?

$T = T_A + T_B + T_C$

$T_A = \frac{1}{2} m (e\dot{\varphi} \sin\varphi)^2 = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2\varphi$

$T_B = \frac{1}{2} m (e\dot{\varphi} \cos\varphi)^2 = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi$

$T_C = \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M R^2 \left(\frac{\dot{s} - e\dot{\varphi}\cos\varphi}{R}\right)^2 =$

$= \frac{1}{2} M \dot{s}^2 + \frac{1}{2} M (\dot{s}^2 + e^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - 2e\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi) =$

$= M\dot{s}^2 + \frac{1}{2} M e^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi - Me\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi$

$T = \frac{1}{2} m e^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M e^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2\varphi + M\dot{s}^2 - Me\dot{\varphi}\dot{s}\cos\varphi$

$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$,

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -Me^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi + Me\dot{\varphi}\dot{s}\sin\varphi$,

$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 2M\dot{s} - Me\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = 2M\ddot{s} - Me\ddot{\varphi}\cos\varphi + Me\dot{\varphi}^2\sin\varphi$

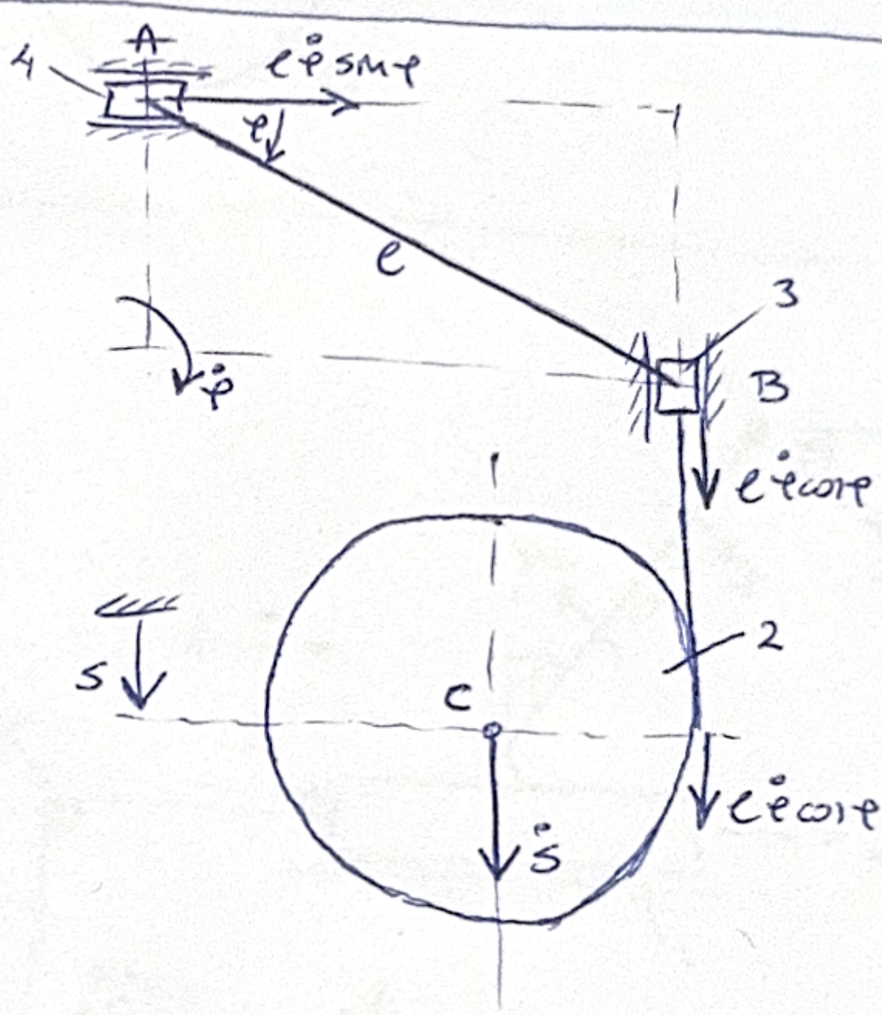
$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = me^2\dot{\varphi} + Me^2\dot{\varphi}\cos^2\varphi - Me\dot{s}\cos\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = me^2\ddot{\varphi} + Me^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - 2Me^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi - Me\ddot{s}\cos\varphi + Me\dot{\varphi}\dot{s}\sin\varphi$

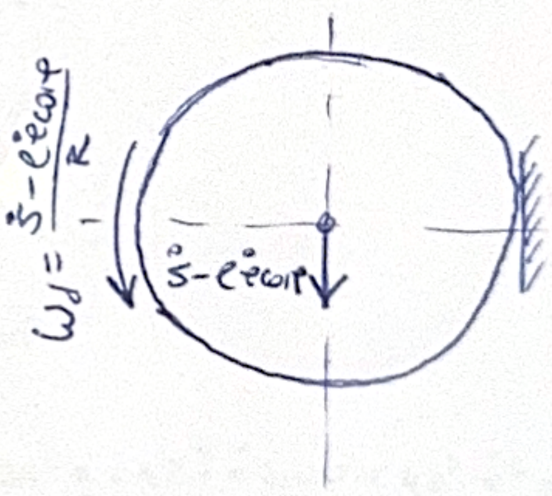
$\delta A = mge\,\delta\varphi\cdot\cos\varphi + Mg\delta s$

$2M\ddot{s} - Me\ddot{\varphi}\cos\varphi + Me\dot{\varphi}^2\sin\varphi = Mg$

$me^2\ddot{\varphi} + Me^2\ddot{\varphi}\cos^2\varphi - Me^2\dot{\varphi}^2\cos\varphi\sin\varphi - Me\ddot{s}\cos\varphi = mge\cos\varphi$



disk 2 – relativno



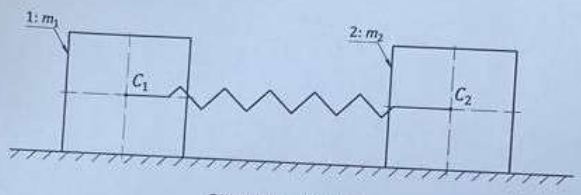
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
9.6.2023.

Mehanika 3

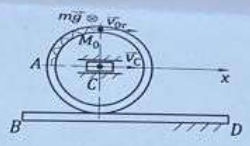
Junski ispitni rok 2023. – grupa 1

1. Sistem prikazan na slici nalazi se u vertikalnoj ravni i sastoji se od prizme 1 mase $m_1 = 4m$ i prizme 2 mase $m_2 = 2m$, čija su težišta spojena oprugom krutosti $c_1 = 8c$. Prizme mogu da klize bez trenja po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Odrediti pomeranje prizme 1 do trenutka kada se prizma 2 pomerila za dužinu $k/2$ udesno, ako je u početnom trenutku sistem mirovao a opruga bila sabijena za $\Delta l_0 = -k$ u odnosu na nenapregnutu dužinu. Odrediti i brzinu prizme 1 u istom trenutku.



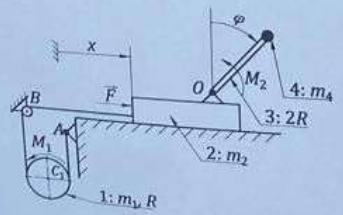
Slika uz zadatak 1.

2. Disk poluprečnika R leži u horizontalnoj ravni i svojim središtem je zglobno vezan za klizač C, koji se kreće brzinom V_C konstantnog intenziteta u pravcu ose x. Disk se za sve vreme kretanja kotrlja bez klizanja po nepokretnom štapu BD koji je paralelan sa osom x (slika 2, pogled odozgo). U disk je urezan tanak žleb u koji je stavljena kuglica M zanemarljivih dimenzija i mase m, koja je oprugom krutosti $c = mg/R$ vezana za tačku A cevi. Vektor sile težine kuglice označen je na slici 2. Ako je u početnom trenutku opruga bila nenapregnuta a kuglici u položaju M_0 saopštena relativna brzina intenziteta $v_{r0} = \sqrt{gR}$, smera kao na slici, odrediti položaj kuglice na relativnoj putanji u kom ona prvi put menja smer relativnog kretanja.



Slika uz zadatak 2.

3. Platforma 2 mase $m_2 = m$ može da klizi po glatkoj horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za platformu je u tački O zglobno vezan laki štap 3 dužine $2R$, na čijem kraju se nalazi teg 4 mase $m_4 = m/2$ i zanemarljivih dimenzija. Za platformu je jednim krajem vezano lako neistegljivo uže koje je prebačeno preko lakog kotura u tački B i preko tankog cilindra 1 mase $m_1 = m$ i poluprečnika R, dok je drugim krajem zakačeno za nepokretni oslonac u tački A. Između cilindra 1 i užeta nema proklizavanja. Ako na cilindar 1 deluje spreg sila intenziteta $M_1 = 2mgR$, smera kao na slici, na laki štap spreg sila intenziteta $M_2 = mgR$, smera kao na slici, a na platformu horizontalna sila intenziteta $F = mg$, smera kao na slici, napisati Lagranževe diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na zadate generalisane koordinate x i φ.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

jun 23

③ 2: $m_2 = m$

3: $\emptyset$, $2R$

4: $m_4 = \frac{1}{2}m$

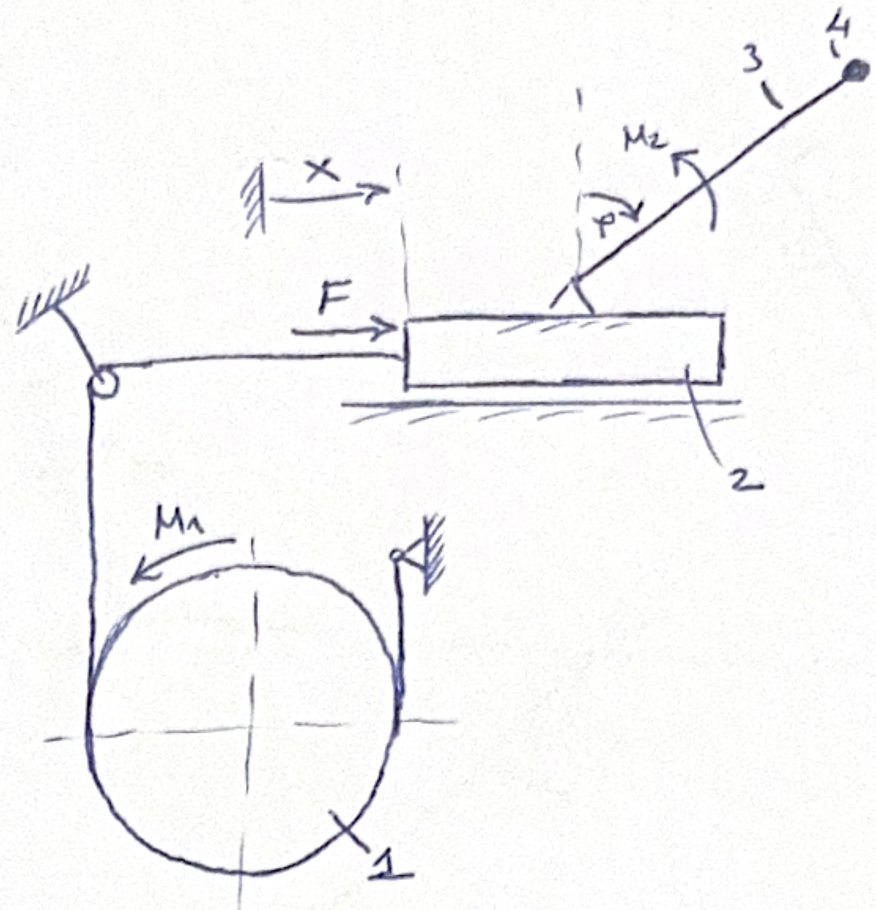
1: $m_1 = m$, R (cilindar)

spreg $M_1 = 2mgR$

spreg $M_2 = mgR$

sila $F = mg$

dif. j-ne za x, φ ?



$T = T_1 + T_2 + T_4$

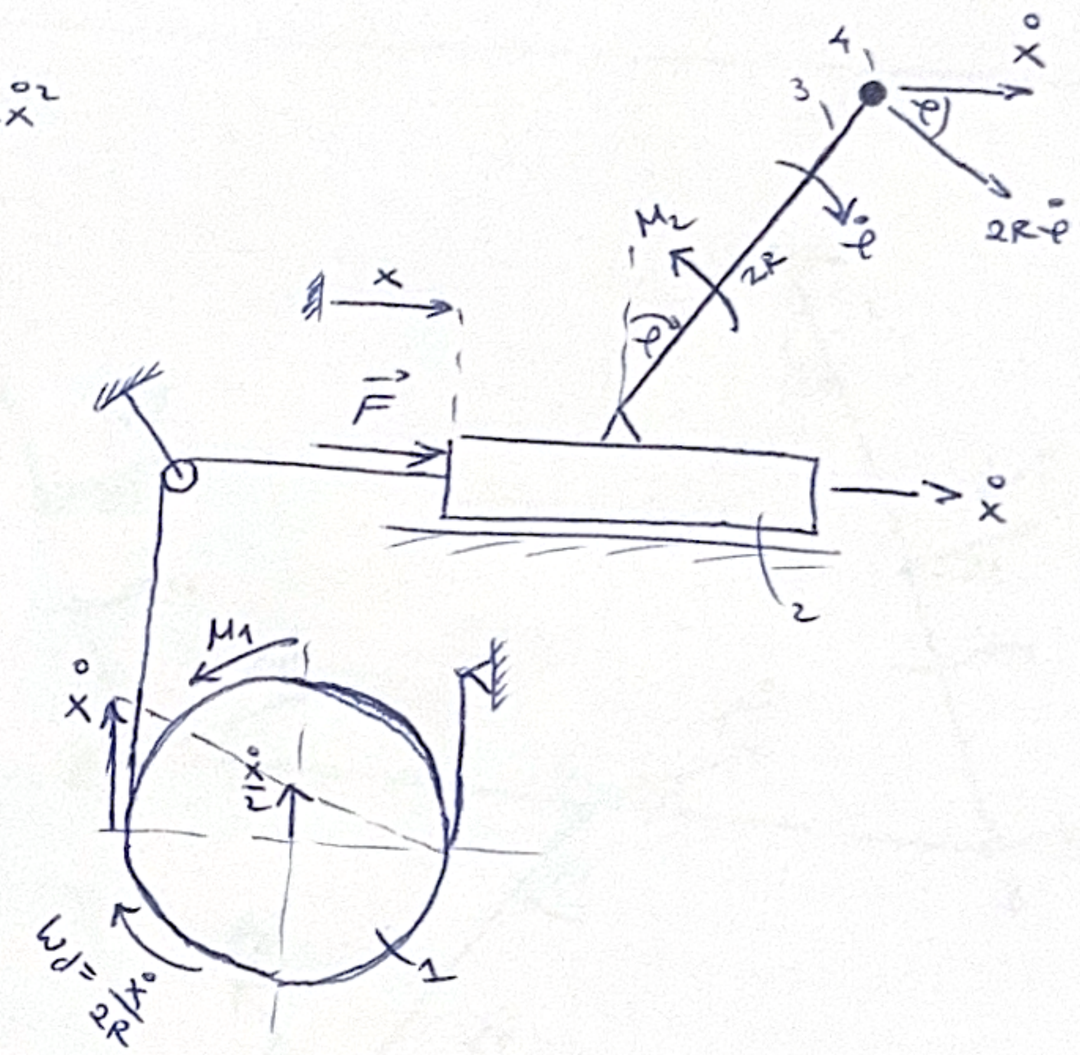
$T_1 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\dot{x}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{\dot{x}}{2R}\right)^2 = \frac{1}{8}m\dot{x}^2 + \frac{1}{8}m\dot{x}^2 = \frac{1}{4}m\dot{x}^2$

$T_2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + 0$

$T_4 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + 4R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + 4R^2\dot{\varphi}^2\right) =$

$= \frac{1}{4}m\dot{x}^2 + mR\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + mR^2\dot{\varphi}^2$

$T = m\dot{x}^2 + mR^2\dot{\varphi}^2 + mR\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi$



$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 2m\dot{x} + mR\dot{\varphi}\cos\varphi$,

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -mR\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 2mR^2\dot{\varphi} + mR\dot{x}\cos\varphi$,

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 2m\ddot{x} + mR\ddot{\varphi}\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2mR^2\ddot{\varphi} + mR\ddot{x}\cos\varphi - mR\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi$

$\dot{x}_4 = \dot{x} + 2R\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\dot{y}_4 = -2R\dot{\varphi}\sin\varphi$

$v_4^2 = \dot{x}^2 + 4R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + 4R\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + 4R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi$

$\delta A = -M_1\frac{\delta x}{2R} - M_2\delta\varphi + F\delta x - mg\frac{\delta x}{2} - \frac{1}{2}mg\left(-2R\delta\varphi\sin\varphi\right) =$

$\delta A = -\frac{1}{2}\frac{M_1}{R}\delta x - M_2\delta\varphi + F\delta x - \frac{1}{2}mg\delta x + mgR\sin\varphi\,\delta\varphi$

$2m\ddot{x} + mR\ddot{\varphi}\cos\varphi - mR\dot{\varphi}^2\sin\varphi = -\frac{1}{2}\frac{M_1}{R} + F - \frac{1}{2}mg$

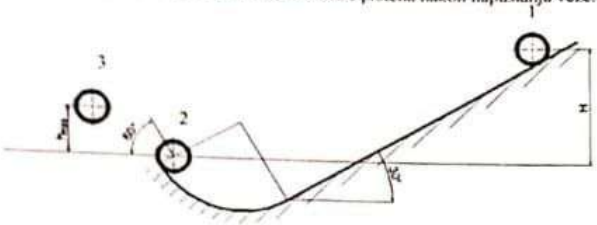
$2mR^2\ddot{\varphi} + mR\ddot{x}\cos\varphi = -M_2 + mgR\sin\varphi$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

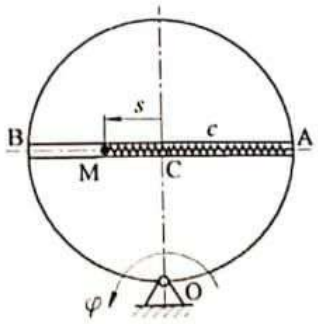
20:55 Vo)) LTE2 4G 70%

Mehanika 3, jul 2021.

1. Koaksijalni disk mase m, spoljašnjeg poluprečnika R i poluprečnika inercije za svoju glavnu centralnu osu inercije $\iota=2R$ započinje kretanje iz položaja "1" prikazanog na slici iz stanja mirovanja. Prsten se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj podlozi. U položaju "2" prsten napušta podlogu kao na slici. Odrediti maksimalnu visinu (položaj "3") koju će dostići centar mase prstena nakon napuštanja veze. $H=5R$.

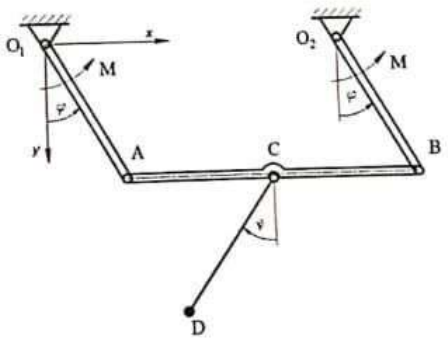


2. Sistem prikazan na slici čine: disk poluprečnika R koji može da se obrće u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose Oz po poznatom zakonu $\varphi=2t$ i materijalna tačka M koja se kreće unutar glatkog kanala AB. Tačka M, mase m je vezana oprugom krutosti $c=8m$ za tačku A diska. Dužina nenapregnute opruge jednaka je poluprečniku diska. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tačke M ($s(t)=?$) ako je u početnom trenutku opruga bila nenapregnuta, a tačka M imala relativnu brzinu $\dot{s}_0 = 1$. Sve veličine date su u osnovnim jedinicama SI sistema.



CamScanner

3. Sistem prikazan na slici sastoji se od štapova O_1A, O_2B, AB, CD i materijalne tačke D i može da se kreće u vertikalnoj ravni. Veze u tačkama O_1, O_2, A, B i C su zglobne. Poznate su dužine štapova $O_1A=O_2B=CD=l$, i $AB=2l$ i $AC=CB$. Štap O_1A je mase 3m, O_2B je mase 3m, AB je mase 2m i tačka D je mase 2m. Masu štapa CD možemo zanemariti. Na štapove O_1A i O_2B dejstvuju spregovi sila momenata M kao na slici. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja sistema s obzirom na generalisane coordinate φ i ψ.



jul 21

③ $\overline{O_1A} = \overline{O_2B} = \overline{CD} = e$

$\overline{AB} = 2e$

$\overline{AC} = \overline{CB}$

O_1A: 3m, e

O_2B: 3m, e

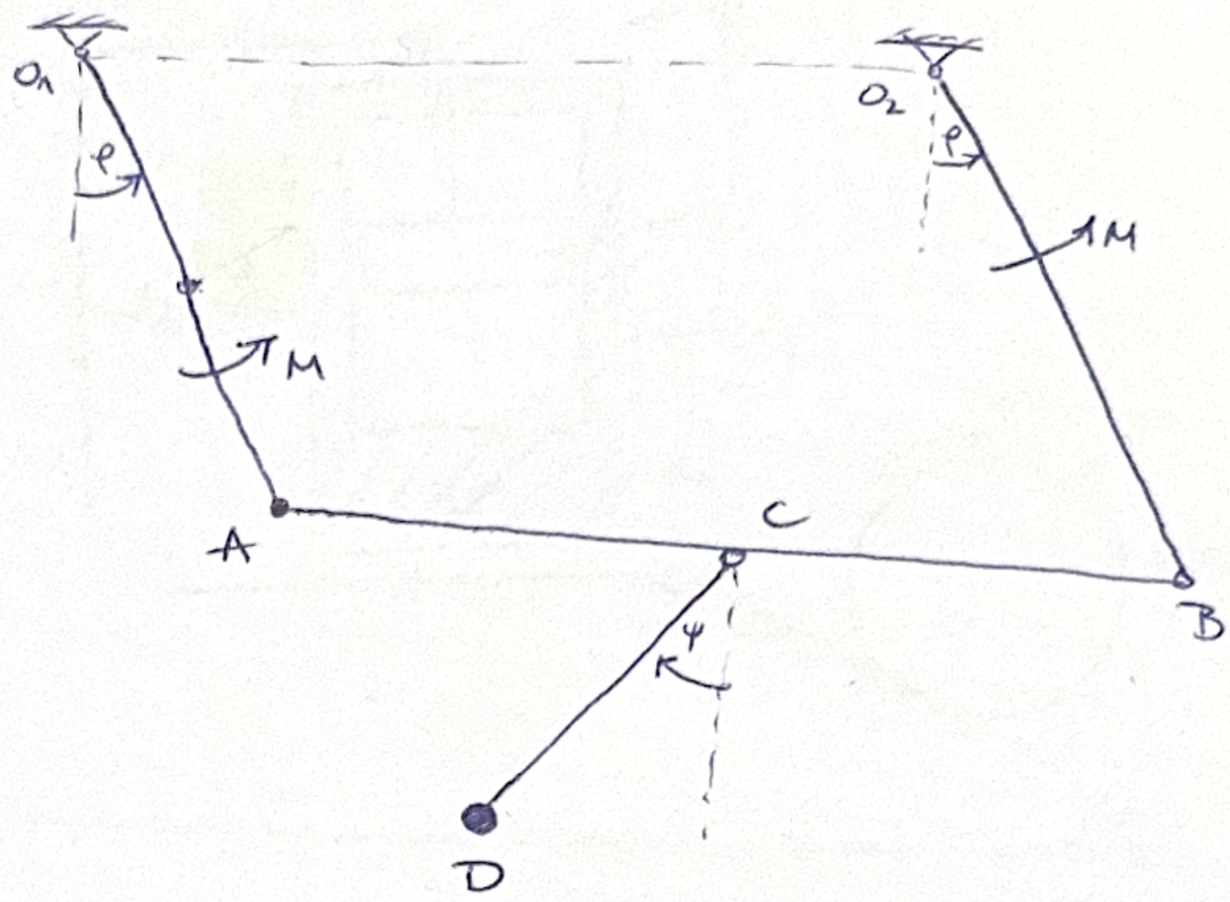
AB: 2m, 2e

D: 2m

CD: $\emptyset$, e

Spregovi M, M

dfs. i-ve kretanja φ, ψ?



$$T = \left[\frac{1}{2}3m\left(\frac{1}{2}e\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12}3m e^2\dot{\varphi}^2\right]_{0,8}^{0,8}\cdot 2 +$$
$$+\left[\frac{1}{2}2m(e\dot{\varphi})^2 + 0\right]_{AB} +$$
$$+\left[\frac{1}{2}2m\left(e^2\dot{\varphi}^2 + e^2\dot{\psi}^2 - 2e^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi+\psi)\right) + 0\right] =$$

$$T = \left[\frac{3}{8}me^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{8}me^2\dot{\varphi}^2\right]\cdot 2 + me^2\dot{\varphi}^2 +$$
$$+me^2\dot{\varphi}^2 + me^2\dot{\psi}^2 - me^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi+\psi) =$$

$$T = 3me^2\dot{\varphi}^2 + me^2\dot{\psi}^2 - me^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi+\psi)$$

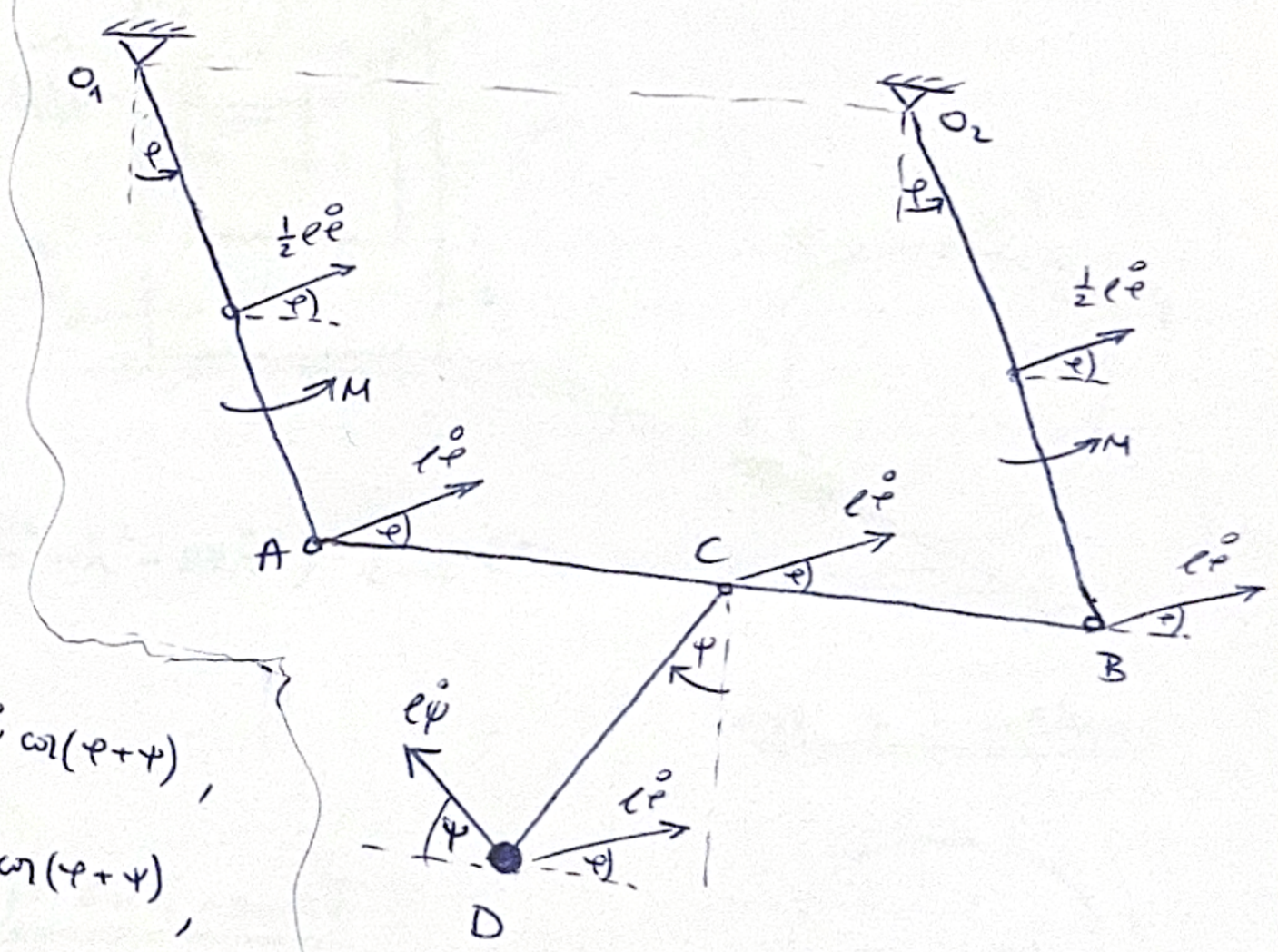
$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = me^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi+\psi), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 6me^2\dot{\varphi} - me^2\dot{\psi}\cos(\varphi+\psi),$$

$$\frac{\partial T}{\partial \psi} = me^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin(\varphi+\psi), \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = 2me^2\dot{\psi} - me^2\dot{\varphi}\cos(\varphi+\psi),$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 6me^2\ddot{\varphi} - me^2\ddot{\psi}\cos(\varphi+\psi) + me^2\dot{\psi}\sin(\varphi+\psi)\cdot(\dot{\varphi}+\dot{\psi})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}}\right) = 2me^2\ddot{\psi} - me^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\psi) + me^2\dot{\varphi}\sin(\varphi+\psi)\cdot(\dot{\varphi}+\dot{\psi})$$

$$\delta A = M\delta\varphi + M\delta\varphi - (3mg\cdot\tfrac{1}{2}e\delta\varphi)\cdot 2 - 2mge\delta\varphi -$$
$$- 2mg(e\delta\varphi\sin\varphi + e\delta\psi\sin\psi) =$$
$$\delta A = 2M\delta\varphi - 3mge\delta\varphi - 2mge\delta\varphi - 2mge\sin\varphi\delta\varphi - 2mge\sin\psi\delta\psi$$



$$\dot{x}_D = e\dot{\varphi}\cos\varphi - e\dot{\psi}\cos\psi$$
$$\dot{y}_D = e\dot{\varphi}\sin\varphi + e\dot{\psi}\sin\psi$$
$$v_D^2 = e^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi - 2e^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos\varphi\cos\psi + e^2\dot{\psi}^2\cos^2\psi +$$
$$+ e^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi + 2e^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\sin\varphi\sin\psi + e^2\dot{\psi}^2\sin^2\psi =$$
$$v_D^2 = e^2\dot{\varphi}^2 + e^2\dot{\psi}^2 - 2e^2\dot{\varphi}\dot{\psi}(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) =$$
$$v_D^2 = e^2\dot{\varphi}^2 + e^2\dot{\psi} - 2e^2\dot{\varphi}\dot{\psi}\cos(\varphi+\psi)$$

$$6me^2\ddot{\varphi} - me^2\ddot{\psi}\cos(\varphi+\psi) + me^2\dot{\psi}\sin(\varphi+\psi)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}-\dot{\varphi}) = 2M - 5mge - 2mge\sin\varphi$$
$$2me^2\ddot{\psi} - me^2\ddot{\varphi}\cos(\varphi+\psi) + me^2\dot{\varphi}\sin(\varphi+\psi)(\dot{\varphi}+\dot{\psi}-\ddot{\psi}) = -2mge\sin\psi$$

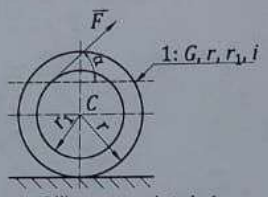
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
20.1.2023.

Mehanika 3

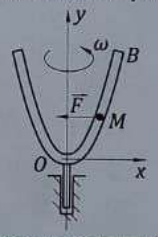
Januarski ispitni rok 2023. – grupa 1

1. Kalem težine G i poluprečnika r, dovodi se u kretanje preko lakog neistegljivog konca koji se odmotava sa njega, i koji zaklapa ugao α sa horizontalom za sve vreme kretanja. Na konac deluje konstantna sila $\vec{F}$. Odrediti brzinu centra inercije C kalema, kada se on pomeri za dužinu s. Poluprečnik inercije kalema, za osu koja prolazi kroz centar inercije C i upravna je na ravan materijalne simetrije, jednak je i. Kalem se kotrlja bez klizanja a krak otpora kotrljanju je ε. Poluprečnik dela kalema na koji je namotan konac iznosi r_1. U početnom trenutku sistem se nalazio u miru.



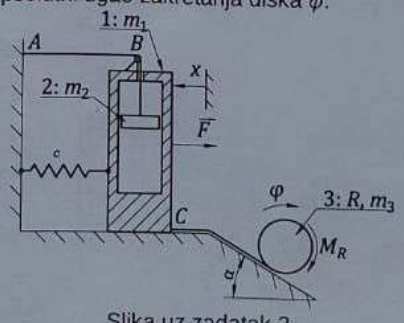
Slika uz zadatak 1.

2. Glatka tanka cev savijena u oblik parabole $y = \frac{\omega^2}{g}x^2$, obrće se oko vertikalne ose Oy ugaonom brzinom konstantnog intenziteta ω. U cevi kretanja započinje kuglica zanemarljivih dimenzija i mase m iz tačke $M_0 = O$. Na kuglicu za sve vreme kretanje deluje horizontalna sila $\vec{F}$, smera kao na slici, intenziteta proporcionalnog normalnom rastojanju kuglice od ose Oy sa koeficijentom proporcionalnosti $b = m\frac{\omega^2}{2}$. Odrediti najmanji intenzitet početne brzine v_0 koju treba saopštiti kuglici kako bi ona došla u položaj $B(\frac{g}{\omega^2}, y_B)$. Odrediti intenzitet ukupne normalne reakcije cevi u tački B za određenu početnu brzinu v_0. Koordinatni sistem Oxy vezan je za cev.



Slika uz zadatak 2.

3. Sistem se sastoji od prizme 1 mase $m_1 = 2m$, vezane oprugom krutosti c za nepokretni zid, tega 2 mase $m_2 = m$ koji može da klizi u glatkom vertikalnom kanalu prizme 1 i diska 3 poluprečnika R i mase $m_3 = 2m$. Za teg je zakačeno lako neistegljivo uže koje je prebačeno preko lakog kotura u tački B i vezano za nepokretni zid u tački A. Pravac AB je horizontalan. U položaju $x = 0$ opruga je bila nenapregnuta. U tački C prizme 1 koja može da klizi bez trenja po glatkoj horizontalnoj podlozi, na zanemarljivom rastojanju od podloge, jednim krajem vezano je lako neistegljivo uže. Uže je drugim krajem namotano na disk 3 i bez trenja može da klizi niz strmu ravan nagibnog ugla α. Ako na prizmu 1 deluje horizontalna sila intenziteta F, smera kao na slici, a na disk 3 spreg sila momenta M_R, smera kao na slici, odrediti diferencijalne jednačine kretanja u odnosu na horizontalnu koordinatu x i apsolutni ugao zakretanja diska φ.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

januar 23

③ 1: $2m$

2: m

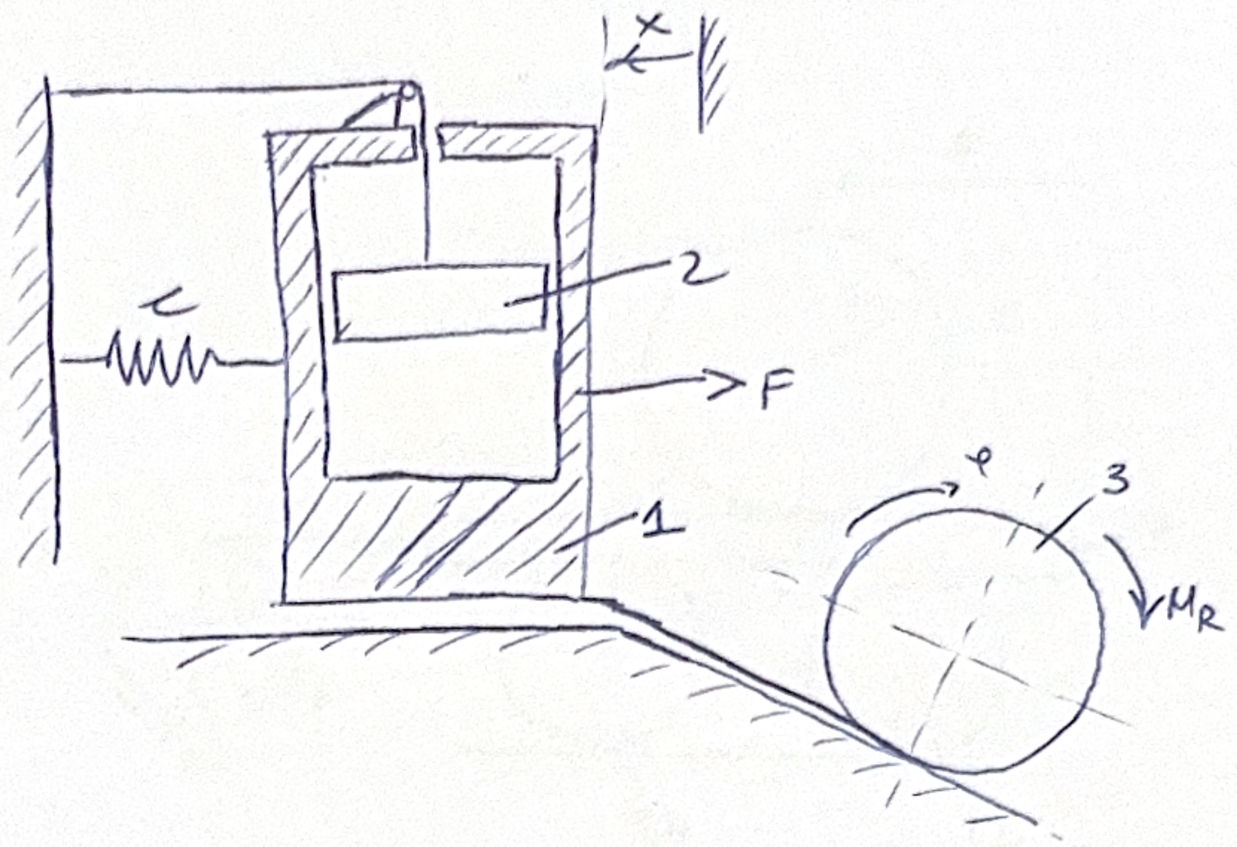
3: $2m$, R (disk)

Opruga: c, za $x=0$ je nenapregnuta

sila F

moment M_R

dif. j-ne kr. za x, φ ?



telo 2 - ako se horizontalni deo užeta skrati za dx, vertikalni se produži za dx, zato je:

$\dot{y}_2 = -\dot{x}$

$v_2^2 = \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2 = \dot{x}^2 + \dot{x}^2 = 2\dot{x}^2$

$T = T_1 + T_2 + T_3$

$T_1 = \frac{1}{2} 2m\dot{x}^2 + 0 = m\dot{x}^2$

$T_2 = \frac{1}{2} m 2\dot{x}^2 + 0 = m\dot{x}^2$

$T_3 = \frac{1}{2} 2m (R\dot{\varphi} - \dot{x})^2 + \frac{1}{2}\frac{2mR^2}{2}\dot{\varphi}^2 = m(R^2\dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2 - 2R\dot{\varphi}\dot{x}) + \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 =$

$= m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x}$

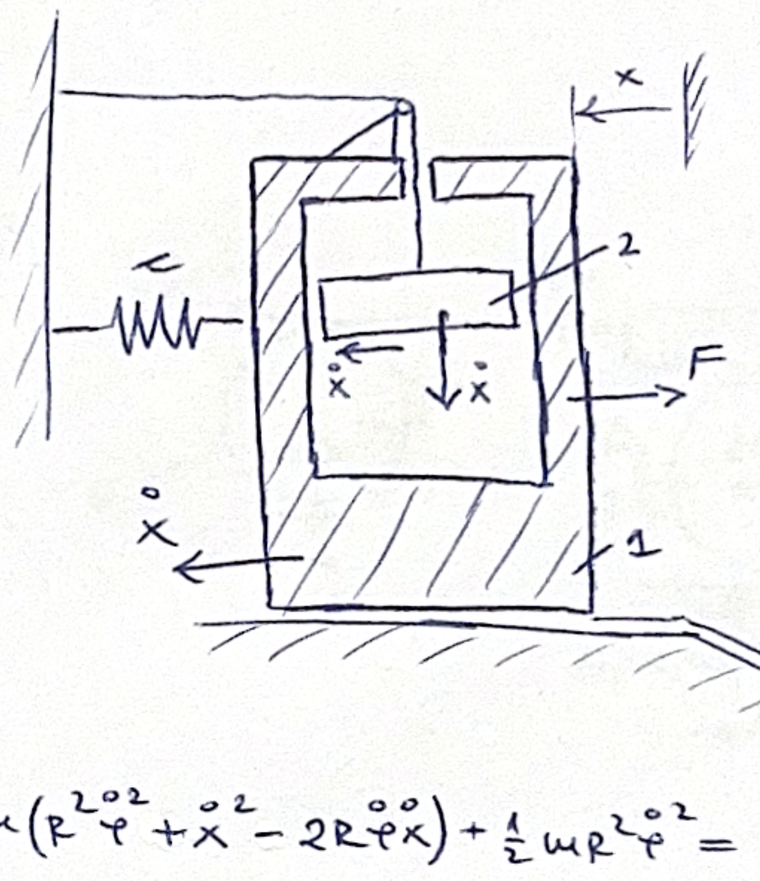
$T = 3m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 - 2mR\dot{\varphi}\dot{x}$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 6m\dot{x} - 2mR\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 6m\ddot{x} - 2mR\ddot{\varphi}$

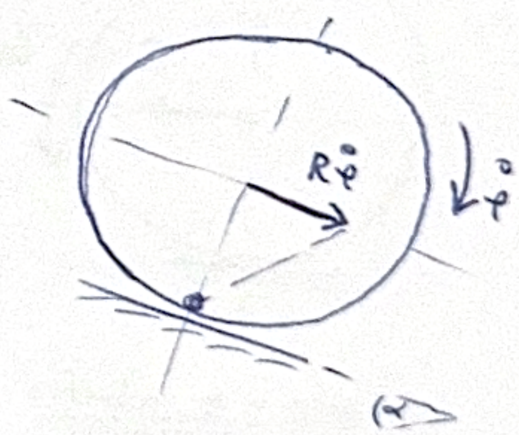
$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = 3mR^2\dot{\varphi} - 2mR\dot{x}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 3mR^2\ddot{\varphi} - 2mR\ddot{x}$

$\delta A = -cx\delta x + M_R\delta\varphi - F\delta x + mg\delta x - 2mg(R\delta\varphi - \delta x)\sin\alpha$

$$\boxed{\begin{aligned} 6m\ddot{x} - 2mR\ddot{\varphi} &= -cx - F + 2mg + 2mg\sin\alpha \\ 3mR^2\ddot{\varphi} - 2mR\ddot{x} &= M_R - 2mgR\sin\alpha \end{aligned}}$$



disk 3 - relativno



disk 3 - apsolutno

$v_c = R\dot{\varphi} - \dot{x}$

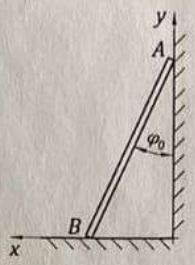
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
10.2.2023.

Mehanika 3

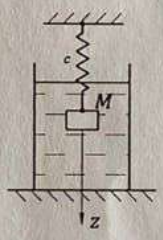
Februarski ispitni rok 2023. – grupa 2

1. Homogeni štap AB, dužine $\overline{AB} = 2l$, nalazi se u vertikalnoj ravni i oslanja se krajem A na glatki vertikalni zid, a krajem B o glatku horizontalnu ravan. U početnom trenutku štap miruje i sa vertikalnim zidom zaklapa ugao φ_0 i započinje kretanje pod dejstvom svoje težine. Pri kojoj vrednosti ugla φ će se kraj A štapa odvojiti od vertikalnog zida?



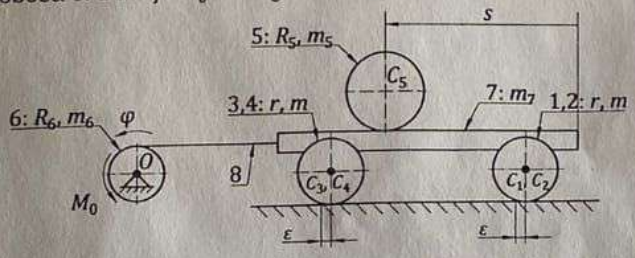
Slika uz zadatak 1.

2. Teret M, mase m i zanemarljivih dimenzija, okačen je o kraj opruge krutosti c i kreće se u otpornoj sredini u vertikalnoj ravni. Intenzitet sile otpora kretanju proporcionalan je prvom stepenu intenziteta brzine: $F_w = bv$, gde je b pozitivna realna konstanta. Odrediti konačnu jednačinu kretanja tereta $z(t)$, ako je u početnom trenutku teret bio pomeren iz položaja statičke ravnoteže vertikalno naniže za dužinu a i pušten da osciluje bez početne brzine. Dato je $m = 10\,\text{gr}$, $c = 10\,\text{gr/cm}$, $b = 1{,}6\,\text{gr}\cdot\text{s/cm}$, $a = 4\,\text{cm}$.



Slika uz zadatak 2.

3. Kolica (slika 3) se dovode u kretanje pomoću lakog, glatkog, neistegljivog užeta 8 namotanog na doboš 6, mase $m_6 = 2m$ i poluprečnika $R_6 = r/2$, na koji deluje spreg sila momenta M_0. Na platformi (7) kolica nalazi se homogeni cilindar 5, mase $m_5 = 5m$ i poluprečnika $R_5 = 3r/2$, koji se pri kretanju kolica kotrlja se bez klizanja po platformi. Točkovi su vezani za kolica preko osovina u svojim središtima. Masa **svakog od četiri točka** je m, a poluprečnik r. Masa platforme je $m_7 = 4m$. Odrediti apsolutno ubrzanje središta C_5 valjka i ugaono ubrzanje doboša 6. Krak trenja kotrljanja točkova kolica po podlozi iznosi ε (**za svaki od 4 točka**). Otpor kotrljanju valjka 5 po platformi zanemariti. Točkovi kolica kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj nepokretnoj podlozi. Za generalisane koordinate uzeti relativan položaj centra C_5 valjka 5 u odnosu na kraj platforme s i ugao obrtanja φ doboša 6. Dato je $M_0 = 3mgr$ i $\varepsilon = 2r/13$.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

februar 23

③ 6: $2m$, $\frac{r}{2}$ (disk)

spreg $M_0 = 3mgr$

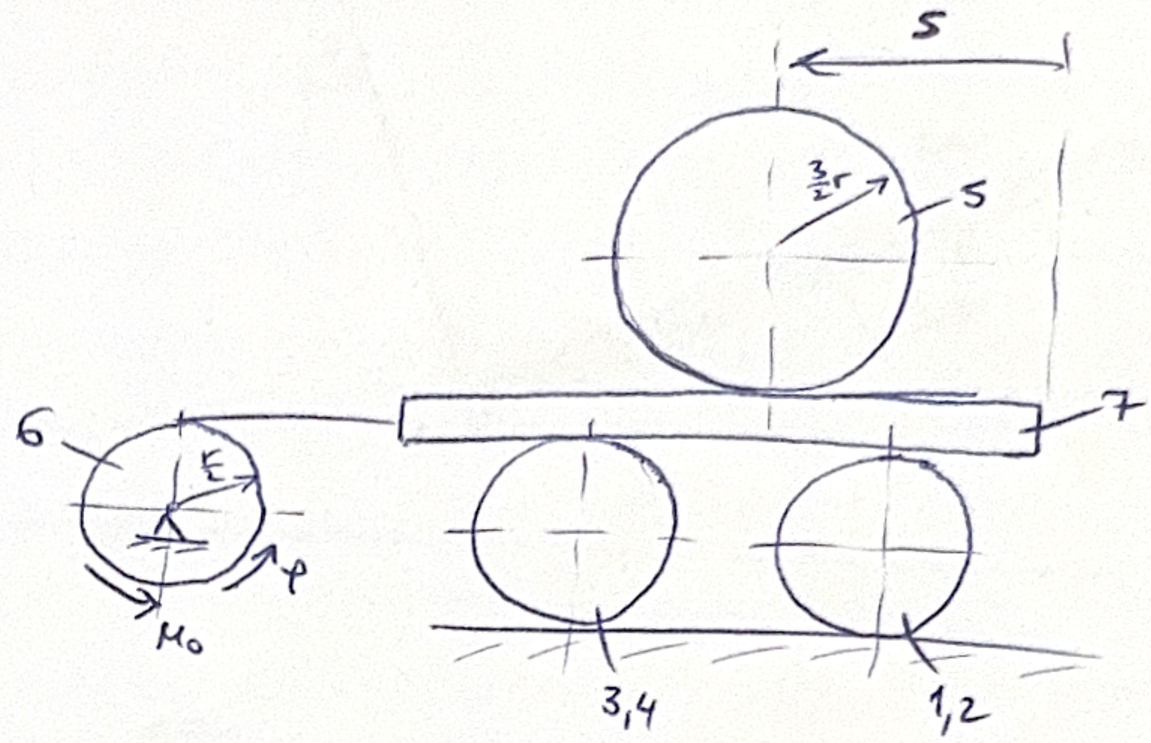
5: $5m$, $\frac{3}{2}r$ (cilinder)

1,2,3,4: m, r

7: $4m$

$\ddot{s} = ?$, $\ddot{\varphi} = ?$

krak treaja kotrljanja
tockava 1,2,3,4 je: $\varepsilon = \frac{2}{13}r$



$T = 4 \cdot T_1 + T_5 + T_6 + T_7$

$T_1 = \frac{1}{2}m\left(\frac{1}{4}r\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{mr^2}{2}\left(\frac{1}{4}\dot{\varphi}\right)^2 = \frac{3}{64}mr^2\dot{\varphi}^2$

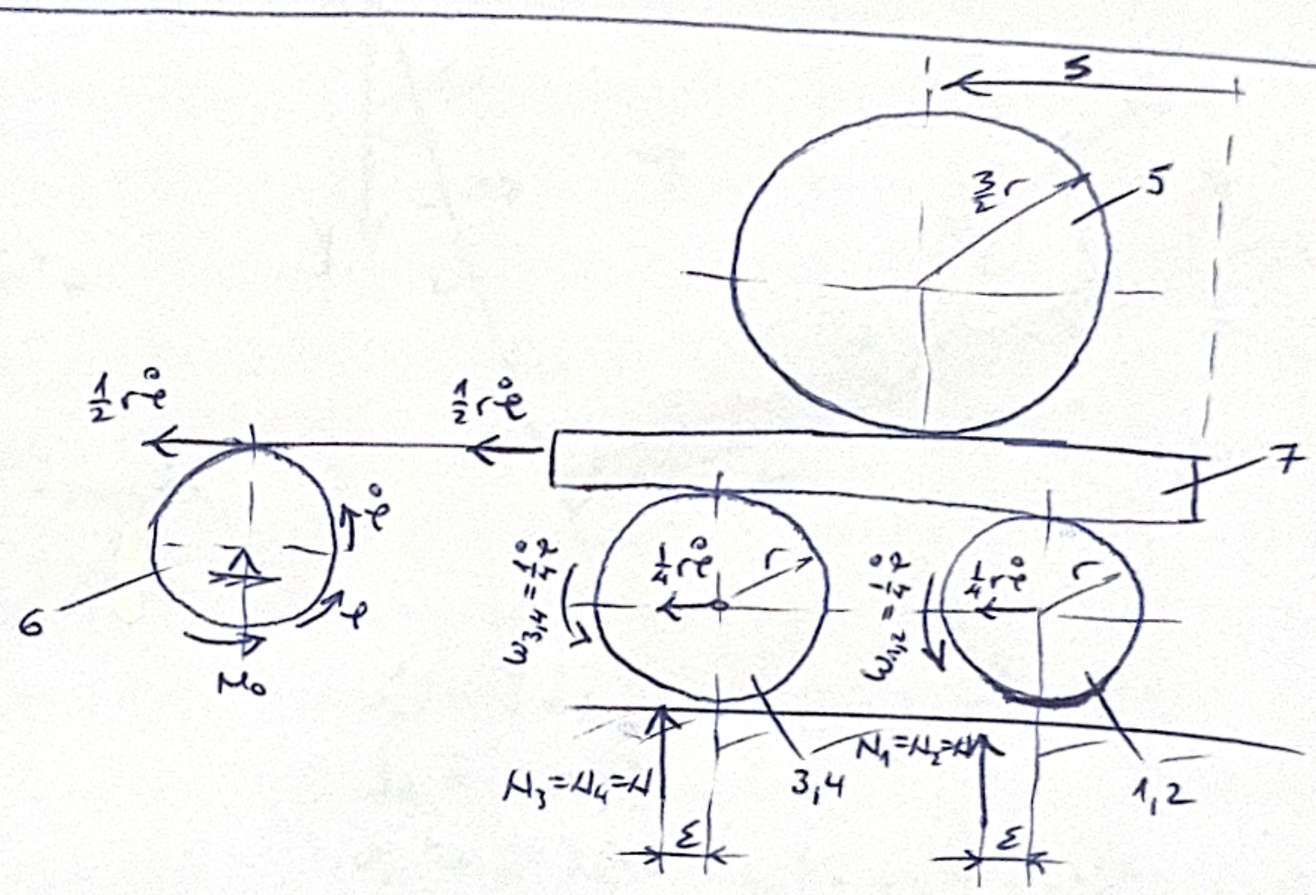
$T_5 = \frac{1}{2}5m\left(\dot{s} + \frac{1}{2}r\dot{\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}5m\left(\frac{3}{2}r\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\frac{\dot{s}}{r}\right)^2 =$

$= \frac{5}{2}m\left(\dot{s}^2 + r\dot{\varphi}\dot{s} + \frac{1}{4}r^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{5}{2}m\dot{s}^2 =$

$= 5m\dot{s}^2 + \frac{5}{8}mr^2\dot{\varphi}^2 + \frac{5}{2}mr\dot{\varphi}\dot{s}$

$T_6 = 0 + \frac{1}{2}2m\left(\frac{r}{2}\right)^2\dot{\varphi}^2 = \frac{1}{4}mr^2\dot{\varphi}^2$

$T_7 = \frac{1}{2}4m\left(\frac{1}{2}r\dot{\varphi}\right)^2 + 0 = \frac{1}{2}mr^2\dot{\varphi}^2$



$T = \frac{25}{16}mr^2\dot{\varphi}^2 + 5m\dot{s}^2 + \frac{5}{2}mr\dot{\varphi}\dot{s}$

$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = 10m\dot{s} + \frac{5}{2}mr\dot{\varphi}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = 10m\ddot{s} + \frac{5}{2}mr\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$, $\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{25}{8}mr^2\dot{\varphi} + \frac{5}{2}mr\dot{s}$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{25}{8}mr^2\ddot{\varphi} + \frac{5}{2}mr\ddot{s}$

$\delta A = M_0\delta\varphi - N \cdot \varepsilon \cdot \frac{1}{4}\delta\varphi = 3mgr\delta\varphi - \frac{13}{4}mg \cdot \frac{2}{13}r \cdot \frac{1}{4}\delta\varphi = mgr\delta\varphi$

$10m\ddot{s} + \frac{5}{2}mr\ddot{\varphi} = 0 \quad \rightarrow \quad m\ddot{s} = -\frac{1}{4}mr\ddot{\varphi}$

$\frac{25}{8}mr^2\ddot{\varphi} + \frac{5}{2}mr\ddot{s} = mgr$

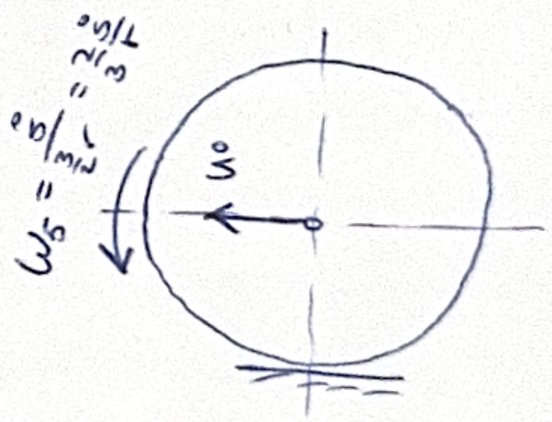
$\frac{25}{8}mr^2\ddot{\varphi} + \frac{5}{2}r\left(-\frac{1}{4}mr\ddot{\varphi}\right) = mgr$

$4mr^2\ddot{\varphi}\left(\frac{25}{8} - \frac{5}{4}\right) = 4mgr$

$\ddot{\varphi} \cdot \frac{15}{8}r = g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{\varphi} = \frac{8}{15}\frac{g}{r}}$

$\ddot{s} = -\frac{1}{4}r \cdot \frac{8}{15}\frac{g}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\ddot{s} = -\frac{2}{15}g}$

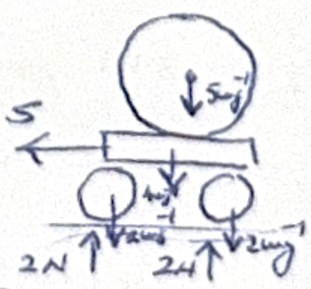
cilinder 5 - relativno



cilinder 5 - apsolutno

$v_c = \dot{s} + \frac{1}{2}r\dot{\varphi}$

izdvojimo podsistem (da nastane $\vec{N}$)



$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$,

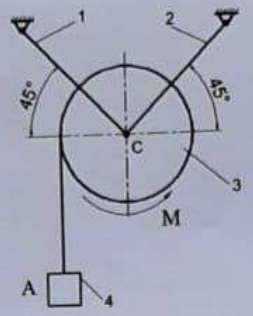
$y: \quad 0 = 13mg - 4N$

$N = \frac{13}{4}mg$

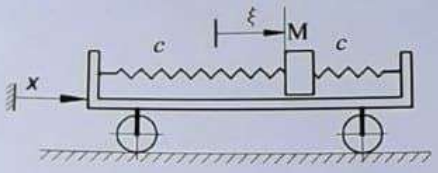
Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Mehanika 3, Oktobar 2, 2021.

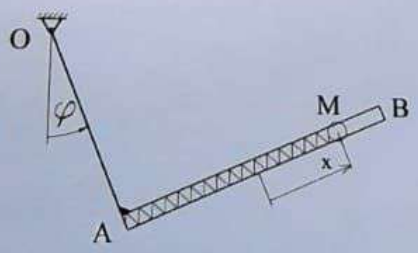
1. Na slici je prikazan sistem koji čine laki štapovi 1 i 2, disk 3 (poluprečnika R i mase m) i teg 4 mase 2m. Sistem se nalazi u vertikalnoj ravni u polju sile Zemljine teže. Na disk je namotano lako uže kojim se podiže teg 4 usled dejstva momenta sprega sila intenziteta M=4mgR, kao na slici. Odrediti ugaono ubrzanje diska i sile u štapovima.



2. Teret M, mase m=1 koji je oprugama krutosti c=1 vezan za zid pokretnih kolica, može da se kreće po podu kolica. U položaju $\xi=0$ opruge su nenapregnute. Točkovi kolica kotrljaju se bez klizanja po horizontalnoj podlozi. Kućište kolica kreće se po zakonu $x=\sin(t)$. U početnom trenutktu sistem je mirovao i opruge su bile nenapregnute. Odrediti konačnu jednačinu relativnog kretanja tereta M.



3. Pravougli ugaonik OAB ($AB=2OA=2L$, $m_{AB}=m$, masu štapa OA zanemariti) može da se obrće oko horizontalne ose Oz tako da je položaj u odnosu na vertikalu određen uglom φ, kao na slici. Duž štapa može da klizi prten M, mase m). Prsten je vezan oprugom krutosti c, čiji je drugi kraj vezan za tačku A. Položaj prstena u odnosu na štap određen je relativnom koordinatom x. yopruga je nenapregnuta u položaju x=0 kada je prsten na sredini štapa. Odrediti diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema za zadate generalisane coordinate.



oktobar 2 21

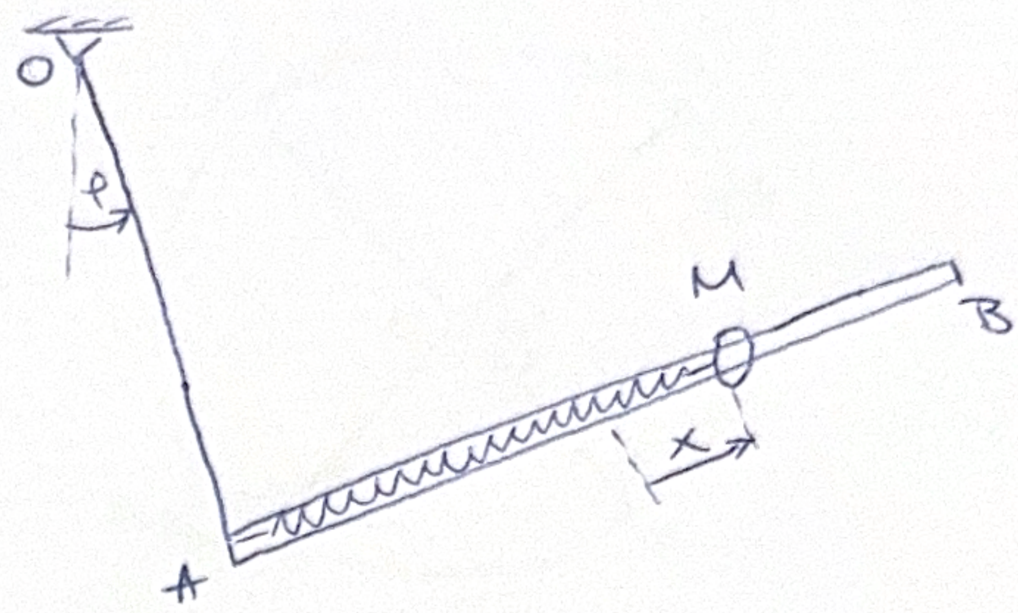
③ OA: $\emptyset$, L

AB: m, $2L$

M: m

opruga: c, za $x=0$ je nenapregnuta
(tada je prsten na sredini štapa)

dif. j-ne kretanja za x, φ?



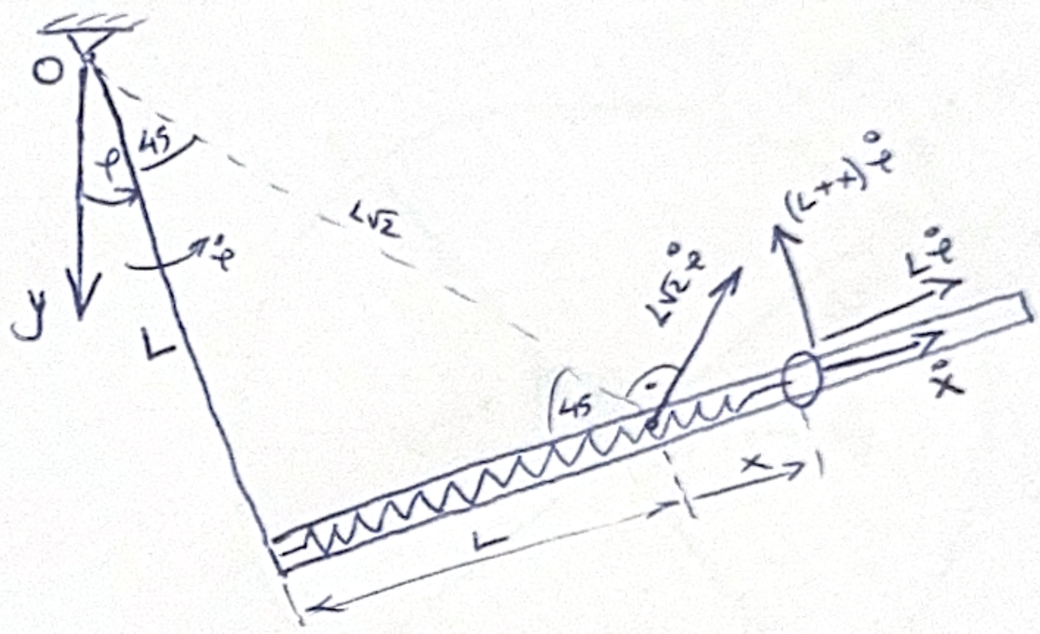
$T = T_{AB} + T_M$

$T_{AB} = \frac{1}{2} m (L\sqrt{2}\,\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} m (2L)^2 \dot{\varphi}^2 =$

$= mL^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{6} mL^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{7}{6} mL^2 \dot{\varphi}^2$

$T_M = \frac{1}{2} m v_M^2 + 0 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mL^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m x^2 \dot{\varphi}^2 +$
$+ mL x \dot{\varphi}^2 + 2L\dot{\varphi}\dot{x}$

$T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{13}{6} mL^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} m x^2 \dot{\varphi}^2 + mLx\dot{\varphi}^2 + 2mL\dot{\varphi}\dot{x}$



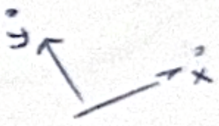
$\frac{\partial T}{\partial x} = m x \dot{\varphi}^2 + mL\dot{\varphi}^2$, $\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + 2mL\dot{\varphi}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + 2mL\ddot{\varphi}$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{13}{3} mL^2\dot{\varphi} + mx^2\dot{\varphi} + 2mLx\dot{\varphi} + 2mL\dot{x}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{13}{3} mL^2\ddot{\varphi} + mx^2\ddot{\varphi} + 2mL\dot{x}\dot{\varphi} + 2mLx\ddot{\varphi} + 2mL\ddot{x}$



$\dot{x}_M = \dot{x} + L\dot{\varphi}$

$\dot{y}_M = (L+x)\dot{\varphi}$

$v_M^2 = \dot{x}^2 + L^2\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{\varphi}\dot{x} + L^2\dot{\varphi}^2 + x^2\dot{\varphi}^2 + 2Lx\dot{\varphi}^2$

$v_M^2 = \dot{x}^2 + 2L\dot{\varphi}^2 + x^2\dot{\varphi}^2 + 2Lx\dot{\varphi}^2 + 2L\dot{\varphi}\dot{x}$

$\delta A = -cx\,\delta x + mg\,\delta y_C + mg\,\delta y_M$

$y_C = L\cos\varphi - L\sin\varphi \;\rightarrow\; \frac{\partial y_C}{\partial t} = -L\dot{\varphi}\sin\varphi - L\dot{\varphi}\cos\varphi$

$y_M = L\cos\varphi - (L+x)\sin\varphi \;\rightarrow\; \frac{\partial y_M}{\partial t} = -L\dot{\varphi}\sin\varphi - \dot{x}\sin\varphi - (L+x)\dot{\varphi}\cos\varphi$

$\delta A = -cx\,\delta x + mg(-L\delta\varphi\sin\varphi - L\delta\varphi\cos\varphi) + mg(-L\delta\varphi\sin\varphi - \delta x\sin\varphi - (L+x)\delta\varphi\cos\varphi) =$

$\delta A = -cx\,\delta x - 2mgL\sin\varphi\,\delta\varphi - 2mgL\cos\varphi\,\delta\varphi - mgx\cos\varphi\,\delta\varphi - mg\sin\varphi\,\delta x$

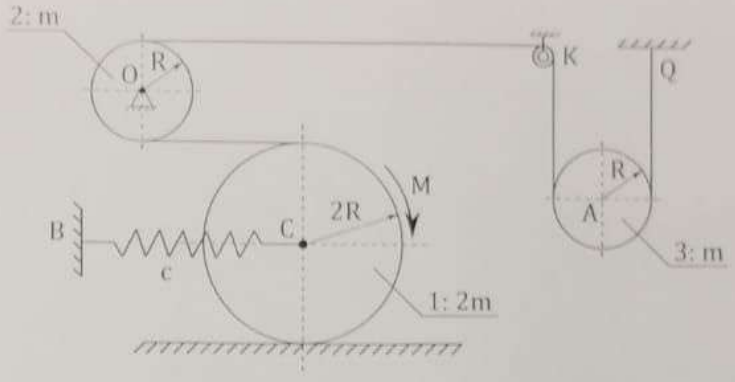
$$m\ddot{x} + 2mL\ddot{\varphi} - mx\dot{\varphi}^2 - mL\dot{\varphi}^2 = -cx - mg\sin\varphi$$

$$\frac{13}{3} mL^2\ddot{\varphi} + mx^2\ddot{\varphi} + 2mL\dot{x}\dot{\varphi} + 2mLx\ddot{\varphi} + 2mL\ddot{x} = -2mgL\sin\varphi - 2mgL\cos\varphi - mgx\cos\varphi$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com

Механика 3, 03.06.2022. група 1

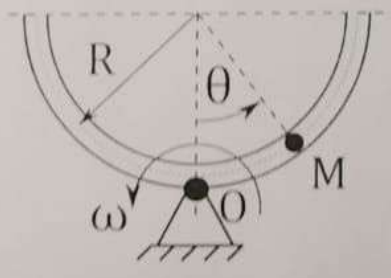
1. Диск 1 полупречника $2R$ и масе $2m$ може да се котрља без клизања по непокретној подлози, под дејством спрега сила интензитета момента спрега $M = 4mgR$. За центар диска C је везана опруга крутости $c = \frac{mg}{4R}$, чији је други крај везан за непокретну тачку B. На диск 1 је намотано уже, чији други крај је пребачен преко котура (диска 2) полупречника R и масе m, а затим преко котура K занемарљиве масе и димензија, и коначно пребачено преко котура (диска 3) полупречника R и масе m и везано за непокретну тачку Q. У почетном тренутку систем је мировао у почетном положају приказаном на Слици 1, а опруга је била ненапрегнута. Одредити угаону брзину диска 1 у тренутку када се диск 3 обрне за два пуна круга.



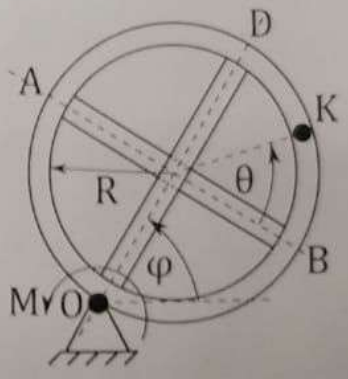
Слика 1

2. На Сл. 2 приказана је танка полукружна цев (полупречника кружнице R) која је везана непокретним ослонцем на оси симетрије цеви (у тачки O) и може да се обрће око вертикалне осе Oz константном угаоном брзином ω. Кроз цев може да се креће тачка M масе m, која се у почетном тренутку налазила у тачки O и имала почетну релативну брзину интензитета $V_{r0} = \sqrt{2}R\omega$. Одредити вектор укупне реакције цеви на тачку M за произвољан положај тачке одређен углом θ.

3. Танки хомогени прстен полупречника R и масе m може да се обрће око непокретне вертикалне осе Oz под дејством спрега сила интензитета момента спрега M. Дуж осе симетрије прстена налазе се два штапа OD и AB, једнаких дужина $2R$ и маса $2m$, који су својим крајевима круто везани за прстен. По прстену може да се креће без трења тачка K масе $4m$, као што је приказано на Слици 3. Одредити диференцијалне једначине кретања система. За генералисане координате усвојити $q_1 = \theta$ и $q_2 = \varphi$.



Слика 2



Слика 3

jun 22

③ prsten: m, R

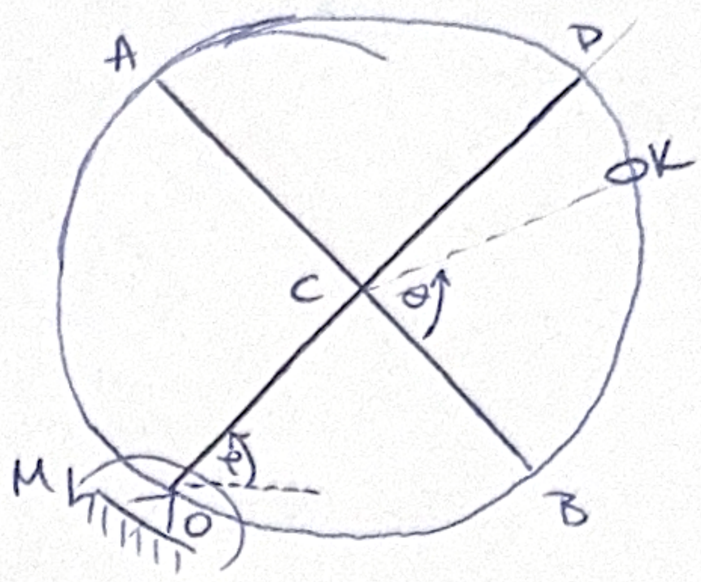
moment M

OD: $2m, 2R$

AB: $2m, 2R$

K: $4m$

df. j-ne za θ, φ ?



$$T = T_P + T_{OO} + T_{AB} + T_M$$

$$T_P = \frac{1}{2} m (R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 = m R^2 \dot{\varphi}^2$$

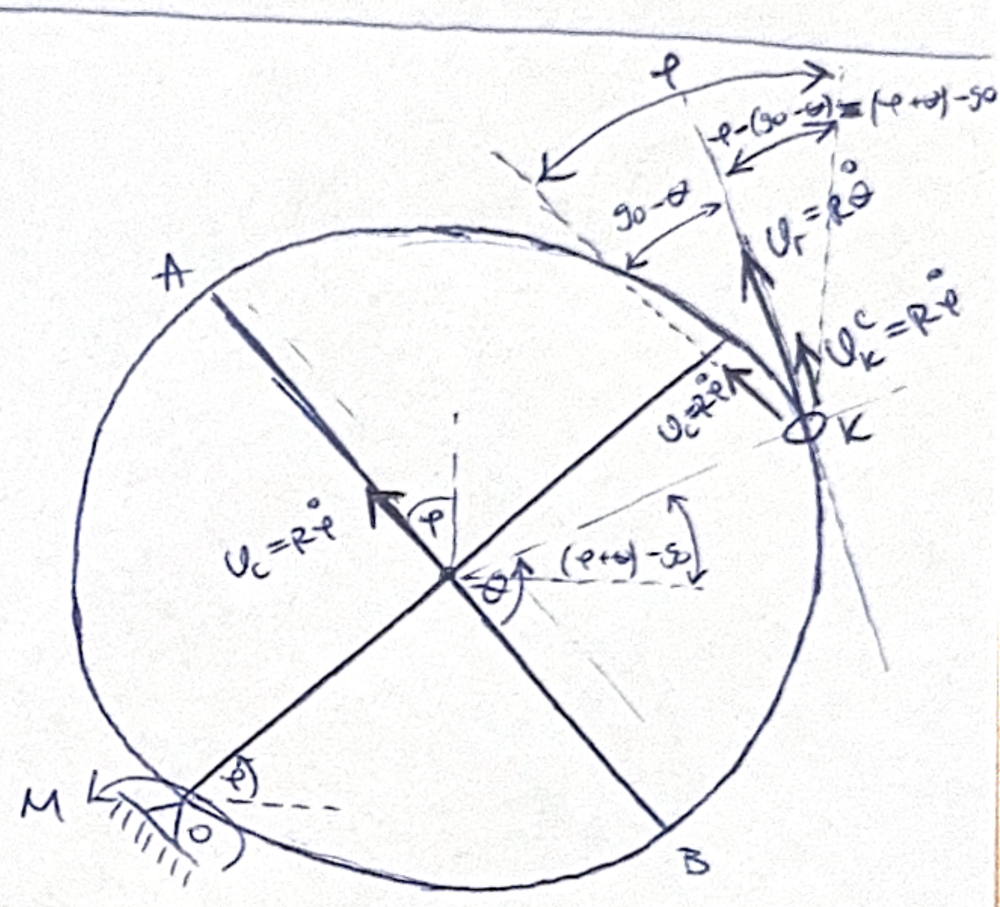
$$T_{OO} = T_{AB} = \frac{1}{2} 2m (R\dot{\varphi})^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{12} 2m (2R)^2 \dot{\varphi}^2 =$$

$$= m R^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2 = \frac{4}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_M = \frac{1}{2} 4m v_M^2 + 0 = 4m R^2 \dot{\varphi}^2 + 2m R^2 \dot{\theta}^2 + 4m R^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} +$$

$$+ 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \sin\theta + 4m R^2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin\theta$$

$$T = \frac{23}{3} m R^2 \dot{\varphi}^2 + 2m R^2 \dot{\theta}^2 + 4m R^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \sin\theta + 4m R^2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \sin\theta$$



$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 4m R^2 \dot{\varphi}^2 \cos\theta + 4m R^2 \dot{\theta}\dot{\varphi} \cos\theta \qquad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 4m R^2 \dot{\theta} + 4m R^2 \dot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\varphi} \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 4m R^2 \ddot{\theta} + 4m R^2 \ddot{\varphi} + 4m R^2 \ddot{\varphi} \sin\theta + 4m R^2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{46}{3} m R^2 \dot{\varphi} + 4m R^2 \dot{\theta} + 8m R^2 \dot{\varphi} \sin\theta + 4m R^2 \dot{\theta} \sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{46}{3} m R^2 \ddot{\varphi} + 4m R^2 \ddot{\theta} + 8m R^2 \ddot{\varphi} \sin\theta + 8m R^2 \dot{\varphi}\dot{\theta} \cos\theta + 4m R^2 \ddot{\theta} \sin\theta + 4m R^2 \dot{\theta}^2 \cos\theta$$

$$\dot{x}_K = R\dot{\varphi} + R\dot{\theta} + R\dot{\varphi}\cos(90-\theta) \rightarrow \sin\theta$$

$$\dot{y}_K = R\dot{\varphi}\sin(90-\theta) \rightarrow \cos\theta$$

$$v_K^2 = R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + R^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + 2R^2\dot{\varphi}\dot{\theta} +$$

$$+ 2R^2\dot{\varphi}^2\sin\theta + 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta + R^2\dot{\varphi}^2\cos^2\theta$$

$$v_K^2 = 2R^2\dot{\varphi}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R^2\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2R^2\dot{\varphi}^2\sin\theta +$$

$$+ 2R^2\ddot{\varphi}\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\delta A = M\delta\varphi - 5m g_c - 4m g_K$$

$$\frac{\partial y_c}{\partial t} = R\dot{\varphi}\cos\varphi$$

$$y_K = R\sin\varphi + R\sin((\varphi+\theta)-90) = R\sin\varphi - R\cos(\varphi+\theta) \rightarrow \frac{\partial y_K}{\partial t} = R\dot{\varphi}\cos\varphi + R(\dot{\varphi}+\dot{\theta})\sin(\varphi+\theta)$$

$$\delta A = M\delta\varphi - 5mR\cos\varphi\,\delta\varphi - 4mR\cos\varphi\,\delta\varphi - 4mR\sin(\varphi+\theta)\delta\varphi - 4mR\sin(\varphi+\theta)\delta\theta$$

$$\delta A = M\delta\varphi - 9mR\cos\varphi\,\delta\varphi - 4mR\sin(\varphi+\theta)\delta\varphi - 4mR\sin(\varphi+\theta)\delta\theta$$

$$4mR^2\ddot{\theta} + 4mR^2\ddot{\varphi} + 4mR^2\ddot{\varphi}\sin\theta - 4mR^2\dot{\varphi}^2\cos\theta = -4mR\sin(\varphi+\theta)$$

$$\frac{46}{3}mR^2\ddot{\varphi} + 4mR^2\ddot{\theta} + 8mR^2\ddot{\varphi}\sin\theta + 8mR^2\ddot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 4mR^2\ddot{\theta}\sin\theta + 4mR^2\dot{\theta}^2\cos\theta = M - 9mR\cos\varphi - 4mR\sin(\varphi+\theta)$$

Privatni časovi - www.mehanikazamasince.com