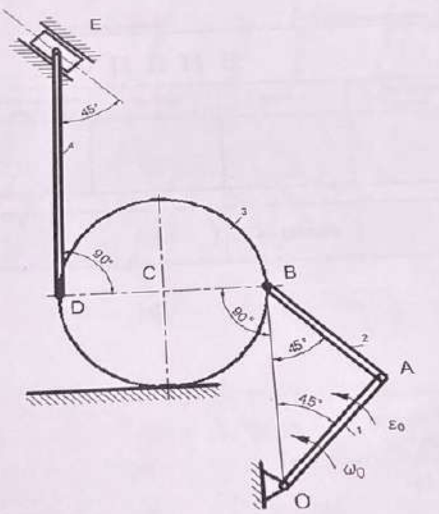
Mehanika 2, oktobar 2023.

G2

1. Tačka M kreće se saglasno konačnim jednačinama kretanja zadatim u odnosu na Dekartov desni koordinatni sistem $y_M = 2\sqrt{2}\cos(2t) + \sin(2t)$ i $x_M = 2\sqrt{2}\sin(2t) - \cos(2t)$. Odrediti:
   f) jednačinu linije putanje tačke i skicirati liniju putanje;
   g) intenzitet brzine tačke;
   h) intenzitet ubrzanja tačke;
   i) jednačinu hodografa vektora brzine tačke i skicirati ga;
   j) poluprečnik krivine trajektorije tačke.

2. Mehanizam prikazan na slici sastoji se od štapa 1, štapa 2, diska 3, štapa 4 klizača E. Disk 3, poluprečnika R, može da se kotrlja bez klizanja ravnoj nepokretnoj podlozi, kao na slici. Prilikom kretanja ne dolazi do odvajanja diska od podloge. Veze u tačkama O, A, B, D i E su zglobne. Ako je $\omega_{OA} = \omega_0$ i $\varepsilon_{OA} = \varepsilon_0 = \omega_0^2$ odrediti brzinu i ubrzanje klizača E u položaju prikazanom na slici. Date su sledeće dimenzije: $OA = R\sqrt{2}$, $AB = R\sqrt{2}$ i $DE = 2R$.



Slika uz zadatak 2

3. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u polju sile Zemljine teže po glatkoj nepokretnoj ravni čija je jednačina u odnosu na desni Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxyz kod koga je osa Oz orijentisana vertikalno naviše data sa x+3y+2z=12. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(2,2,2)$ i imala je početnu brzinu $\vec{v_0} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

oktobar 2023.

(3) $x+3y+2z=12 \Rightarrow x+3y+2z-12=0$

$t_0=0$: $M_0(2,2,2)$

$\vec{v}_0 = 1\vec{i} - 1\vec{j} + 1\vec{k}$

j-ne kretanja?

$$\vec{N} = \lambda \cdot \operatorname{grad} f = \lambda \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \lambda (1,3,2) \quad , \quad \lambda = ?$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\left.\begin{aligned} x:&\quad m\ddot{x} = 0 + \lambda \\ y:&\quad m\ddot{y} = 0 + 3\lambda \\ z:&\quad m\ddot{z} = -mg + 2\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x} &= \frac{\lambda}{m} \\ \ddot{y} &= \frac{3\lambda}{m} \\ \ddot{z} &= \frac{2\lambda}{m} - g \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \ddot{x} + 3\ddot{y} + 2\ddot{z} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{m} + \frac{9\lambda}{m} + \frac{4\lambda}{m} - 2g = 0$$

$$\Rightarrow \frac{14\lambda}{m} = 2g \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{mg}{7}}$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{7}g \Rightarrow \dot{x} = \frac{1}{7}gt + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{14}gt^2 + t + 2$$

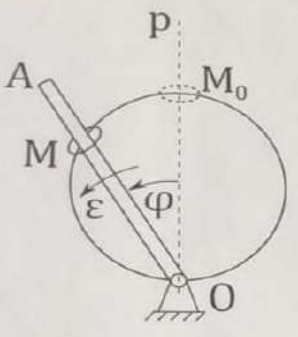
$$\ddot{y} = \frac{3}{7}g \Rightarrow \dot{y} = \frac{3}{7}gt - 1 \Rightarrow y = \frac{3}{14}gt^2 - t + 2$$

$$\ddot{z} = -\frac{5}{7}g \Rightarrow \dot{z} = -\frac{5}{7}gt + 1 \Rightarrow z = -\frac{5}{14}gt^2 + t + 2$$

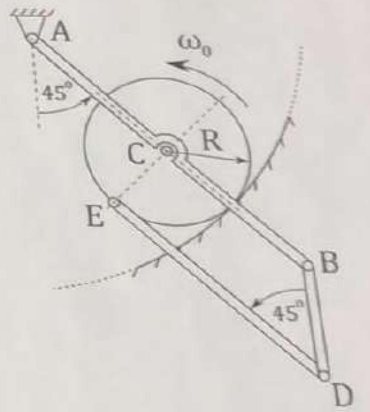
Механика 2, 29.6.2023. група 1

1. Полуга OA, дужине $\overline{OA} > 2R$, обрће се у назначеном смеру угаоним убрзањем $\varepsilon = k\cos\varphi$ (k =const.) и при томе доводи у кретање прстен M, који је истовремено намакнут на полугу OA и непокретни кружни обруч полупречника R. Полуга је у почетном тренутку мировала и поклапала се са правцем полуправе Op. Одредити брзину и убрзање тачке M у зависности од угла φ.

2. Диск полупречника R може да се котрља константном угаоном брзином ω_0 по унутрашњости цилиндричне површи са центром у тачки A. За центар диска (у тачки C) везан је штап AB, чији је крај A везан за непокретни ослонац, а крај B за штап BD. Други крај штапа BD је везан за клизач D. У тачки E диска везан је штап ED, чији је други крај такође везан за клизач D. Везе у тачкама A, B, C, D и E су зглобне. Одредити брзину и убрзање клизача D, као и угаону брзину и угаоно убрзање штапова ED и BD у положају приказаном на Сл. 2. Познато је да је $\overline{AC} = \overline{CB} = 2R$ и да су штапови AB и ED у приказаном положају паралелни.



Слика 1

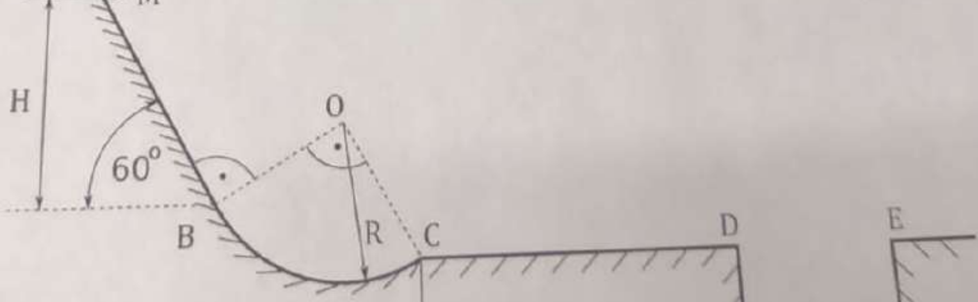


Слика 2

3. Куглица M, масе $m = 1$ kg и занемарљивих димензија, почиње кретање из стања мировања из тачке A и креће се по храпавој стрмој равни ($\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$) нагнутој под углом од 60° према хоризонталној оси. У тачки B куглица напушта стрму раван и наставља да се креће по глатком кружном луку полупречника $R = \sqrt{3}$ m са центром у тачки O и централним углом од 90°. У тачки C куглица напушта кружни лук и креће се слободно. Познато је да је стрма раван AB тангентна на кружни лук $\widehat{BC}$. Одредити:

.) нормалну реакцију везе у произвољном положају, при кретању по кружном луку, и

) граничне вредности висинске разлике H између тачака A и B, како би куглица при слободном кретању пала кроз отвор између тачака D и E.



Слика 3

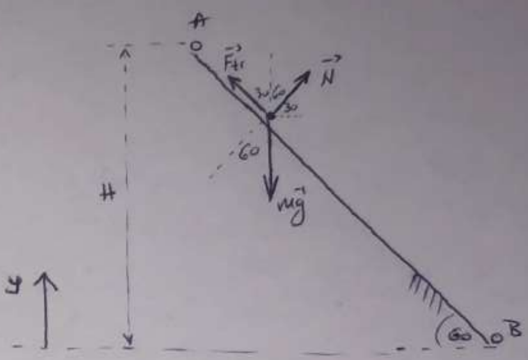
jul 2023

(3.) $m = 1\ kg$, $\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$ - strma ravan, $R = \sqrt{3}\ m$, t_0: stanje mirovanja

1) N u f-ji položaja po kružnom luku

2) H_{min} i H_{max} da bi kuglica upala između D i E

Deonica AB



$$\boxed{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{tr} + \vec{N}}$$

t: $m\ddot{s} = mg\sin 60 - F_{tr} + 0$

$m\ddot{s} = mg\frac{\sqrt{3}}{2} - \mu \cdot N$

n: $m\overset{0}{a_n} = -mg\cos 60 + N$

$$N = \frac{1}{2}mg$$

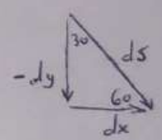
t: $m\ddot{s} = \frac{\sqrt{3}}{2}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}mg \quad /: m$

$\ddot{s} = \frac{\sqrt{3}}{4}g$

$\dot{s}\,d\dot{s} = \frac{\sqrt{3}}{4}g\,ds$

$\dot{s}\,d\dot{s} = -\frac{\sqrt{3}}{4}g\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}dy$

$\dot{s}\,d\dot{s} = -\frac{1}{2}g\,dy \quad / \int_A^B$



$dy = -ds\cos 30 = -\frac{\sqrt{3}}{2}ds$

$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{ds}$

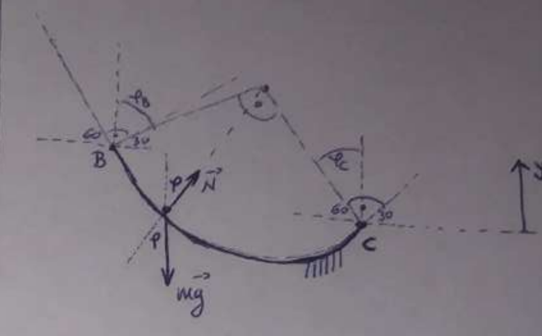
$\frac{1}{2}\dot{s}^2\Big|_{v_A=0}^{v_B} = -\frac{1}{2}g\,y\Big|_{y_A=H}^{y_B=0}$

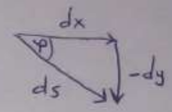
$v_B^2 = gH$

$$v_B = \sqrt{gH}$$

Deonica BC

$$\vec{ma} = m\vec{g} + \vec{N}$$





$$\sin\varphi = -\frac{dy}{ds}$$

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{ds}$$

t: $m\ddot{s} = mg\sin\varphi + 0 \quad /:m$

$$\ddot{s} = g\sin\varphi$$

$$\frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{\cancel{ds}} = -g\frac{dy}{\cancel{ds}} \quad / \int_B^C$$

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2\Big|_{v_B=\sqrt{gH}}^{v_C} = -gy\Big|_{y_B = R\sin 60 - R\sin 30}^{y_C=0}$$

$$\frac{1}{2}(v_C^2 - gH) = g\left(R\frac{\sqrt{3}}{2} - R\frac{1}{2}\right) \quad /\cdot 2$$

$$v_C^2 - gH = g\cdot 3 - g\cdot\sqrt{3}$$

$$v_C^2 = g(H + 3 - \sqrt{3})$$

$$\underline{\underline{v_C = \sqrt{g(H+3-\sqrt{3})}}}$$

n: $m a_n = -mg\cos\varphi + N$

$$N = m a_n + mg\cos\varphi \quad , \quad a_n = \frac{v^2}{R_K} \quad , \quad v = ?$$

t: $$\frac{1}{2}\dot{s}^2\Big|_{v_B=\sqrt{gH}}^{v} = -gy\Big|_{y_B = R\sin 60 - R\sin 30}^{y = R\sin 60 - R\cos\varphi}$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - gH) = g\cdot\left(\cancel{R\frac{\sqrt{3}}{2}} - R\cdot\frac{1}{2} - \cancel{R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} + R\cos\varphi\right) \quad /\cdot 2$$

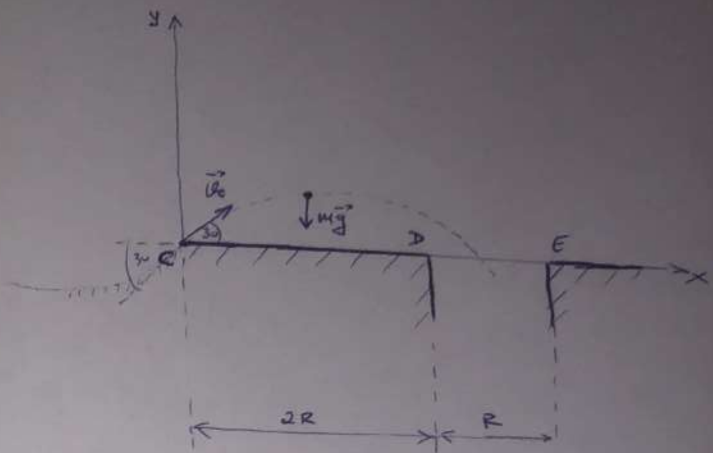
$$v^2 = gH + 2gR\cos\varphi - 2Rg$$

$$v^2 = gH + 2\sqrt{3}\,g\cos\varphi - 2\sqrt{3}\,g$$

n: $$N = 1\cdot\frac{gH + 2\sqrt{3}\,g\cos\varphi - 2\sqrt{3}\,g}{\sqrt{3}} + 1g\cos\varphi$$

$$\boxed{N = \frac{\sqrt{3}}{3}gH + 3g\cos\varphi - 2g}$$

Deonica slobodnog kretanja



$\underline{m\vec{a} = m\vec{g}}$

$x:\quad m\ddot{x} = 0 \qquad /:m$

$\ddot{x} = 0 \qquad /\int$

$\dot{x} = const. = C_1$

$\dot{x}(t_0=0) = C_1 = v_c \cos 30 = \frac{\sqrt{3}}{2} v_c$

$\dot{x} = \frac{\sqrt{3}}{2} v_c \qquad /\int$

$x = \frac{\sqrt{3}}{2} v_c t + C_2$

$x(t_0) = 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

$\underline{\underline{x = \frac{\sqrt{3}}{2} v_c t}}$

$y:\quad m\ddot{y} = -mg \qquad /:m$

$\ddot{y} = -g \qquad /\int$

$\dot{y} = -gt + C_1$

$\dot{y}(t_0=0) = 0 + C_1 = v_c \sin 30 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{1}{2} v_c$

$\dot{y} = -gt + \frac{1}{2} v_c \qquad /\int$

$y = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} v_c t + C_2$

$y(t_0=0) = 0 + 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$

$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2} g t^2 + \frac{1}{2} v_c t}}$

$y(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t\left(-\frac{1}{2} g t + \frac{1}{2} v_c\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0, \quad t_1 = \frac{v_c}{g}$

$x_{min}(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{c\,min} \cdot t_1 = 2R \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} v_{c\,min} \cdot \frac{v_{c\,min}}{g} = 2R \quad \Rightarrow \quad v_{c\,min} = \sqrt{\frac{4Rg}{\sqrt{3}}}$

$x_{max}(t_1) = \frac{\sqrt{3}}{2} v_{c\,max} \cdot t_1 = 3R \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} v_{c\,max} \frac{v_{c\,max}}{g} = 3R \quad \Rightarrow \quad v_{c\,max} = \sqrt{\frac{6Rg}{\sqrt{3}}}$

$v_{c\,min} = \sqrt{\frac{4Rg}{\sqrt{3}}} = \sqrt{g(H_{min} + 3 - \sqrt{3})} \quad \Rightarrow \quad \frac{4\cancel{R}}{\cancel{\sqrt{3}}} = H_{min} + 3 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow$

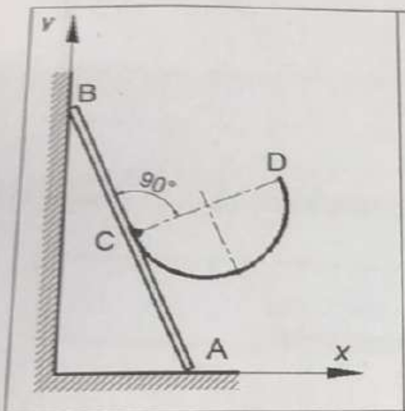
$v_{c\,max} = \sqrt{\frac{6Rg}{\sqrt{3}}} = \sqrt{g(H_{max} + 3 - \sqrt{3})} \quad \Rightarrow \quad \frac{6\cancel{R}}{\cancel{\sqrt{3}}} = H_{max} + 3 - \sqrt{3} \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} H_{min} &= 1 + \sqrt{3} \\ H_{max} &= 3 + \sqrt{3} \end{aligned}}$$

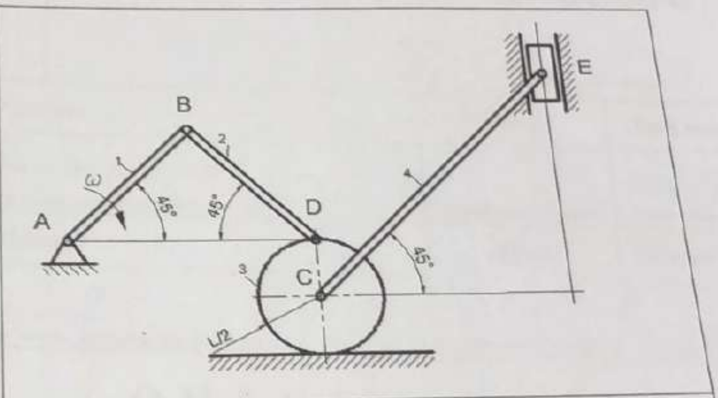
Mehanika 2, jun 2023.

G1

1. Tačka A rama prikazanog na slici kreće se po zakonu $x_A=2L\cos(2t)$. Ako je $AC=CB=CD=L$ [m] odrediti jednačinu linije putanje tačke D, intenzitete brzine i ubrzanja i poluprečnik krivine trajektorije tačke D u trenutku $t_1=\pi/4$ [s]. Prilikom kretanja tačke A i B su neprekidno u kontaktu sa podlogom.



Slika uz zadatak 1



Slika uz zadatak 2

2. Štap 1 obrće se konstantnom ugaonom brzinom intenziteta ω. Ako su veze u tačkama A, B, D, C i E zglobne i dužina $AB=BD=L\sqrt{2}$ i $CE=2L\sqrt{2}$ odrediti brzinu i ubrzanje klizača E u položaju prikazanom na slici. Disk 3 može da se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj podlozi kao na slici.

3. U tački A(1,2,8) nalazi se nepokretan centar privlačenja materijalne tačke M, mase m, dok je u tački B (0.5,1,4) nepokretni centar odbijanja tačke M koja se kreće u polju sile Zemljine teže. Sila privlačenja ka centru A je proprocionalna rastojanju tačke od centra privlačenja sa koeficijentom privlačenja mk^2, dok je sila odbijanja od centra B proporcionalna rastojanju sa koeficijentom $2mk^2$. Ako je u početnom trenutku tačka M mirovala u tački sa koordinatama (2,3,0) odrediti konačne jednačine kretanja tačke M. Koordinate tačaka zadate su u odnosu na desno orijentisan Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxyz kod koga je osa Oz orijentisana vertikalno naviše.

Ispit traje 2 sata.

Srećan rad!

jun 2023

(3) m, privlačna sila s centrom u $A(1,2,8)$ (koef. pr. je mk^2), odbojna sila s centrom u $B(\frac{1}{2},1,4)$ (koef. pr. je $2mk^2$)

$t_0=0$: M je mirovala u tački $(2,3,0)$, konačne j-ne kretanja?

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_A + \vec{F}_B$$

postavljamo položaj tako da je M dalje : od A : od B
: po x, : po y, : po z
=> $\vec{F}_A$ deluje suprotno od x, y, z
=> $\vec{F}_c$ deluje u pravcu x, y, z

x: $m\ddot{x} = 0 - mk^2(x-1) + 2mk^2(x-\frac{1}{2})$

$\ddot{x} = -k^2x + \cancel{k^2} + 2k^2x - \cancel{k^2}$

$$\ddot{x} - k^2x = 0$$

y: $m\ddot{y} = 0 - mk^2(y-2) + 2mk^2(y-1)$

$\ddot{y} = -k^2y + \cancel{2k^2} + 2k^2y - \cancel{2k^2}$

$$\ddot{y} - k^2y = 0$$

z: $m\ddot{z} = -mg - mk^2(z-8) + 2mk^2(z-4)$

$\ddot{z} = -g - k^2z + \cancel{8k^2} + 2k^2z - \cancel{8k^2}$

$$\ddot{z} - k^2z = -g$$

x: $\ddot{x} - k^2 x = 0$, $x = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm k + 0$

$x = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$

$\dot{x} = c_1 k e^{kt} - c_2 k e^{-kt}$

$$\left.\begin{aligned} x(t_0=0) &= c_1 + c_2 = 2 \\ \dot{x}(t_0=0) &= c_1 k - c_2 k = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad c_1 = c_2 = 1$$

$$\underline{\underline{x = k e^{kt} + k e^{-kt}}}$$

y: $\ddot{y} - k^2 y = 0$, $y = e^{\lambda t}$

...

$$\underline{\underline{y = \frac{3}{2} k e^{kt} + \frac{3}{2} k e^{-kt}}}$$

z: $\ddot{z} - k^2 z = -g$

H: $\ddot{z} - k^2 z = 0$, $z = e^{\lambda t}$

...

$z_h = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt}$

P: $b(t) = e^{0t}(-g \cos(0t) + 0 \sin(0t))$

$z_p = t^0 e^{0t}(A \cos 0t + B \sin 0t) = A$, $\dot{z}_p = 0$, $\ddot{z}_p = 0$

$0 - k^2 A = -g \quad \Rightarrow \quad A = \frac{g}{k^2} \quad \Rightarrow \quad z_p = \frac{g}{k^2}$

$z = c_1 e^{kt} + c_2 e^{-kt} + \frac{g}{k^2}$

$\dot{z} = c_1 k e^{kt} - c_2 k e^{-kt}$

$$\left.\begin{aligned} z(t_0=0) &= c_1 + c_2 + \frac{g}{k^2} = 0 \\ \dot{z}(t_0=0) &= c_1 k - c_2 k = 0 \end{aligned}\right\} \quad c_1 = c_2 = -\frac{g}{2k^2}$$

$$\underline{z = -\frac{g}{2k^2} e^{kt} - \frac{g}{2k^2} e^{-kt} + \frac{g}{k^2}}$$

Механика 2, 09.2.2023. група 2

1. Клизач C креће се у равни Oxy дуж вођица које имају облик $y = e^x$ [m]. Пројекција убрзања клизача на осу Ox је $\ddot{x}_C = 2\,\frac{m}{s^2}$. Клизач C је зглобно везан за центар диска полупречника $R = \frac{e}{\pi}$ [m]. Диск може да се обрће око осе која пролази кроз његов центар C, а управна је на равни Oxy, по закону $\varphi = \pi t$ [rad]. У почетном тренутку клизач је мировао на оси Oy. На оси диска, која је у почетном тренутку била паралелна са осом Ox, круто је везана тачка M, као што је приказано на Сл. 1. Одредити:

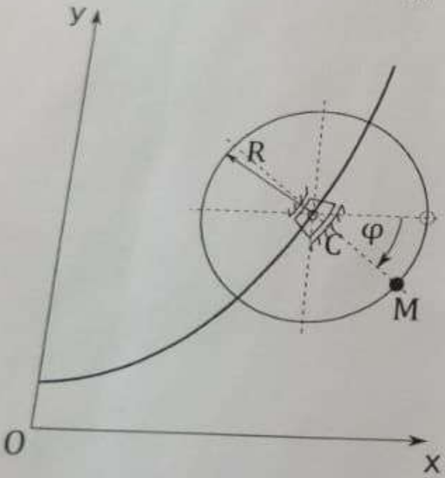
а) коначне једначине кретања тачке M,

б) интензитет брзине тачке M у тренутку $t_1 = 1$ s,

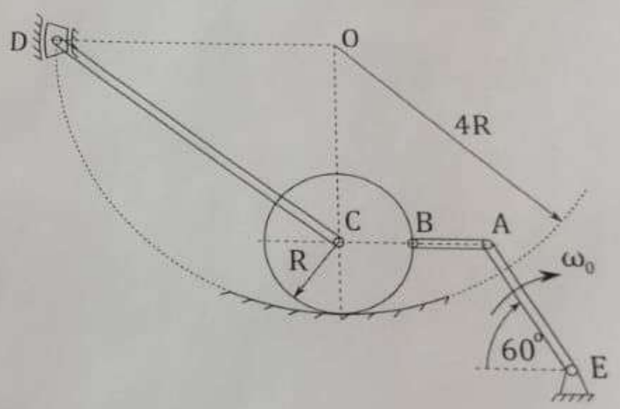
в) интензитет убрзања тачке M у тренутку $t_1 = 1$ s,

г) полупречник кривине трајекторије тачке M у тренутку $t_1 = 1$ s.

2. Штап AB може да се обрће константном угаоном брзином ω_0 око осе која пролази кроз непокретни ослонац A. Штап BD је једним крајем зглобно везан за штап AB, а другим за диск (полупречника R), који може да се котрља по унутрашњости цилиндричне површи полупречника $4R$ са центром у тачки O. За центар диска зглобно је везан и штап CK, чији други крај је везан за клизач K. Клизач K може да се креће по кружној вођици полупречника $4R$ са центром у тачки O. Одредити брзину и убрзање клизача K, као и угаону брзину и угаоно убрзање диска у положају приказаном на Сл. 2. Познато је да је $\overline{AB} = 2R$ и $\overline{BD} = R$.



Слика 1



Слика 2

3. Тачка M масе $m = 4$ kg креће се по параболи $y = \frac{1}{4}x^2$ [m] у вертикалној равни, при чему на тачку делује и сила $\vec{F}$, константног правца и смера приказаног на Сл. 3. Уколико је брзина тачке $V = 2\sqrt{g}\,\frac{m}{s}$ (g је гравитационо убрзање), одредити реакцију везе у положају у коме је полупречник кривине трајекторије тачке $R_k = 4\sqrt{2}$ m.

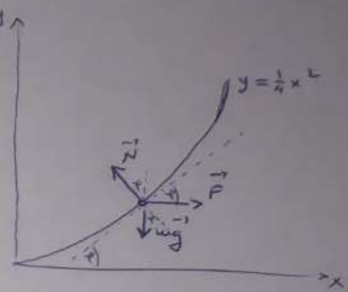
Слика 3

februar 2023.

(3) $m = 4$, $y = \frac{1}{4}x^2$, $F = const.$ u pravcu x ose,

ako je brzina tačke $v = 2\sqrt{g}$, odrediti N kada je $R_k = 4\sqrt{2}$

$$\underline{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F} + \vec{N}}$$



$t: \quad m\ddot{s} = -mg\sin\varphi + F\cos\varphi + 0$

$n: \quad ma_n = -mg\cos\varphi - F\sin\varphi + N$

$$\underline{N_1 = ma_{n1} + mg\cos\varphi_1 + F\sin\varphi_1}$$

$a_{n1} = ?$, $\cos\varphi_1 = ?$, $\sin\varphi_1 = ?$

$$a_{n1} = \frac{v_1^2}{R_{k1}} = \frac{4g}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}g$$

$tg\,\varphi = y' = \frac{1}{2}x$

$tg\,\varphi_1 = \frac{1}{2}x_1$, $x_1 = ?$

$$R_k = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{\left(1+\frac{1}{4}x^2\right)^{3/2}}{\frac{1}{2}}$$

$$4\sqrt{2} = \frac{\left(1+\frac{1}{4}x_1^2\right)^{3/2}}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2\sqrt{2} = \left(1+\frac{1}{4}x_1^2\right)^{3/2} \Rightarrow 8 = \left(1+\frac{1}{4}x_1^2\right)^3$$

$$\Rightarrow 2 = 1 + \frac{1}{4}x_1^2 \Rightarrow \frac{1}{4}x_1^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 2}}$$

$$tg\,\varphi_1 = 1 \Rightarrow \sin\varphi_1 = \frac{tg\,\varphi_1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

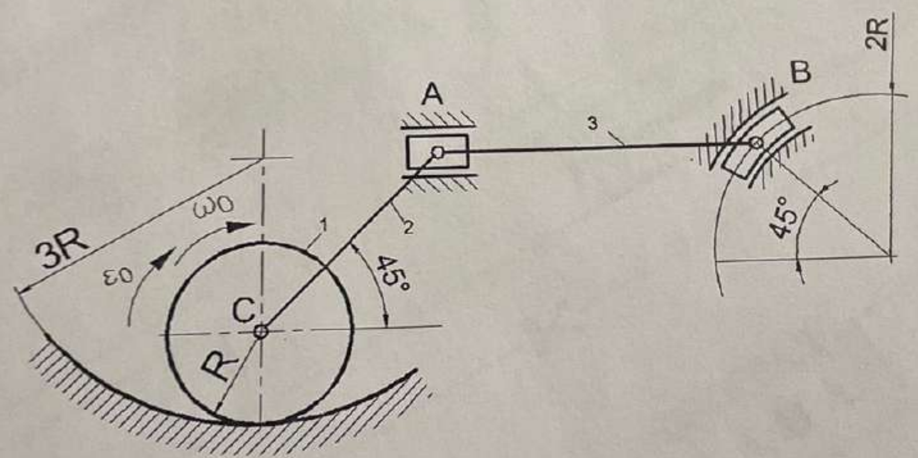
$$N_1 = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}g + 4g\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + F\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{N_1 = 4\sqrt{2}\,g + \frac{\sqrt{2}}{2}F}$$

Mehanika 2, G1, januar

1. Tačka M kreće se tako da su joj projekcije ubrzanja $\ddot{x} = -\sin(kt)$ i $\ddot{y} = -\cos(kt)$, u odnosu na ose nepokretnog pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema Oxy, gde je t vreme u sekundama, a k poznata pozitivna realna konstanta. Ako je tačka započela kretanje iz položaja $(0,\ 1/k^2)$ početnom brzinom $\overrightarrow{v_0} = \frac{1}{k}\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$ odrediti liniju putanje tačke i poluprečnik krivine trajektorije tačke u trenutku $t = \pi$. Sve veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema. Dato je k=1/2.

2. Disk 1 kotrlja se bez klizanja po glatkoj nepokretnoj podlozi i zglobno je vezan u tački C sa štapom AC. U tački A je klizač A koji može da se kreće duž vođica kao na slici. U tački B štap je zglobno vezan sa klizačem koji može da se kreće po kružnim vođicama kao na slici. Odrediti brzinu i ubrzanje klizača B u položaju prikazanom na slici ako je AC=AB=2R. U posmatranom položaju disk ima ugaonu brzinu intenziteta ω_0 i ugaono ubrzanje $\varepsilon_0 = \omega_0^2$.



Slika uz zadatak 2

3. Materijalna tačka M, mase m kreće se u polju sile Zemljine teže duž glatke stacionarne ravni čija je jednačina u odnosu na Dekartov pravougaoni koordinatni sistem Oxyz gde je osa Oz orijentisana vertikalno naviše data kao $2x + y + 2z = 6$. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(0,2,2)$ i imala je početnu brzinu $\overrightarrow{v_0} = 2\vec{\imath} - 2\vec{k}$. Odrediti konačne jednačine kretnja tačke M.

januar 2023.

(3) m, $2x+y+2z=6$, $t_0=0$: $M_0(0,2,2)$, $\vec{v}_0=2\vec{i}-2\vec{k}$, j-ne kretanja?

$$\vec{N}=\lambda\,\mathrm{grad}f=\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial z}\right)=\lambda(2,1,2)$$

$$m\vec{a}=m\vec{g}+\vec{N}$$

$$\left.\begin{aligned} x&: \quad m\ddot{x}=0+2\lambda\\ y&: \quad m\ddot{y}=0+\lambda\\ z&: \quad m\ddot{z}=-mg+2\lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{x}&=\frac{2\lambda}{m}\\ \ddot{y}&=\frac{\lambda}{m}\\ \ddot{z}&=\frac{2\lambda}{m}-g \end{aligned}$$

$$\frac{d^2f}{dt^2}=2\ddot{x}+\ddot{y}+2\ddot{z}=0 \Rightarrow \frac{4\lambda}{m}+\frac{\lambda}{m}+\frac{4\lambda}{m}-2g=0$$

$$\Rightarrow \frac{9\lambda}{m}=2g \Rightarrow \lambda=\frac{2mg}{9}$$

$$\ddot{x}=\frac{4}{9}mg \Rightarrow \dot{x}=\frac{4}{9}\cancel{m}gt+2 \Rightarrow x=\frac{2}{9}gt^2+2t+0$$

$$\ddot{y}=\frac{2}{9}mg \Rightarrow \dot{y}=\frac{2}{9}\cancel{m}gt+0 \Rightarrow y=\frac{1}{9}gt^2+2$$

$$\ddot{z}=-\frac{5}{9}mg \Rightarrow \dot{z}=-\frac{5}{9}gt-2 \Rightarrow z=-\frac{5}{18}gt^2-2t+2$$

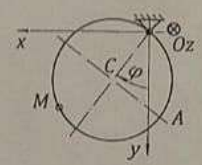
$$\boxed{\begin{aligned} x&=\frac{2}{9}gt^2+2t+0\\ y&=\frac{1}{9}gt^2+2\\ z&=-\frac{5}{18}gt^2-2t+2 \end{aligned}}$$

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
25.8.2022.

Mehanika 2

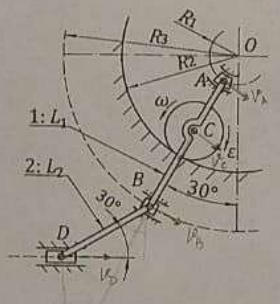
Septembarski ispitni rok 2022. – grupa 2

1. Žica, savijena u oblik kružnice poluprečnika $2R$, obrće se po zakonu $\varphi = t$ oko ose Oz upravne na ravan slike. Zakon kretanja prstena M po žici je $s = \overset{\frown}{AM} = 2Rt$. Odrediti poluprečnik krivine trajektorije prstena M u trenutku t_1 ($t_1 > 0$), kada je vektor njegove sektorske brzine prvi put $\vec{S_1} = -6R^2\vec{k}$.



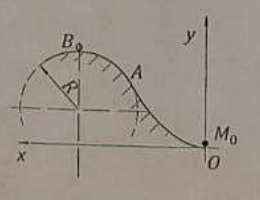
Slika uz zadatak 1.

2. Mehanizam se sastoji od: diska poluprečnika R koji se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj cilindričnoj površi poluprečnika $R_2 = 4R$, štapa 1 dužine $L_1 = 5R$ koji je u tački C zglobno vezan za centar diska, a na krajevima za klizače A i B, koji mogu da se kreću u kružnim vođicama poluprečnika $R_1 = R$ i $R_3 = 6R$ i štapa 2 dužine $L_2 = 2\sqrt{3}R$ koji je jednim krajem zglobno vezan za klizač B, a drugim krajem za klizač D u pravolinijskoj vođici. Zamišljene kružnice po kojima se kreću klizači A i B, kao i kružnica koja definiše cilindričnu površ po kojoj se kreće disk su koncentrične, sa zajedničkim centrom u tački O. Ako su u položaju mehanizma prikazanom na slici poznati ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska $\omega_D = \omega$ i $\varepsilon_D = 3\omega^2$, smera kao na slici, kao i uglovi od 30° koje štapovi 1 i 2 zaklapaju sa odgovarajućim ortogonalnim pravcima (videti sliku), odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja svih tela kao i brzinu i ubrzanje klizača D u datom položaju.



Slika uz zadatak 2.

3. Po idealno glatkoj putanji, oblika dela parabole $y = x^2$ [m], koja se nalazi u vertikalnoj ravni (Oy osa je vertikalna), kreće iz početnog položaja $M_0(0,0)$ materijalna tačka M mase m. U tački $A\left(\sqrt{3}/_2, y_A\right)$, putanja glatko prelazi u kružni luk poluprečnika $R = 1$ m. Odrediti minimalni intenzitet početne brzine koju treba saopštiti tački, kako bi ona dospela u tačku B. U kom položaju bi se tačka M odvojila od putanje kada bi tački bila saopštena početna brzina $v_0 = \sqrt{3g}$.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

septembar 2022.

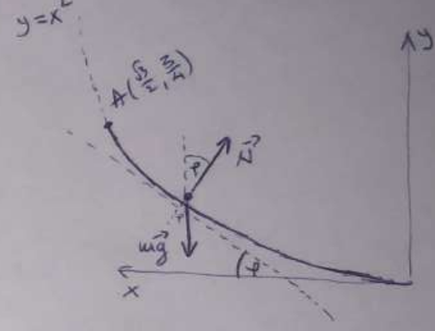
③ $y = x^2$, $t_0 = 0$: $M_0(0,0)$, $v_0 = ?$, m, $A(\frac{\sqrt{3}}{2}, y_A)$, $\rho = 1$

1) $v_{0_{min}} = ?$ da b: tačka dospela u položaj B

2) položaj odvajanja od podloge ako je $v_0 = \sqrt{3g}$?

---

deonica M_0A



$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

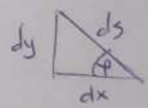
t: $m\ddot{s} = -mg\sin\varphi + 0 \quad /:m$

n: $ma_n = -mg\cos\varphi + N$

t: $\ddot{s} = -g\sin\varphi$

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{\dot{s}d\dot{s}}{ds}$$

$$\frac{\dot{s}d\dot{s}}{ds} = -g\sin\varphi$$



$$ds = \frac{dy}{\sin\varphi} = \frac{dx}{\cos\varphi}$$

$$\dot{s}d\dot{s} = -g\cancel{\sin\varphi}\cdot\frac{dy}{\cancel{\sin\varphi}} \quad /\int_{M_0}^{A}$$

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2\Big|_{v_0}^{v_A} = -gy\Big|_{y_0=0}^{y_A=\frac{3}{4}}$$

$$tg\,\varphi = y' = 2x$$

$$\sin\varphi = \frac{tg\,\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}$$

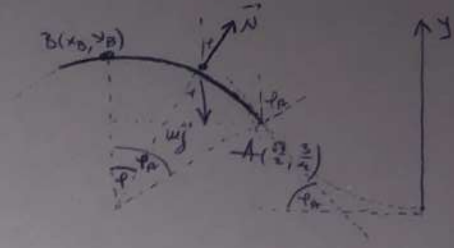
$$\frac{1}{2}(v_A^2 - v_0^2) = -g\cdot\frac{3}{4} \quad /\cdot 2$$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$$

$$\underline{\underline{v_A^2 = v_0^2 - \frac{3}{2}g}}$$

$$R_k = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

deonica AB



$$\varphi_A = \varphi\left(x=\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \operatorname{arctg}\left(2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 60$$

$$y_B = y_A - R\cos 60 + R = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

$$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}\,\frac{ds}{ds} = \frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{ds}$$

$$ds = \frac{dy}{\sin\varphi} = \frac{dx}{\cos\varphi}$$

t: $m\ddot{s} = -mg\sin\varphi + 0 \quad /:m$

n: $ma_n = -mg\cos\varphi + N$

1)

t: $\ddot{s} = -g\sin\varphi$

$$\frac{\dot{s}\,d\dot{s}}{ds} = -g\sin\varphi$$

$$\dot{s}\,d\dot{s} = -g\,\cancel{\sin\varphi}\,\frac{dy}{\cancel{\sin\varphi}} \quad /\int_A^B$$

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2\Big|_{v_A}^{v_B=0} = -gy\Big|_{y_A=\frac{3}{4}}^{y_B=\frac{5}{4}}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}}(0 - v_A^2) = -\cancel{\tfrac{1}{2}}g$$

$$-v_0^2 + \frac{3}{2}g = -g$$

$$v_0^2 = \frac{5}{2}g$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{5}{2}g}}$$

2) $n: \quad m a_n = mg\cos\varphi - N$

$$N = -m a_n + mg\cos\varphi = -m \cdot \frac{v^2}{R_k} + mg\cos\varphi \quad , \quad v = ?$$

$t: \quad \dot{s}\, d\dot{s} = -g\, dy \quad /\int_A^M$

$$\frac{1}{2}\dot{s}^2\Big|_{v_A}^{v} = -gy\Big|_{y_A = \frac{3}{4}}^{y_M = y_A - R\cos 60 + R\cos\varphi = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \cos\varphi = \frac{1}{4} + \cos\varphi}$$

$$\frac{1}{2}(v^2 - v_A^2) = +g\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4} - \cos\varphi\right) \quad /\cdot 2$$

$$v^2 - v_0^2 + \frac{3}{2}g = g - 2g\cos\varphi$$

$$v^2 - 3g + \frac{3}{2}g = g - 2g\cos\varphi$$

$$v^2 = \frac{5}{2}g - 2g\cos\varphi$$

$n:$

$$N = -m \cdot \frac{\frac{5}{2}g - 2g\cos\varphi}{1} + mg\cos\varphi$$

$$N = m \cdot \left(-\frac{5}{2}g + 3g\cos\varphi\right)$$

$$N_1 = -m\left(\frac{5}{2}g - 3g\cos\varphi_1\right) = 0$$

$$\Rightarrow 3\cos\varphi_1 = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\varphi_1 = \frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi_1 = \arccos\frac{5}{6}}$$

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
13.01.2022.

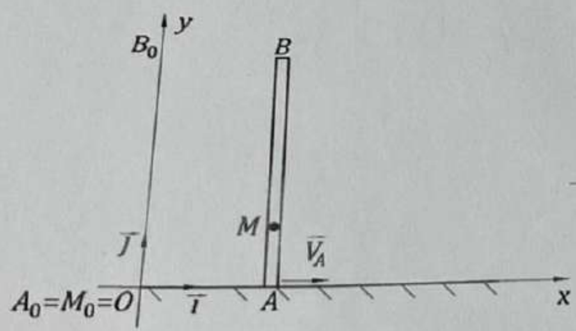
Mehanika 2

Januarski ispitni rok 2022

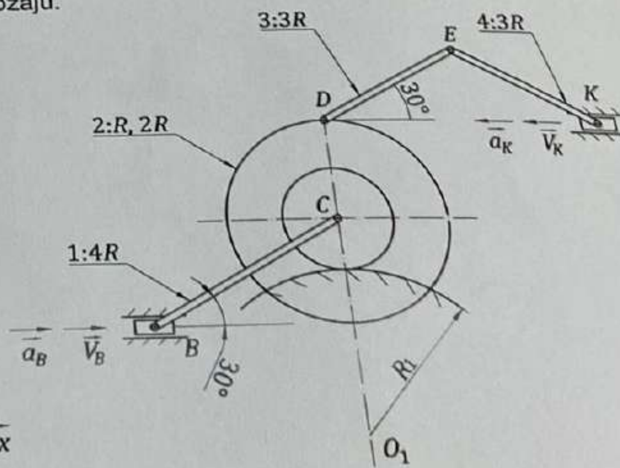
1. Cev AB, dužine $\overline{AB} = h$, kreće se po nepokretnoj podlozi duž pravca ose Ox i ostaje paralelna osi Oy tokom kretanja. U početnom trenutku, položaj cevi se poklapao sa osom Oy. Brzina tačke A, za sve vreme kretanja, data je sa $\vec{V}_A = \pi\vec{\imath}$. Unutar cevi AB kreće se kuglica M po zakonu $\overline{AM} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\cos(\pi t)$. Dato je $h = 1$. Sve veličine su u osnovnim jedinicama SI sistema. Odrediti:

   a) konačne jednačine kretanja tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem Oxy,
   b) trajektoriju tačke M (skicirati),
   c) hodograf brzine tačke M (skicirati),
   d) vektor ubrzanja i poluprečnik krivine trajektorije tačke M u trenutku kada intenzitet brzine ima najmanju vrednost.

2. Mehanizam se sastoji od: klizača B, štapa 1 (BC) dužine $\overline{BC} = 4R$, koaksijalnog diska 2 poluprečnika R i $2R$, štapa 3 (DE) dužine $\overline{DE} = 3R$, štapa 4 (EK) dužine $\overline{EK} = 3R$ i klizača K. Koaksijalni disk se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj cilindričnoj površi poluprečnika $R_1 = 3R$. Veze u tačkama B, C, D, E i K su zglobne. Ako su u položaju mehanizma prikazanom na slici, brzina i ubrzanje klizača B intenziteta $V_B = 2\omega_0 R$ i $a_B = \omega_0^2 R$, smera kao na slici, a brzina i ubrzanje klizača K intenziteta $V_K = 6\omega_0 R$ i $a_K = 4\omega_0^2 R$, smera kao na slici, odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja svih tela mehanizma u datom položaju.

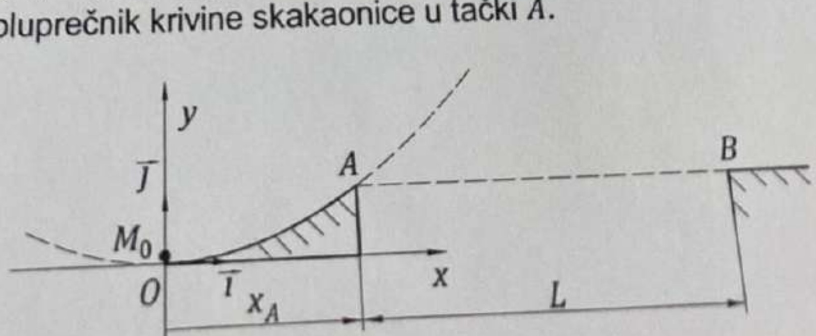


Slika uz zadatak 1.



Slika uz zadatak 2.

3. Po idealno glatkoj skakaonici, oblika dela parabole $y = {}^1/_4\, x^2$ [m], koja se nalazi u vertikalnoj ravni (Oy osa je vertikalna), kreće se iz početnog položaja $M_0(0,0)$ materijalna tačka M mase m. Odrediti početnu brzinu koju treba saopštiti tački, kako bi ona nakon napuštanja veze (skakaonice) u tački A, premostila jaz dužine $L = 8$ m i stigla u tačku B. Otpor sredine zanemariti. Dužina skakaonice je $x_A = 2$ m. Odrediti poluprečnik krivine skakaonice u tački A.



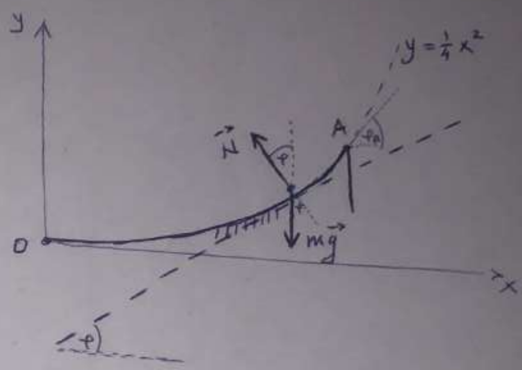
Slika uz zadatak 3.

januar 2022.

③ $y = \frac{1}{4}x^2$, $t_0 = 0$: $M_0(0,0)$, $v_0 = ?$, m , $L = 8\,m$, $x_A = 2\,m$

odrediti v_0? tako da tačka pređe jaz

Deonica OA



$\underline{m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}}$

t: $m\ddot{s} = -mg\sin\varphi + 0$ $/ : m$

$\ddot{s} = -g\sin\varphi$

$\frac{\dot{s}d\dot{s}}{\cancel{ds}} = -g\frac{dy}{\cancel{ds}}$ $/\int_0^A$

$\frac{1}{2}\dot{s}^2\Big|_{v_0}^{v_A} = -gy\Big|_{y_0=0}^{y_A=\frac{1}{4}x_A^2=\frac{1}{4}\cdot 4=1}$

$\frac{1}{2}(v_A^2 - v_0^2) = -g\cdot 1$ $/\cdot 2$

$\underline{\underline{v_0^2 = v_A^2 + 2g}}$, $v_A = ?$

ds, dy, dx $\quad \sin\varphi = \frac{dy}{ds}$

$\ddot{s} = \frac{d\dot{s}}{dt}\frac{ds}{ds} = \frac{\dot{s}d\dot{s}}{ds}$

Deonica slobodnog kretanja

$\underline{m\vec{a} = m\vec{g}}$

x: $m\ddot{x} = 0$ $/:m$

$\ddot{x} = 0$ $/\int$

$\dot{x} = const = C_1$

$\dot{x}(t_0=0) = C_1 = v_A\cos\varphi_A = \frac{\sqrt{2}}{2}v_A$

$\dot{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_A$ $/\int$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}v_A t + C_2$

$x(t_0) = 0 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 0$

$\underline{\underline{x = \frac{\sqrt{2}}{2}v_A t}}$

$\cos\varphi_A = ?$, $\sin\varphi_A = ?$

$tg\,\varphi = y' = \frac{1}{4}2x = \frac{1}{2}x$

$tg\,\varphi_A = \frac{1}{2}x_A = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$\sin\varphi_A = \frac{tg\,\varphi_A}{\sqrt{1+tg^2\varphi_A}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos\varphi_A = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi_A}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

y: $m\ddot{y} = -mg \quad /:m$

$\ddot{y} = -g \quad /\int$

$\dot{y} = -gt + c_1$

$\dot{y}(t_0=0) = 0 + c_1 = v_A \sin \varphi_A = \frac{\sqrt{2}}{2} v_A$

$\dot{y} = -gt + \frac{\sqrt{2}}{2} v_A \quad /\int$

$y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_A t + c_2$

$y(t_0=0) = 0 + 0 + c_2 = 0$

$$\underline{\underline{y = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} v_A t}}$$

$y(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}t(-gt + \sqrt{2}v_A) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_0 = 0, \; t_1 = \frac{v_A\sqrt{2}}{g}$

$x(t_1) = 8 \quad \Rightarrow \quad \cancel{\frac{\sqrt{2}}{2}} v_A \cdot \frac{v_A\sqrt{2}}{g} = 8 \quad \Rightarrow \quad v_A^2 = 8g$

$v_0^2 = v_A^2 + 2g$

$v_0^2 = 8g + 2g$

$$\boxed{v_0 = g\sqrt{10}}$$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

МЕХАНИКА 2

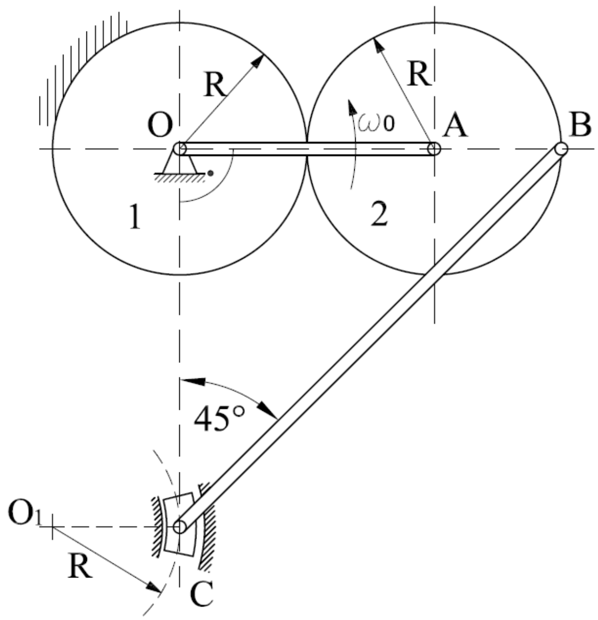
МЕХ 210-1172

06. септембар 2021.

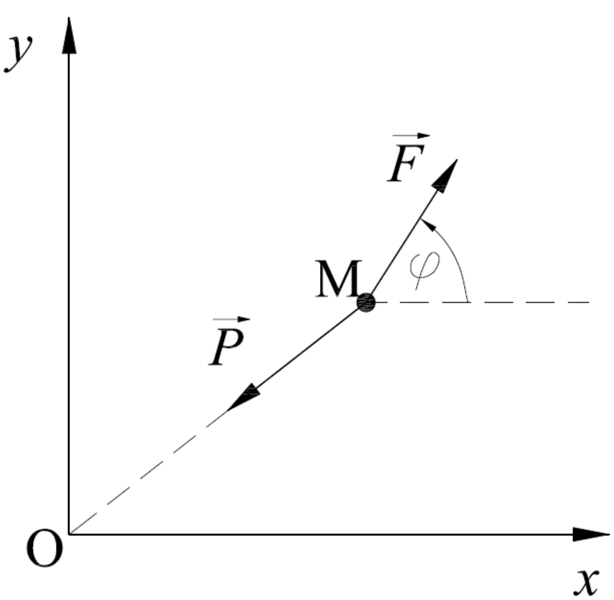
1. Тачка M креће се у равни xOy сагласно коначним једначинама кретања: $x(t)=3t\,[\mathrm{m}]$ и $y(t)=t^2+3t\,[\mathrm{m}]$. Време t мери се у секундама. Одредити полупречник кривине трајекторије тачке у тренутку када је њена секторска брзина $\vec{S}(t_1)=6\vec{k}\,\left[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}\right]$.

2. Механизам, приказан на слици 1, састоји се од криваје OA, штапа BC, клизача C и диска 2 полупречника R (слика 1). Диск 2 котрља се без клизања по непомичном диску 1 полупречника R. Клизач C креће се по кружним вођицама полупречника R. Криваја OA обрће се константном угаоном брзином ω_0. Везе у тачка O, A, B и C су зглобне. Одредити, у положају приказаном на слици, угаону брзину и угаоно убрзање штапа BC као и брзину и убрзање клизача C.

3. Материјална тачка M, масе m, креће се по глаткој хотизонталној равни xOy под дејством сила $\vec{P}$ и $\vec{F}$ (слика 2). Сила $\vec{P}$ сразмерна је растојању тачке M од координатног почетка O са коефицијентом сразмере mk^2 и стално је усмерена ка тачки O, при чему је k позитивна константа. Сила $\vec{F}$ константног је интензитета F_0, њена линија дејства лежи у хоризонталној равни, а угао између позитивног смера осе Ox и ње мења се по закону $\varphi=\omega t$, при чему је ω позитивна константа ($\omega \neq k$). Ако је у почетном тренутку тачка мировала у координатном почетку, одредити коначне једначине кретања тачке.



Слика 1

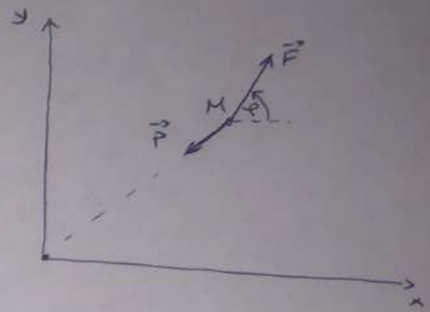


Слика 2

oktobar 2021.

(3.) m, $\vec P$ i $\vec F$, $\vec P$ je privlačna ka O, koef. prop. mk^2,
$|\vec F| = F_0 = const.$, $\varphi = \omega_0 t$, $\omega \neq k$, $t_0 = 0$: M je mirovala u koord. poč.
j-ne kretanja? (horizontalna ravan)

$$\boxed{m\vec a = \vec P + \vec F}$$



$P_x = mk^2 x$
$P_y = mk^2 y$

x: $m\ddot x = -mk^2 x + F_0 \cos\omega t \quad /:m$

$$\ddot x = -k^2 x + \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

y: $m\ddot y = -mk^2 y + F_0 \sin\omega t$

$$\ddot y = -k^2 y + \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

---

x: $\underline{\ddot x + k^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t}$

H: $\ddot x + k^2 x = 0$, $x = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \pm ik$

$x_h = C_1\cos(kt) + C_2\sin(kt)$

P: $\ddot x + k^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$

$$b(t) = e^{0t}\left(\frac{F_0}{m}\cos(\omega t) + 0\sin(\omega t)\right)$$

$$x_p = t^0 e^{0t}(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$$

$x_p = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, $\dot x_p = -A\omega\sin\omega t + B\omega\cos\omega t$, $\ddot x_p = -A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t$

$$-A\omega^2\cos\omega t - B\omega^2\sin\omega t + Ak^2\cos\omega t + Bk^2\sin\omega t = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\cos\omega t(Ak^2 - A\omega^2) + \sin\omega t(Bk^2 - B\omega^2) = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$$\Rightarrow Ak^2 - A\omega^2 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow A = \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)}, \quad B = 0$$

$$x_p = \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)}\cos\omega t$$

$$x = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt + \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \cos \omega t$$

$$\dot{x} = -c_1 k \sin kt + c_2 k \cos kt - \frac{F_0 \omega}{m(k^2-\omega^2)} \sin \omega t$$

$$x(t_0=0) = c_1 + 0 + \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \Rightarrow c_1 = -\frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)}$$

$$\dot{x}(t_0=0) = 0 + c_2 k + 0 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$x = -\frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \frac{\omega}{k} \cos kt + \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \cos \omega t$$

y: $\ddot{y} + k^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

H: $\ddot{y} + k^2 y = 0$, $y = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + k^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm ik$

$y_h = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt)$

P: $\ddot{y} + k^2 y = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

$f(t) = e^{0t} \left(0 \cos \omega t + \frac{F_0}{m} \sin \omega t \right)$

$y_p = t^0 e^{0t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

$y_p = A \cos \omega t + B \sin \omega t$, $\dot{y}_p = -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t$, $\ddot{y}_p = -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t$

$(-A\omega^2 + Ak^2) \cos \omega t + (-B\omega^2 + Bk^2) \sin \omega t = \frac{F_0}{m} \sin \omega t$

$\Rightarrow -B\omega^2 + Bk^2 = \frac{F_0}{m} \Rightarrow B = \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)}$, $A = 0$

$y_p = \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \sin \omega t$

$$y = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt) + \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \sin \omega t$$

$$\dot{y} = -c_1 k \sin(kt) + c_2 k \cos(kt) + \frac{F_0 \omega}{m(k^2-\omega^2)} \cos \omega t$$

$$y(t_0=0) = c_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

$$\dot{y}(t_0=0) = 0 + c_2 k + \frac{F_0 \omega}{m(k^2-\omega^2)} = 0 \Rightarrow c_2 = -\frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \frac{\omega}{k}$$

$$y = -\frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \frac{\omega}{k} \sin kt + \frac{F_0}{m(k^2-\omega^2)} \sin \omega t$$

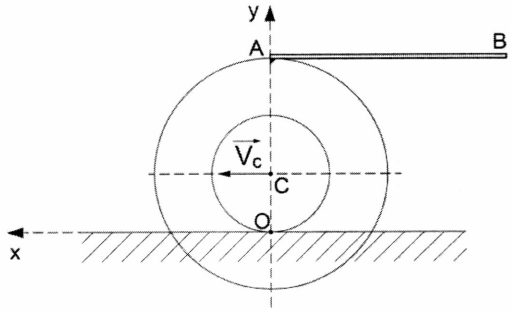
MEHANIKA 2 **1.**GRUPA FEBRUAR 2020

1. Koaksijalni cilindar poluprečnika R i $2R$ kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj pravolinijskoj podlozi. Za cilindar je u tački A kruto spojen štap AB pod pravim uglom u odnosu na pravac CA. Središte cilindra C kreće se konstantnom brzinom intenziteta $V_C = 1\frac{m}{s}$. Ako je $\overline{AB} = 2R$, i ako je na slici prikazan početni položaj sistema, odrediti u odnosu na dati nepokretni koordinatni sistem Oxy:

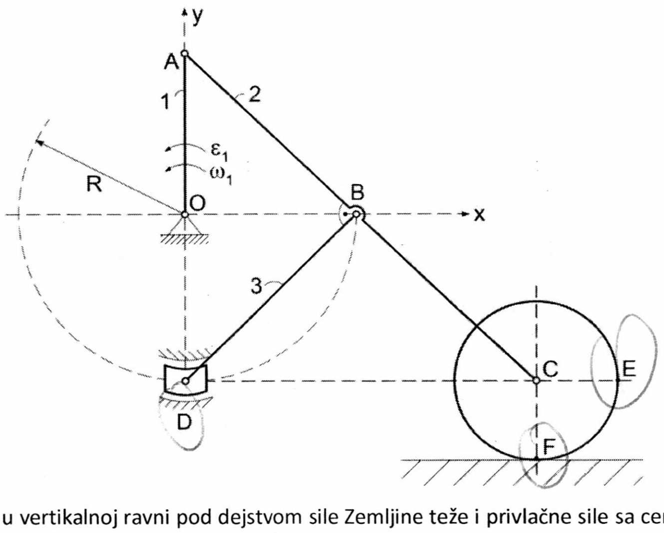
a) jednačine kretanja tačke B,

b) poluprečnik krivine trajektorije tačke B u trenutku $t_1 = \frac{R\pi}{2}$,

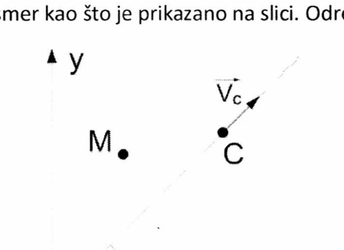
c) vektor ubrzanja tačke B u trenutku kada intenzitet brzine tačke B prvi put dostiže maksimalnu vrednost.



2. Za mehanizam u položaju prikazanom na slici odrediti brzinu i ubrzanje tačaka: D, E i F. Mehanizam se sastoji od tri štapa, klizača D i diska, pri čemu je $\overline{OA} = \overline{OB} = R$. Štap OA obrće se oko nepokretnog oslonca O i u datom trenutku ima ugaonu brzinu $\omega_1 = \omega_0$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon_1 = \omega_0^2$ u naznačenom smeru. Disk poluprečnika $0.5R$ kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj podlozi, a klizač D se kreće po kružnici poluprečnika R sa centrom u tački O. Veze u tačkama O, A, B, C i D su zglobne.



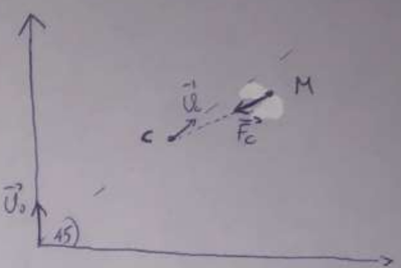
3. Tačka M mase m kreće se u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile Zemljine teže i privlačne sile sa centrom privlačenja u tački C. Za koordinatni sistem usvojiti nepokretni Dekartov koordinatni sistem Oxy, pri čemu je osa Oy usmerena vertikalno naviše. Privlačni centar C kreće se brzinom konstantnog intenziteta $V_C = \sqrt{2}\frac{m}{s}$ duž prave koja sa osom Ox zaklapa ugao od $45°$. Privlačna sila centra C proporcionalna je rastojanju tačke M od centra C sa koeficijentom proporcionalnosti mk^2, gde je k poznata pozitivna konstanta. U početnom trenutku centar C i tačka M nalazili su se u koordinatnom početku, a početna brzina tačke M iznosila je $V_O = 2\frac{m}{s}$ i imala pravac i smer kao što je prikazano na slici. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.



februar 2020

(3) m, center privlačenja C, Oy vertikalno naviše, $v_c = \sqrt{2} = const.$,
koef. ~~privlačnosti~~ proporcionalnosti mk^2, $t_0 = 0$: $M_0(0,0)$, $C_0(0,0)$
$v_0 = 2$ (pravac i smer na slici)
konačne j-ne kretanja?

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F_c}$$



x: $\quad m\ddot{x} = 0 - F_{c,x}$

$\quad \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}k^2(x - x_c)$

y: $\quad m\ddot{y} = -mg - F_{c,y}$

$\quad \cancel{m}\ddot{y} = -\cancel{m}g - \cancel{m}k^2(y - y_c)$

$$F_{c,x} = mk^2 \cdot (x - x_c)$$
$$F_{c,y} = mk^2(y - y_c)$$

$\dot{x}_c = \sqrt{2} \cdot \cos 45 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad / \int$

$x_c = 1 \cdot t + C_1$

$x_c(t_0 = 0) = 0 + C_1 = 0$

$\underline{\underline{x_c = t}}$

$\dot{y}_c = \sqrt{2} \sin 45 = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \quad / \int$

$y_c = 1t + C_2$

$y_c(t_0 = 0) = 0 + C_2 = 0$

$\underline{\underline{y_c = t}}$

x: $\quad \ddot{x} + k^2 x = k^2 \cdot t$

H: $\quad \ddot{x} + k^2 x = 0, \quad x = e^{\lambda t}$

$\lambda^2 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1/2} = 0 \pm ik$

$x_h = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$

P: $\quad \ddot{x} + k^2 x = k^2 t$

$b(t) = e^{0t}\left(k^2 t \cos(0t) + 0 \cdot \sin(0t)\right)$

$x_p = t^0 e^{0t}\left((At + B)\cos(0t) + (Ct + D)\sin(0t)\right) = At + B$

$x_p = At + B, \quad \dot{x}_p = A, \quad \ddot{x}_p = 0$

$0 + k^2 At + k^2 B = k^2 t \quad \Rightarrow \quad A = 1, \quad B = 0$

$x_p = t$

$$x = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt) + t$$
$$\dot{x} = -kc_1 \sin(kt) + kc_2 \cos(kt) + 1$$

$$x(t_0=0) = c_1 \cdot 1 + 0 + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$$
$$\dot{x}(t_0=0) = 0 + k \cdot c_2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{k}$$

$$\underline{\underline{x = -\frac{1}{k} \sin(kt) + t}}$$

y: $\quad \ddot{y} + k^2 y = +k^2 t - g$

H: $\quad \ddot{y} + k^2 y = 0 \quad , \quad y = e^{\lambda t}$

$$\lambda^2 + k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0 \pm ik$$
$$y_h = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt)$$

P: $\quad \ddot{y} + k^2 y = k^2 t - g$

$$b(t) = e^{0t}\left((k^2 t - g)\cos(0t) + 0 \sin(0t) \right)$$
$$y_p = t^0 e^{0t}\left((At+B)\cos(0t) + (Ct+D)\sin(0t) \right) = At + B$$
$$y_p = At + B \quad , \quad \dot{y}_p = A \quad , \quad \ddot{y}_p = 0$$
$$Ak^2 t + Bk^2 = k^2 t - g \quad \Rightarrow \quad A = 1 \quad , \quad B = -\frac{g}{k^2}$$
$$y_p = t - \frac{g}{k^2}$$

$$y = c_1 \cos(kt) + c_2 \sin(kt) + t - \frac{g}{k^2}$$
$$\dot{y} = -kc_1 \sin(kt) + kc_2 \cos(kt) + 1$$

$$y(t_0=0) = c_1 + 0 + 0 - \frac{g}{k^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{g}{k^2}$$
$$\dot{y}(t_0=0) = 0 + kc_2 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad c_2 = \frac{1}{k}$$

$$\underline{\underline{y = \frac{g}{k^2}\cos(kt) + \frac{1}{k}\sin(kt) + t - \frac{g}{k^2}}}$$