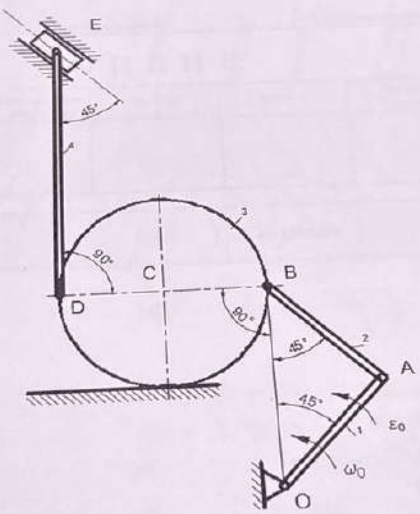
Mehanika 2, oktobar 2023.

G2

1. Tačka M kreće se saglasno konačnim jednačinama kretanja zadatim u odnosu na Dekartov desni koordinatni sistem $y_M = 2\sqrt{2}\cos(2t) + \sin(2t)$ i $x_M = 2\sqrt{2}\sin(2t) - \cos(2t)$. Odrediti:
   f) jednačinu linije putanje tačke i skicirati liniju putanje;
   g) intenzitet brzine tačke;
   h) intenzitet ubrzanja tačke;
   i) jednačinu hodografa vektora brzine tačke i skicirati ga;
   j) poluprečnik krivine trajektorije tačke.

2. Mehanizam prikazan na slici sastoji se od štapa 1, štapa 2, diska 3, štapa 4 klizača E. Disk 3, poluprečnika R, može da se kotrlja bez klizanja ravnoj nepokretnoj podlozi, kao na slici. Prilikom kretanja ne dolazi do odvajanja diska od podloge. Veze u tačkama O, A, B, D i E su zglobne. Ako je $\omega_{OA} = \omega_0$ i $\varepsilon_{OA} = \varepsilon_0 = \omega_0^2$ odrediti brzinu i ubrzanje klizača E u položaju prikazanom na slici. Date su sledeće dimenzije: $OA = R\sqrt{2}$, $AB = R\sqrt{2}$ i $DE = 2R$.



Slika uz zadatak 2

3. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u polju sile Zemljine teže po glatkoj nepokretnoj ravni čija je jednačina u odnosu na desni Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxyz kod koga je osa Oz orijentisana vertikalno naviše data sa x+3y+2z=12. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(2,2,2)$ i imala je početnu brzinu $\vec{v_0} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

oktobar 2023.

1. $x_M = 2\sqrt{2}\,\sin(2t) - \cos(2t)$

$y_M = 2\sqrt{2}\,\cos(2t) + \sin(2t)$

1) linija putanje i skiciraj je ?
2) $|\vec{v}|$?
3) $|\vec{a}|$?
4) hodograf brzine i skiciraj ga
5) R_K ?

$\dot{x}_M = 4\sqrt{2}\,\cos(2t) + 2\sin(2t)$

$\dot{y}_M = -4\sqrt{2}\,\sin(2t) + 2\cos(2t)$

$\ddot{x}_M = -8\sqrt{2}\,\sin(2t) + 4\cos(2t)$

$\ddot{y}_M = -8\sqrt{2}\,\cos(2t) - 4\sin(2t)$

$$v = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{32\cos^2(2t) + \cancel{16\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t)} + 4\sin^2(2t) + 32\sin^2(2t) - \cancel{16\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t)} + 4\cos^2(2t)} =$$

$$v = \sqrt{32 + 4} \Rightarrow \boxed{v = 6}$$

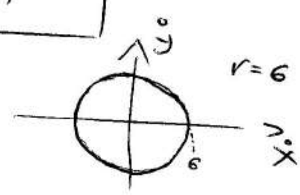
$$a = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = \sqrt{128\sin^2(2t) - 64\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t) + 16\cos^2(2t) + 128\cos^2(2t) + 64\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t) + 16\sin^2(2t)} =$$

$$a = \sqrt{128 + 16} \Rightarrow \boxed{a = 12}$$

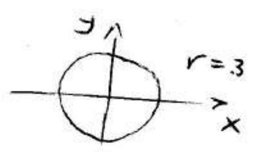
$$R_K = \frac{v^3}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} = \frac{216}{\left|-64\cos^2(2t) - 8\sin^2(2t) - \cancel{16\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t)} + \cancel{16\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t)} + 64\sin^2(2t) + 8\cos^2(2t) - 16\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t) - 16\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t)\right|} =$$

$$\boxed{R_K = \frac{216}{|56\sin^2(2t) - 56\cos^2(2t) - 32\sqrt{2}\sin(2t)\cos(2t)|}}$$

$\boxed{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 32 + 4 = 36}$ – hodograf brzine

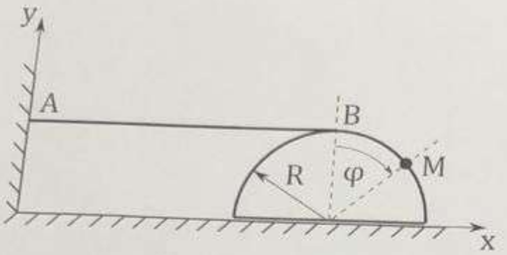


$\boxed{x^2 + y^2 = 8 + 1 = 9}$ – linija putanje

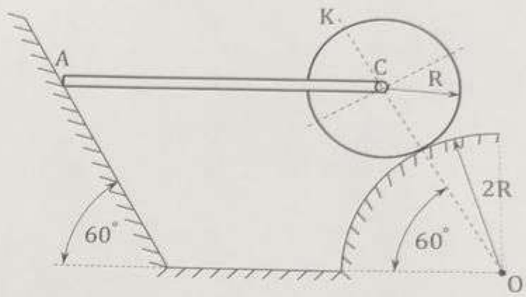


1. Преко полуцилиндра полупречника R пребачена је неистегљива нит која је везана за непокретну тачку A, тако да је њен део AB паралелан са осом Ox, као што је приказано на Сл. 1. За други крај нити везана је тачка M. Полуцилиндар се креће по непокретној подлози брзином константног интензитета V_0, правца и смера осе Ox. Тачка M креће се по површи полуцилиндра у равни управној на раван изводнице полуцилиндра. У почетном тренутку тачка M је лежала на оси Ox. Одредити:
а) интензитете брзине и убрзања тачке M у функцији угла φ задатог на Сл. 1, као и
б) полупречник кривине трајекторије у функцији угла φ задатог на Сл. 1.

2. Крај A штапа AC (дужине $4R$) може да клизи по стрмој равни нагибног угла од $60°$, док је други крај C зглобно везан за центар диска полупречника R, који се убрзано котрља без клизања низ спољашњу површ непокретног цилиндра полупречника $2R$. Ако је брзина тачке K у положају приказаном на слици $V_K = 2V_0$, а убрзање $a_K = \frac{5V_0^2}{3R}$, одредити брзину тачке A на крају штапа, као и угаоне брзине и угаона убрзања штапа и диска.

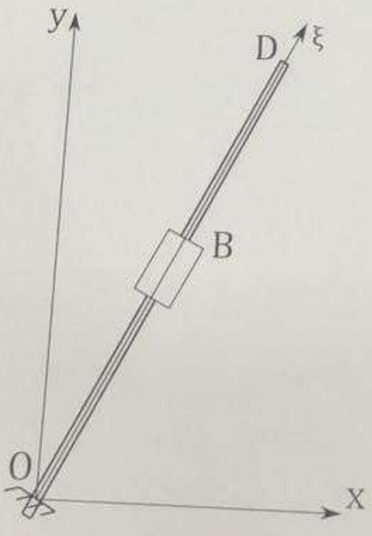


Слика 1



Слика 2

3. По глаткој вези OD која је задата једначином $y = 2x$, може да се креће клизач B масе m. На клизач делује и сила $\vec{F} = -\frac{4mg}{R}x\vec{i}$. У почетном тренутку клизач B је био у тачки O и започео кретање брзином $V_0 = \frac{5}{4}gR$. Одредити коначну једначину кретања клизача $\xi = \xi(t)$. Колика је реакција клизача B у највишој тачки коју достигне?



Слика 3

septembar 2023.

(1) $R, \ \vartheta_0$

t_0: M na osi Ox

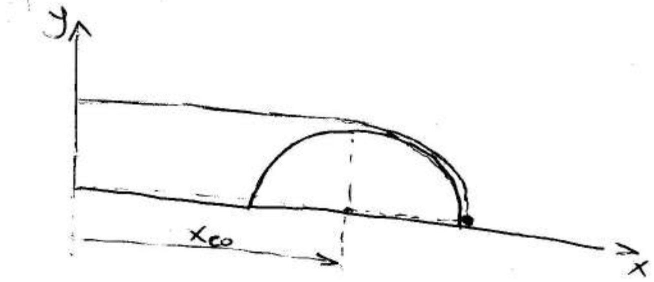
1) $\vartheta(\varphi), \quad a(\varphi)$?

2) $R_K(\varphi)$?

$$x_M = x_C + R\sin\varphi$$
$$y_M = 0 + R\cos\varphi \quad \Big\} \ x_C = ?$$

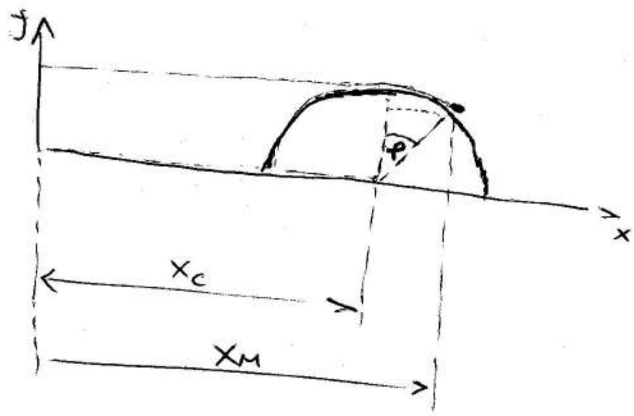
$$\dot{x}_C = \vartheta_0 \qquad / \int dt$$
$$x_C = \vartheta_0 t + c_1$$

(to)



$$x_M = \vartheta_0 t + c_1 + R\sin\varphi$$
$$y_M = R\cos\varphi$$

(t)



$$\dot{x}_M = \vartheta_0 + R\cos\varphi\cdot\dot{\varphi}$$
$$\dot{y}_M = -R\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} \quad \Big\} \ \dot{\varphi} = ?$$

$$\ell(t_0) = \ell(t) = \text{const.}$$
$$\ell(t_0) = x_C(t_0) + R\frac{\pi}{2} = 0 + c_1 + R\frac{\pi}{2}$$
$$\ell(t) = x_C(t) + R\varphi(t) = \vartheta_0 t + c_1 + R\varphi$$
$$0 + c_1 + \frac{R\pi}{2} = \vartheta_0 t + c_1 + R\varphi$$
$$\varphi = \frac{\frac{R\pi}{2} - \vartheta_0 t}{R} = \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta_0 t}{R}$$
$$\dot{\varphi} = -\frac{\vartheta_0}{R}, \quad \ddot{\varphi} = 0$$

$$\dot{x}_M = \vartheta_0 + R\cos(\varphi)\cdot\left(-\frac{\vartheta_0}{R}\right) = \vartheta_0 - \vartheta_0\cos(\varphi)$$
$$\dot{y}_M = -R\sin\varphi\cdot\left(-\frac{\vartheta_0}{R}\right) = \vartheta_0\sin(\varphi)$$
$$\ddot{x}_M = \vartheta_0\sin\varphi\cdot\dot{\varphi} = -\frac{\vartheta_0^2}{R}\sin(\varphi)$$
$$\ddot{y}_M = \vartheta_0\cos\varphi\cdot\dot{\varphi} = -\frac{\vartheta_0^2}{R}\cos(\varphi)$$

$$\vartheta_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{\vartheta_0^2 - 2\vartheta_0^2\cos\varphi + \vartheta_0^2\cos^2\varphi + \vartheta_0^2\sin^2\varphi} =$$
$$\vartheta_M = \sqrt{\vartheta_0^2 - 2\vartheta_0^2\cos\varphi + \vartheta_0^2}$$
$$\boxed{\vartheta_M = \sqrt{2\vartheta_0^2 - 2\vartheta_0^2\cos\varphi}}$$

$$a_M = \sqrt{\ddot{x}_M^2 + \ddot{y}_M^2} = \sqrt{\frac{\vartheta_0^4}{R^2}\sin^2\varphi + \frac{\vartheta_0^4}{R^2}\cos^2\varphi}$$
$$\boxed{a_M = \frac{\vartheta_0^2}{R}}$$

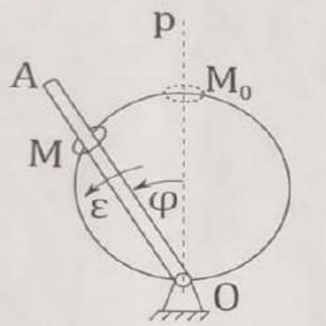
$$R_K = \frac{\vartheta^3}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|} = \frac{\left(\sqrt{2\vartheta_0^2 - 2\vartheta_0^2\cos\varphi}\right)^3}{\left|-\frac{\vartheta_0^3}{R}\cos\varphi + \frac{\vartheta_0^3}{R}\cos^2\varphi - \frac{\vartheta_0^3}{R}\sin^2\varphi\right|}$$

$$\boxed{R_K = \frac{\left(\vartheta_0\sqrt{2}\sqrt{1-\cos\varphi}\right)^3}{\left|\frac{\vartheta_0^3}{R}\left(\cos^2\varphi + \cos\varphi - \sin^2\varphi\right)\right|}}$$

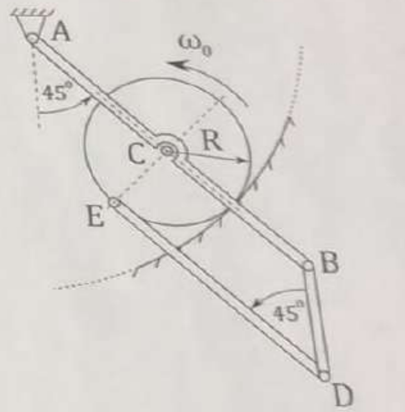
Механика 2, 29.6.2023. група 1

1. Полуга OA, дужине $\overline{OA} > 2R$, обрће се у назначеном смеру угаоним убрзањем $\varepsilon = k\cos\varphi$ (k =const.) и при томе доводи у кретање прстен M, који је истовремено намакнут на полугу OA и непокретни кружни обруч полупречника R. Полуга је у почетном тренутку мировала и поклапала се са правцем полуправе Op. Одредити брзину и убрзање тачке M у зависности од угла φ.

2. Диск полупречника R може да се котрља константном угаоном брзином ω_0 по унутрашњости цилиндричне површи са центром у тачки A. За центар диска (у тачки C) везан је штап AB, чији је крај A везан за непокретни ослонац, а крај B за штап BD. Други крај штапа BD је везан за клизач D. У тачки E диска везан је штап ED, чији је други крај такође везан за клизач D. Везе у тачкама A, B, C, D и E су зглобне. Одредити брзину и убрзање клизача D, као и угаону брзину и угаоно убрзање штапова ED и BD у положају приказаном на Сл. 2. Познато је да је $\overline{AC} = \overline{CB} = 2R$ и да су штапови AB и ED у приказаном положају паралелни.



Слика 1

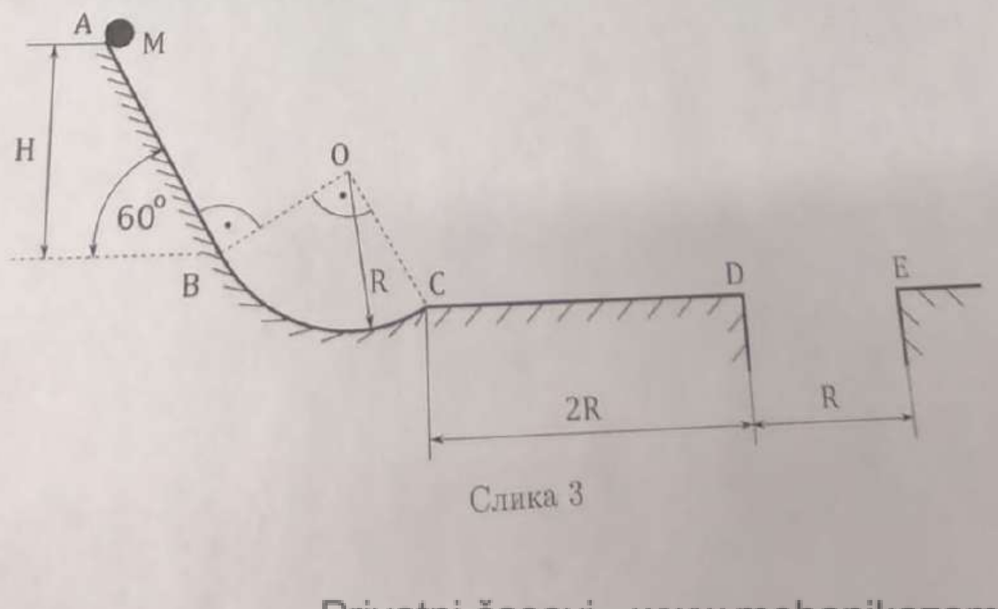


Слика 2

3. Куглица M, масе $m = 1$ kg и занемарљивих димензија, почиње кретање из стања мировања из тачке A и креће се по храпавој стрмој равни ($\mu = \frac{\sqrt{3}}{2}$) нагнутој под углом од 60° према хоризонталној оси. У тачки B куглица напушта стрму раван и наставља да се креће по глатком кружном луку полупречника $R = \sqrt{3}$ m са центром у тачки O и централним углом од 90°. У тачки C куглица напушта кружни лук и креће се слободно. Познато је да је стрма раван AB тангентна на кружни ук $\widehat{BC}$. Одредити:

) нормалну реакцију везе у произвољном положају, при кретању по кружном луку, и

) граничне вредности висинске разлике H између тачака A и B, како би куглица при слободном ретању пала кроз отвор између тачака D и E.



Слика 3

jul 2023.

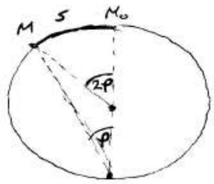
1. $\varepsilon = k\cos\varphi$

t_0: $\varphi = 0$, mirovala

$v_M(\varphi)$?

$a_M(\varphi)$?

poznato: φ, $\ddot{\varphi}$



$s = R\cdot 2\varphi = 2R\varphi$

$v = 2R\dot{\varphi}$, $\dot{\varphi} = ?$

$a_t = 2R\ddot{\varphi} = 2R\varepsilon = 2Rk\cos\varphi$

$a_n = \dfrac{v^2}{R_k} = \dfrac{4R^2\dot{\varphi}^2}{R}$, $\dot{\varphi} = ?$ $\Big\} \; a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

$\dot{\varphi} = ?$

$\ddot{\varphi} = \dfrac{d\dot{\varphi}}{dt}\cdot\dfrac{d\varphi}{d\varphi} = \dfrac{\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi}}{d\varphi}$

$\dot{\varphi}\, d\dot{\varphi} = \ddot{\varphi}\, d\varphi = \varepsilon\, d\varphi = k\cos\varphi\, d\varphi$ $\quad /\int$

$\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 = k\cos\varphi + \text{const.}$

$\dot{\varphi}^2 = 2k\sin\varphi + c_1$

$\dot{\varphi}^2(t_0) = 0 + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

$\dot{\varphi}^2 = 2k\sin\varphi$

$\dot{\varphi} = \sqrt{2k\sin\varphi}$

$$\boxed{v = 2R\sqrt{2k\sin\varphi}}$$

$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{4R^2k^2\cos^2\varphi + 16R^2\dot{\varphi}^4} = \sqrt{4R^2k^2\cos^2\varphi + 16R^2\cdot 4k^2\sin^2\varphi}$

~~$a = 2\sqrt{R}$~~

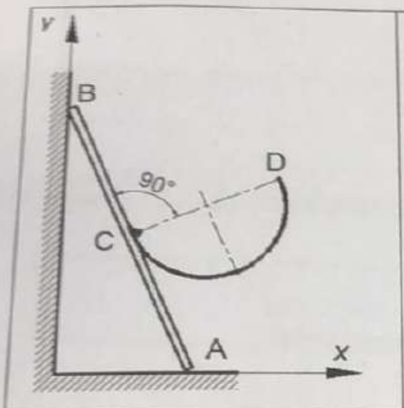
~~$a = 2Rk\sqrt{4 + 16}$~~

$$\boxed{a = 2Rk\sqrt{\cos^2\varphi + 16\sin^2\varphi}}$$

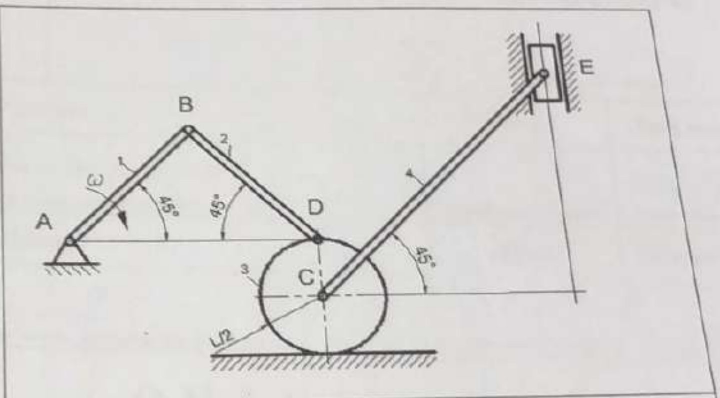
Mehanika 2, jun 2023.

G1

1. Tačka A rama prikazanog na slici kreće se po zakonu $x_A = 2L\cos(2t)$. Ako je $AC=CB=CD=L$ [m] odrediti jednačinu linije putanje tačke D, intenzitete brzine i ubrzanja i poluprečnik krivine trajektorjie tačke D u trenutku $t_1 = \pi/4$ [s]. Prilikom kretanja tačke A i B su neprekidno u kontaktu sa podlogom.



Slika uz zadatak 1



Slika uz zadatak 2

2. Štap 1 obrće se konstantnom ugaonom brzinom intenziteta ω. Ako su veze u tačkama A, B, D, C i E zglobne i dužina $AB=BD=L\sqrt{2}$ i $CE=2L\sqrt{2}$ odrediti brzinu i ubrzanje klizača E u položaju prikazanom na slici. Disk 3 može da se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj podlozi kao na slici.

3. U tački A(1,2,8) nalazi se nepokretan centar privlačenja materijalne tačke M, mase m, dok je u tački B (0.5,1,4) nepokretni centar odbijanja tačke M koja se kreće u polju sile Zemljine teže. Sila privlačenja ka centru A je proprocionalna rastojanju tačke od centra privlačenja sa koeficijentom privlačenja mk^2, dok je sila odbijanja od centra B proporcionalna rastojanju sa koeficijentom $2mk^2$. Ako je u početnom trenutku tačka M mirovala u tački sa koordinatama (2,3,0) odrediti konačne jednačine kretanja tačke M. Koordinate tačaka zadate su u odnosu na desno orijentisan Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxyz kod koga je osa Oz orijentisana vertikalno naviše.

Ispit traje 2 sata.

Srećan rad!

jun 2023.

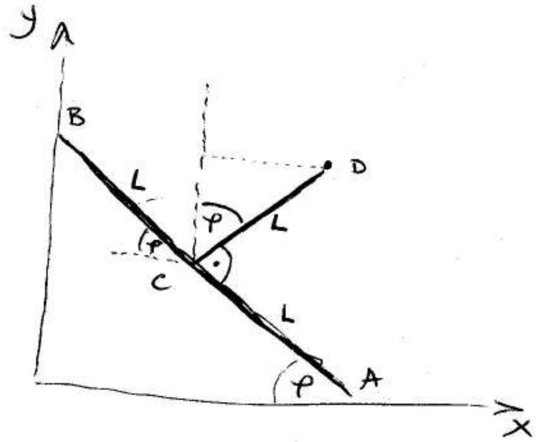
(1.) $x_A = 2L\cos(2t)$

$\overline{AC} = \overline{CB} = \overline{CD} = L$

linija putanje tačke D?

$v_D(t=\frac{\pi}{4})$? $a_D(t=\frac{\pi}{4})$? $R_K(t=\frac{\pi}{4})$?

$$\left.\begin{aligned} x_A &= 2L\cos(2t) \\ x_A &= 2L\cos(\varphi) \end{aligned}\right\} \quad \underline{\underline{\varphi = 2t}}$$



$$x_D = L\cos(\varphi) + L\sin(\varphi) = L\cos(2t) + L\sin(2t)$$
$$y_D = L\sin(\varphi) + L\cos(\varphi) = L\sin(2t) + L\cos(2t)$$

$\boxed{y_D = x_D}$ – linija putanje (prava)

$$\dot{x}_D = -2L\sin(2t) + 2L\cos(2t)$$
$$\dot{y}_D = 2L\cos(2t) - 2L\sin(2t)$$
$$\ddot{x}_D = -4L\cos(2t) - 4L\sin(2t)$$
$$\ddot{y}_D = -4L\sin(2t) - 4L\cos(2t)$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_D(t=\tfrac{\pi}{4}) &= -2L\cdot 1 + 2L\cdot 0 = -2L \\ \dot{y}_D(t=\tfrac{\pi}{4}) &= 2L\cdot 0 - 2L\cdot 1 = -2L \end{aligned}\right\} \quad \boxed{v_D(t=\tfrac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,L}$$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_D(t=\tfrac{\pi}{4}) &= -4L\cdot 0 - 4L\cdot 1 = -4L \\ \ddot{y}_D(t=\tfrac{\pi}{4}) &= -4L\cdot 1 - 4L\cdot 0 = -4L \end{aligned}\right\} \quad \boxed{a_D(t=\tfrac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}\,L}$$

$$R_K = \frac{v^3}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$$

$$R_K(t=\tfrac{\pi}{4}) = \frac{16\sqrt{2}\,L^3}{|8L^2 - 8L^2|} = \frac{16\sqrt{2}\,L^3}{0\,L^2} = \infty$$

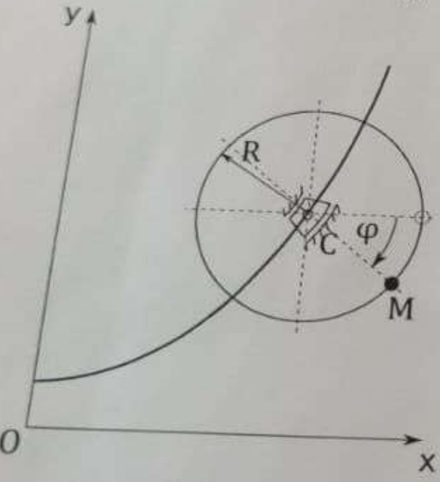
$\boxed{R_K(t=\frac{\pi}{4}) = \infty}$ – što je i logično, jer je u pitanju pravolinijsko kretanje (linija putanje je prava $y_D = x_D$)

Механика 2, 09.2.2023. група 2

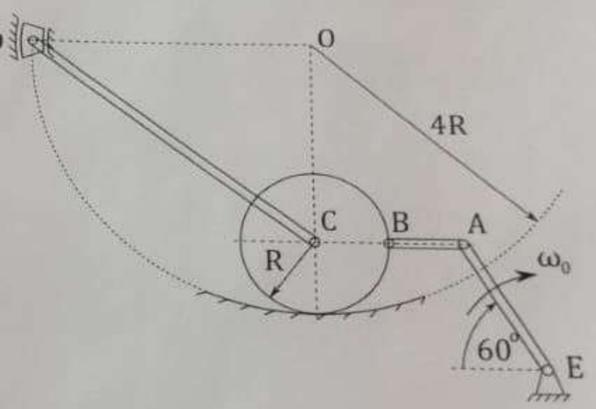
1. Клизач C креће се у равни Oxy дуж вођица које имају облик $y = e^x$ [m]. Пројекција убрзања клизача на осу Ox је $\ddot{x}_C = 2\,\frac{m}{s^2}$. Клизач C је зглобно везан за центар диска полупречника $R = \frac{5}{4}$ [m]. Диск може да се обрће око осе која пролази кроз његов центар C, а управна је на раван Oxy, по закону $\varphi = \pi t$ [rad]. У почетном тренутку клизач је мировао на оси Oy. На оси диска, која је у почетном тренутку била паралелна са осом Ox, круто је везана тачка M, као што је приказано на Сл. 1. Одредити:

а) коначне једначине кретања тачке M,
б) интензитет брзине тачке M у тренутку $t_1 = 1$ s,
в) интензитет убрзања тачке M у тренутку $t_1 = 1$ s,
г) полупречник кривине трајекторије тачке M у тренутку $t_1 = 1$ s.

2. Штап AB може да се обрће константном угаоном брзином ω_0 око осе која пролази кроз непокретни ослонац A. Штап BD је једним крајем зглобно везан за штап AB, а другим за диск (полупречника R), који може да се котрља по унутрашњости цилиндричне површи полупречника $4R$ са центром у тачки O. За центар диска зглобно је везан и штап CK, чији други крај је везан за клизач K. Клизач K може да се креће по кружној вођици полупречника $4R$ са центром у тачки O. Одредити брзину и убрзање клизача K, као и угаону брзину и угаоно убрзање диска у положају приказаном на Сл. 2. Познато је да је $\overline{AB} = 2R$ и $\overline{BD} = R$.

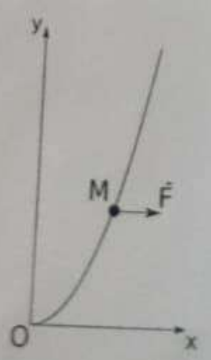


Слика 1



Слика 2

3. Тачка M масе $m = 4$ kg креће се по параболи $y = \frac{1}{4}x^2$ [m] у вертикалној равни, при чему на тачку делује и сила $\vec{F}$, константног правца и смера приказаног на Сл. 3. Уколико је брзина тачке $V = 2\sqrt{g}\,\frac{m}{s}$ (g је гравитационо убрзање), одредити реакцију везе у положају у коме је полупречник кривине трајекторије тачке $R_k = 4\sqrt{2}$ m.



Слика 3

februar 2023.

(1) vodice oblika $y=e^x$

$\ddot{x}_c = 2$

poluprečnik diska R

$\varphi=\pi t$

t_0: klizač C je mirovan položaj na osi Oy

1) j-ne kretanja tačke M ?

2) $v_M(t_1=1)$?

3) $a_M(t_1=1)$?

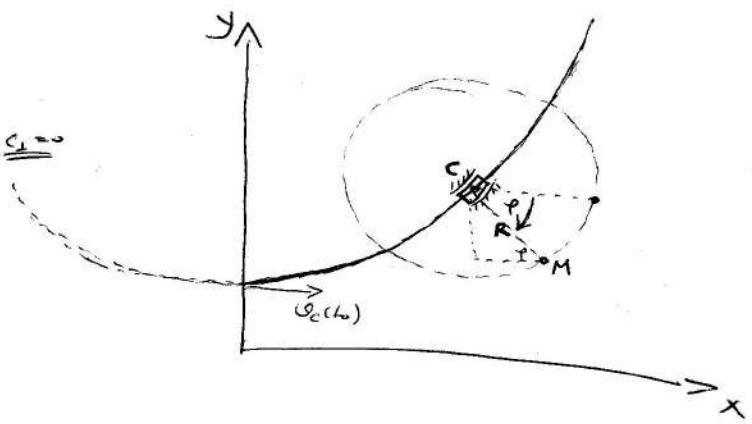
4) $R_{KM}(t_1=1)$?

$\ddot{x}_c = 2 \quad / \int dt$

$\dot{x}_c = 2t + c_1$

$\dot{x}_c(t_0=0) = 0 + c_1 = v_{cx}(t_0) = v_c(t_0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c_1=0}}$

$\dot{x}_c = 2t \quad / \int dt$



$x_c = t^2 + c_2$

$x_c(t_0) = 0 + c_2 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c_2=0}}$

$\underline{\underline{x_c = t^2}}$

$\underline{\underline{y_c = e^{t^2}}}$

$x_M = x_c + R\cos\varphi = t^2 + R\cos\pi t$

$y_M = y_c - R\sin\varphi = e^{t^2} - R\sin\pi t$

$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_M &= t^2 + R\cos\pi t \\ y_M &= e^{t^2} - R\sin\pi t \end{aligned}}$

j-ne kretanja

$\dot{x}_M = 2t - \pi R\sin\pi t$

$\dot{y}_M = 2t\cdot e^{t^2} - \pi R\cos\pi t$

$\ddot{x}_M = 2 - \pi^2 R\cos\pi t$

$\ddot{y}_M = 2e^{t^2} + 4t^2 e^{t^2} + \pi^2 R\sin\pi t$

$\dot{x}_M(t_1=1) = 2 - 0 = 2$

$\dot{y}_M(t_1=1) = 2\cdot e^1 + \pi R$

$\Rightarrow \boxed{v_M(t_1) = \sqrt{4 + (2e+\pi R)^2}}$

$\ddot{x}_M(t_1=1) = 2 + \pi^2 R$

$\ddot{y}_M(t_1=1) = 2e + 4e + 0 = 6e$

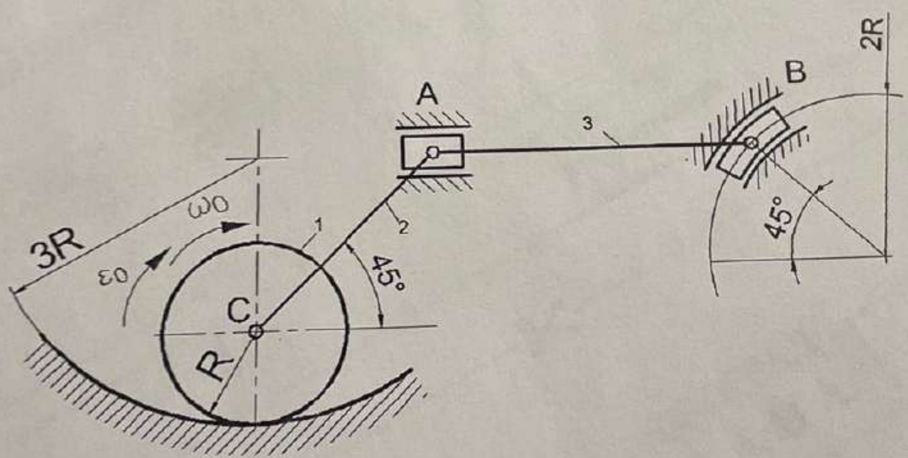
$\Rightarrow \boxed{a_M(t_1) = \sqrt{(2+\pi^2 R)^2 + (6e)^2}}$

$$\boxed{R_{KM}(t_1=1) = \frac{\left(\sqrt{4+(2e+\pi R)^2}\right)^3}{|12e - (2e+\pi R)(2+\pi^2 R)|}}$$

Mehanika 2, G1, januar

1. Tačka M kreće se tako da su joj projekcije ubrzanja $\ddot{x} = -\sin(kt)$ i $\ddot{y} = -\cos(kt)$, u odnosu na ose nepokretnog pravouglog Dekartovog koordinatnog sistema Oxy, gde je t vreme u sekundama, a k poznata pozitivna realna konstanta. Ako je tačka započela kretanje iz položaja $(0,\ 1/k^2)$ početnom brzinom $\overrightarrow{v_0} = \frac{1}{k}\vec{\imath} + 0\vec{\jmath}$ odrediti liniju putanje tačke i poluprečnik krivine trajektorije tačke u trenutku $t = \pi$. Sve veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema. Dato je k=1/2.

2. Disk 1 kotrlja se bez klizanja po glatkoj nepokretnoj podlozi i zglobno je vezan u tački C sa štapom AC. U tački A je klizač A koji može da se kreće duž vođica kao na slici. U tački B štap je zglobno vezan sa klizačem koji može da se kreće po kružnim vođicama kao na slici. Odrediti brzinu i ubrzanje klizača B u položaju prikazanom na slici ako je AC=AB=2R. U posmatranom položaju disk ima ugaonu brzinu intenziteta ω_0 i ugaono ubrzanje $\varepsilon_0 = \omega_0^2$.



Slika uz zadatak 2

3. Materijalna tačka M, mase m kreće se u polju sile Zemljine teže duž glatke stacionarne ravni čija je jednačina u odnosu na Dekartov pravougaoni koordinatni sistem Oxyz gde je osa Oz orijentisana vertikalno naviše data kao $2x + y + 2z = 6$. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(0,2,2)$ i imala je početnu brzinu $\overrightarrow{v_0} = 2\vec{\imath} - 2\vec{k}$. Odrediti konačne jednačine kretnja tačke M.

januar 2023.

1. $\ddot{x} = -\sin(kt)$

$\ddot{y} = -\cos(kt)$

t_0: položaj $(0, \frac{1}{k^2})$

$\vec{v}_0 = \frac{1}{k}\vec{i} + 0\vec{j}$

linija putanje?

$R_K(t=\pi)$?

$k = \frac{1}{2}$

$\ddot{x} = -\sin(\frac{1}{2}t) \quad /\int dt$

$\dot{x} = \int -\sin(\frac{1}{2}t)dt = \left\{ \begin{matrix} \mu = \frac{1}{2}t \\ d\mu = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right\} = -\int \sin\mu \cdot 2d\mu = 2\cos\mu + c_1 = 2\cos(\frac{1}{2}t) + c_1$

$\dot{x}(t_0) = 2\cdot 1 + c_1 = \frac{1}{k} = 2 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

$\dot{x} = 2\cos(\frac{1}{2}t) \quad /\int dt$

$x = \int 2\cos(\frac{1}{2}t)dt = \left\{ \begin{matrix} \mu = \frac{1}{2}t \\ d\mu = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right\} = 2\cdot\int \cos\mu \cdot 2d\mu = 4\sin\mu + c_2 = 4\sin(\frac{1}{2}t) + c_2$

$x(t_0) = 0 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$x = 4\sin(\frac{1}{2}t)$

$\ddot{y} = -\cos(\frac{1}{2}t) \quad /\int dt$

$\dot{y} = \int -\cos(\frac{1}{2}t)dt = \left\{ \begin{matrix} \mu = \frac{1}{2}t \\ d\mu = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right\} = -\int \cos\mu \, 2d\mu = -2\sin\mu + c_3 = -2\sin(\frac{1}{2}t) + c_3$

$\dot{y}(t_0=0) = 0 + c_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0$

$\dot{y} = -2\sin(\frac{1}{2}t) \quad /\int dt$

$y = \int -2\sin(\frac{1}{2}t)dt = \left\{ \begin{matrix} \mu = \frac{1}{2}t \\ d\mu = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right\} = -2\int \sin\mu \, 2d\mu = 4\cos\mu + c_4 = 4\cos(\frac{1}{2}t) + c_4$

$y(t_0=0) = 4 + c_4 = \frac{1}{k^2} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \quad \Rightarrow \quad c_4 = 0$

$y = 4\cos(\frac{1}{2}t)$

$\boxed{x^2 + y^2 = 16}$ – linija putanje (krug) , $R_K = \dfrac{v^3}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$

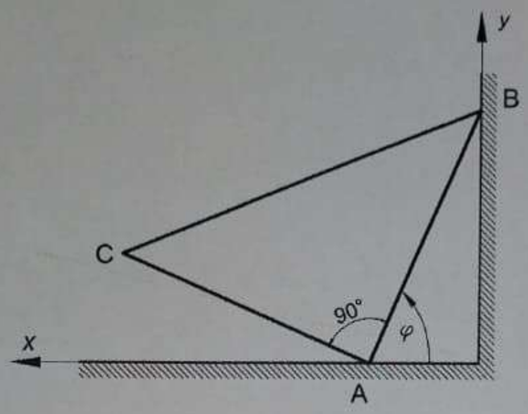
$\dot{x}(t=\pi) = 0 \qquad \dot{y}(t=\pi) = -2$

$\ddot{x}(t=\pi) = -1 \qquad \ddot{y}(t=\pi) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_K(t=\pi) = \dfrac{2^3}{|0 - 2|} = 4}$

Mehanika 2, oktobar 2022.

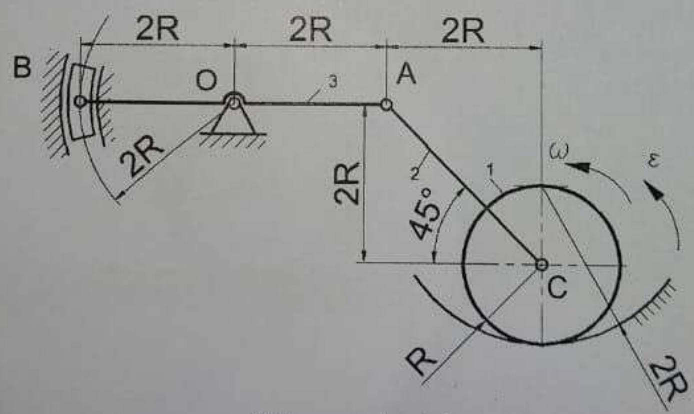
G2

1. Ploča ABC oblika pravouglog trougla može da se kreće kao na slici po zakonu $\varphi = 2t$, pri čemu su tačke A i B neprekidno u kontaktu sa podlogom. Ako je AB=AC=l odrediti konačne jednačine kretanja tačke C, njenu liniju putanje, kao i brzinu, ubrzanje i poluprečnik krivine trajektorije u trenutku $t_1=\pi/4$. Sve veličine zadate su u osnovnim jedinicama SI sistema.



Slika uz zadatak 1

2. Mehanizam prikazan na slici sastoji se od diska 1, poluge 2 i poluge 3, kao i klizača B. Disk 1 može da se kotrlja bez klizanja po nepokretnom cilindru poluprečnika 2R, kao na slici. Veze u tačkama A, B, O i C su zglobne. Ako je $\omega = \omega_0$ $\varepsilon = \omega_0{}^2$ odrediti brzinu i ubrzanje klizača B u položaju prikazanom na slici.



Slika uz zadatak 2

3. Materijalna tačka M, mase m, kreće se u polju sile Zemljine teže po glatkoj nepokretnoj ravni čija je jednačina u odnosu na desni Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxyz kod koga je osa Oz orijentisana vertikalno naviše data sa $2x+y+3z=10$. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(2,3,1)$ i imala je početnu brzinu $\overrightarrow{v_0} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.

oktobar 2022.

(1) $\varphi = 2t$

$\overline{AB} = \overline{AC} = \ell$

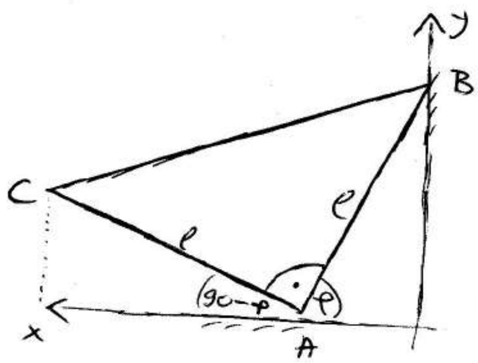
j-ne kretanja tačke C?

linija putanje?

$v(t=\frac{\pi}{4})$? $a(t=\frac{\pi}{4})$? $R_k(t=\frac{\pi}{4})$?

$x_c = x_A + \ell\cos(90-\varphi) = \ell\cos\varphi + \ell\sin\varphi$

$y_c = \ell\sin(90-\varphi) = \ell\cos(\varphi)$



$$\boxed{\begin{aligned} x_c &= \ell\cos 2t + \ell\sin 2t \\ y_c &= \ell\cos 2t \end{aligned}}$$ j-ne kretanja

$x_c = \ell\cos\varphi + \ell\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \ell\cos\varphi + \sqrt{\ell^2 - \ell^2\cos^2\varphi} = y_c + \sqrt{\ell^2 - y_c^2}$

$$\boxed{x_c = y_c + \sqrt{\ell^2 - y_c^2}}$$ linija putanje

$\dot{x}_c = -2\ell\sin(2t) + 2\ell\cos(2t)$

$\dot{y}_c = -2\ell\sin(2t)$

$\ddot{x}_c = -4\ell\cos(2t) - 4\ell\sin(2t)$

$\ddot{y}_c = -4\ell\cos(2t)$

$\dot{x}_c(t=\frac{\pi}{4}) = -2\ell\cdot 1 + 0 = -2\ell$

$\dot{y}_c(t=\frac{\pi}{4}) = -2\ell\cdot 1 = -2\ell$

$\ddot{x}_c(t=\frac{\pi}{4}) = -0 - 4\ell\cdot 1 = -4\ell$

$\ddot{y}_c(t=\frac{\pi}{4}) = -0$

$v(t=\frac{\pi}{4}) = \sqrt{4\ell^2 + 4\ell^2} = \sqrt{8\ell^2} \Rightarrow \boxed{v(t=\frac{\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,\ell}$

$a(t=\frac{\pi}{4}) = \sqrt{16\ell^2 + 0} = 4\ell \Rightarrow \boxed{a(t=\frac{\pi}{4}) = 4\ell}$

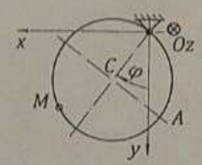
$R_k(t=\frac{\pi}{4}) = \dfrac{(2\sqrt{2}\,\ell)^3}{|-2\ell\cdot 0 - 8\ell^2|} = \dfrac{16\ell^3}{8\ell^2} \Rightarrow \boxed{R_k(t=\frac{\pi}{4}) = 2\ell}$

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
25.8.2022.

Mehanika 2

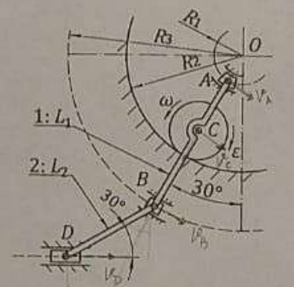
Septembarski ispitni rok 2022. – grupa 2

1. Žica, savijena u oblik kružnice poluprečnika $2R$, obrće se po zakonu $\varphi = t$ oko ose Oz upravne na ravan slike. Zakon kretanja prstena M po žici je $s = \overset{\frown}{AM} = 2Rt$. Odrediti poluprečnik krivine trajektorije prstena M u trenutku t_1 $(t_1 > 0)$, kada je vektor njegove sektorske brzine prvi put $\vec{S_1} = -6R^2\vec{k}$.



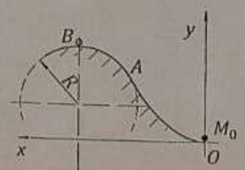
Slika uz zadatak 1.

2. Mehanizam se sastoji od: diska poluprečnika R koji se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj cilindričnoj površi poluprečnika $R_2 = 4R$, štapa 1 dužine $L_1 = 5R$ koji je u tački C zglobno vezan za centar diska, a na krajevima za klizače A i B, koji mogu da se kreću u kružnim vođicama poluprečnika $R_1 = R$ i $R_3 = 6R$ i štapa 2 dužine $L_2 = 2\sqrt{3}R$ koji je jednim krajem zglobno vezan za klizač B, a drugim krajem za klizač D u pravolinijskoj vođici. Zamišljene kružnice po kojima se kreću klizači A i B, kao i kružnica koja definiše cilindričnu površ po kojoj se kreće disk su koncentrične, sa zajedničkim centrom u tački O. Ako su u položaju mehanizma prikazanom na slici poznati ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska $\omega_D = \omega$ i $\varepsilon_D = 3\omega^2$, smera kao na slici, kao i uglovi od 30° koje štapovi 1 i 2 zaklapaju sa odgovarajućim ortogonalnim pravcima (videti sliku), odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja svih tela kao i brzinu i ubrzanje klizača D u datom položaju.



Slika uz zadatak 2.

3. Po idealno glatkoj putanji, oblika dela parabole $y = x^2$ [m], koja se nalazi u vertikalnoj ravni (Oy osa je vertikalna), kreće iz početnog položaja $M_0(0,0)$ materijalna tačka M mase m. U tački $A\left(\sqrt{3}/_2, y_A\right)$, putanja glatko prelazi u kružni luk poluprečnika $R = 1$ m. Odrediti minimalni intenzitet početne brzine koju treba saopštiti tački, kako bi ona dospela u tačku B. U kom položaju bi se tačka M odvojila od putanje kada bi tački bila saopštena početna brzina $v_0 = \sqrt{3g}$.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

septembar 2022.

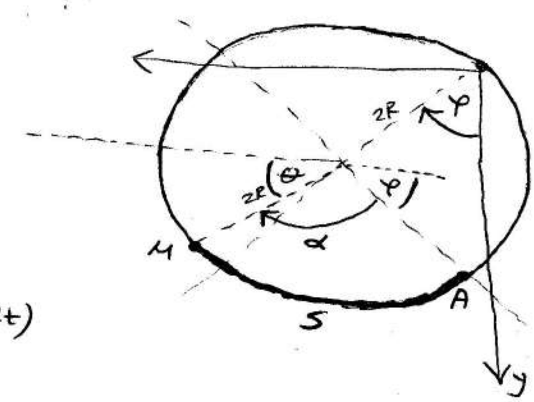
1. $\varphi = t$

$s = \widehat{AM} = 2Rt$

$2R$ poluprecnik

$R_{KM}(t_1)$? t_1 - trenutak kada je $\vec{S}'$ prvi put $\vec{S}' = -6R^2\vec{k}$, $t_1 > 0$

$S = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$



$\varphi = t$

$\alpha = \frac{s}{2R} = \frac{2Rt}{2R} = t$

$\theta = \pi - \varphi - \alpha = \pi - 2t$

$x_M = 2R\sin\varphi + 2R\cos\theta = 2R\sin t + 2R\cos(\pi - 2t)$

$x_M = 2R\sin t - 2R\cos(2t)$

$y_M = 2R\cos\varphi + 2R\sin\theta = 2R\cos t + 2R\sin(\pi - 2t)$

$y_M = 2R\cos t + 2R\sin(2t)$

$\dot{x}_M = 2R\cos t + 4R\sin(2t)$

$\dot{y}_M = -2R\sin t + 4R\cos(2t)$

$\ddot{x}_M = -2R\sin t + 8R\cos 2t$

$\ddot{y}_M = -2R\cos t - 8R\sin 2t$

$S = \frac{1}{2}(-4R^2\sin^2 t + 8R^2\sin t\cos 2t + 4R^2\sin t\cos 2t - 8R^2\cos^2 2t -$

$- (4R^2\cos^2 t + 8R^2\sin 2t\cos t + 4R^2\sin 2t\cos t + 8R^2\sin^2 2t))$

$S = \frac{1}{2}\cdot 4R^2(-(\cos^2 t + \sin^2 t) - 2(\cos^2 2t + \sin^2 2t) + 3(\sin t\cos 2t - \sin 2t\cos t))$

$S = 2R^2(-3 + 3(\sin(t - 2t))) = -6R^2(1 - \sin(-t)) = -6R^2(1 + \sin t)$

$S(t_1) = -6R^2(1 + \sin t_1) = -6R^2$

$\Rightarrow \quad 1 + \sin t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin t_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0$ - ne prihvata se (treba $t_1 > 0$)

$\underline{t_1 = \pi}$

$\dot{x}_M(t_1 = \pi) = -2R + 0 = -2R$

$\dot{y}_M(t_1 = \pi) = 0 + 4R = 4R$

$\ddot{x}_M(t_1 = \pi) = 0 + 8R = 8R$

$\ddot{y}_M(t_1 = \pi) = 2R + 0 = 2R$

$$R_{KM}(t_1 = \pi) = \frac{\left(\sqrt{(-2R)^2 + (4R)^2}\right)^3}{|-2R\cdot 2R - 4R\cdot 8R|} = \frac{\left(\sqrt{20R^2}\right)^3}{|-36R^2|} = \frac{(2\sqrt{5})^3 R^3}{36R^2} = \frac{40\sqrt{5}R}{36}$$

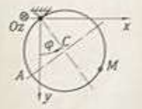
$$\boxed{R_{KM}(t_1 = \pi) = \frac{10\sqrt{5}R}{9}}$$

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
23.6.2022.

Mehanika 2

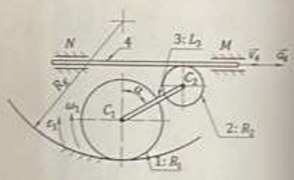
Julski ispitni rok 2022 – grupa 1

1. Žica, savijena u oblik kružnice poluprečnika R, obrće se po zakonu $\varphi = t$ oko ose Oz upravne na ravan slike. Zakon kretanja prstena M po žici je $s = \overset{\frown}{AM} = 2Rt$. Odrediti poluprečnik krivine trajektorije prstena M u trenutku t_1 ($t_1 > 0$), kada je vektor njegove sektorske brzine prvi put $\vec{S_1} = -2R^2\vec{k}$.



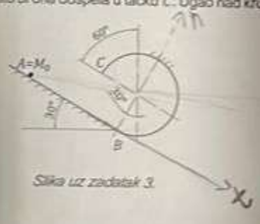
Slika uz zadatak 1.

2. Mehanizam se sastoji od: diska 1 poluprečnika $R_1 = 2R$ koji se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj cilindričnoj površi poluprečnika $R_K = (4\sqrt{3}+2)R$, štapa 3 dužine $L_3 = 4R$ koji je zglobno vezan za centre diskova C_1 i C_2 i diska 2 poluprečnika $R_2 = R$ koji se kotrlja po letvi 4, koja može da se kreće duž vođica M i N, kao na slici 2. Tela 2 i 4 ostaju u kontaktu za sve vreme kretanja mehanizma i u njihovoj tački dodira nema klizanja. Ako su u položaju mehanizma prikazanom na slici poznati ugaona brzina i ugaono ubrzanje diska 1, $\omega_1 = 2\omega_0$ i $\varepsilon_1 = 2\omega_0^2$ i brzina i ubrzanje štapa 4, $v_4 = R\omega_0$ i $a_4 = R\omega_0^2/3$, smera kao na slici, kao i ugao $\alpha = 60°$, odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja svih tela u datom položaju.



Slika uz zadatak 2.

3. U vertikalnoj ravni, u homogenom polju sile zemljine teže, po hrapavoj strmoj ravni nagibnog ugla 30° u odnosu na horizontalu, iz početnog položaja M_0, kretanje započinje materijalna tačka M mase m. U tački B ($\overline{AB} = 2R$) strma ravan prelazi u glatki kružni luk poluprečnika R. Koeficijent trenja klizanja između strme ravni i tačke M je $\mu = {}^{1}/_{2\sqrt{3}}$. Odrediti minimalni intenzitet početne brzine koju treba saopštiti tački, kako bi ona dospela u tačku C. Ugao nad kružnim lukom $\overset{\frown}{BC}$ je 270°.



Slika uz zadatak 3.

Formular sa zadacima obavezno predati sa ispitnom sveskom.

jul 2022

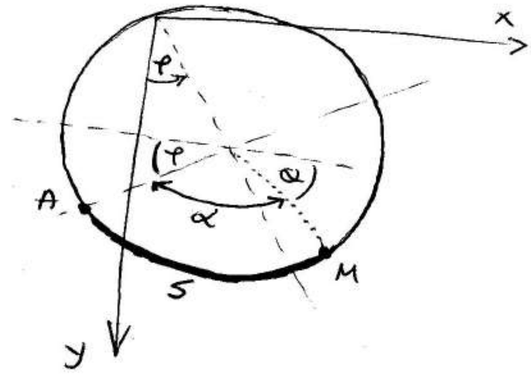
① $\varphi = t$

$s = \widehat{AM} = 2Rt$

R poluprečnik

$R_{KM}(t_1)$? t_1 - trenutak kada je $\vec{S}$ prvi put $\vec{S} = -R^2\vec{k}$, $t_1 > 0$

$S = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$



$\varphi = t$

$\alpha = \frac{s}{R} = \frac{2Rt}{R} = 2t$

$\theta = \pi - \alpha - \varphi = \pi - 3t$

$x_M = R\sin\varphi + R\cos\theta = R\sin t + R\cos(\pi - 3t)$

$x_M = R\sin t - R\cos 3t$

$y_M = R\cos\varphi + R\sin\theta = R\cos t + R\sin(\pi - 3t)$

$y_M = R\cos t + R\sin 3t$

$\dot{x}_M = R\cos t + 3R\sin 3t$

$\dot{y}_M = -R\sin t + 3R\cos 3t$

$\ddot{x}_M = -R\sin t + 9R\cos 3t$

$\ddot{y}_M = -R\cos t - 9R\sin 3t$

$S = \frac{1}{2}\Big(-R^2\sin^2 t + 3R^2\sin t\cos 3t + R^2\sin t\cos 3t - 3R^2\cos^2 3t -$
$- \big(R^2\cos^2 t + 3R^2\sin 3t\cos t + R^2\sin 3t\cos t + 3R^2\sin^2 3t\big)\Big)$

$S = \frac{1}{2}R^2\Big(-(\sin^2 t + \cos^2 t) - 3(\cos^2 3t + \sin^2 3t) + 4(\sin t\cos 3t - \sin 3t\cos t)\Big)$

$S = \frac{1}{2}R^2 \cdot 4\big(-1 + \sin(t - 3t)\big) = 2R^2\big(-1 - \sin(2t)\big) = -2R^2(1 + \sin 2t)$

$S(t_1) = -2R^2(1 + \sin 2t_1) = -2R^2$

$\Rightarrow \quad 1 + \sin(2t_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin(2t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1 = 0$ - ne odgovara (treba $t_1 > 0$)

$\underline{\underline{t_1 = \frac{\pi}{2}}}$

$\dot{x}_M(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 0 - 3R = -3R$

$\dot{y}_M(t_1 = \frac{\pi}{2}) = -R + 0 = -R$

$\ddot{x}_M(t_1 = \frac{\pi}{2}) = -R + 0 = -R$

$\ddot{y}_M(t_1 = \frac{\pi}{2}) = -0 + 9R = 9R$

$R_{KM}(t_1 = \frac{\pi}{2}) = \frac{\left(\sqrt{(-3R)^2 + (-R)^2}\right)^3}{|-3R \cdot 9R - (-R)\cdot(-R)|} = \frac{\left(\sqrt{10R^2}\right)^3}{|-28R^2|} = \frac{10\sqrt{10}R^3}{28R^2} = \frac{5\sqrt{10}R}{14}$

$$\boxed{R_{KM}(t_1 = \frac{\pi}{2}) = \frac{5\sqrt{10}R}{14}}$$

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Mehaniku
13.01.2022.

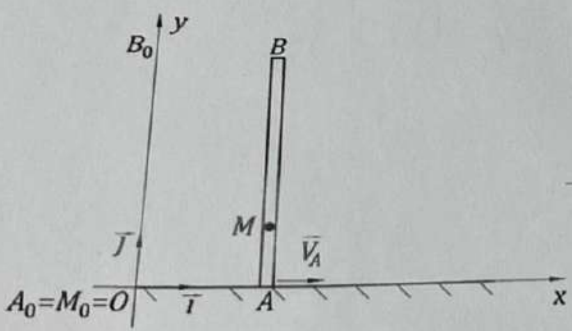
Mehanika 2

Januarski ispitni rok 2022

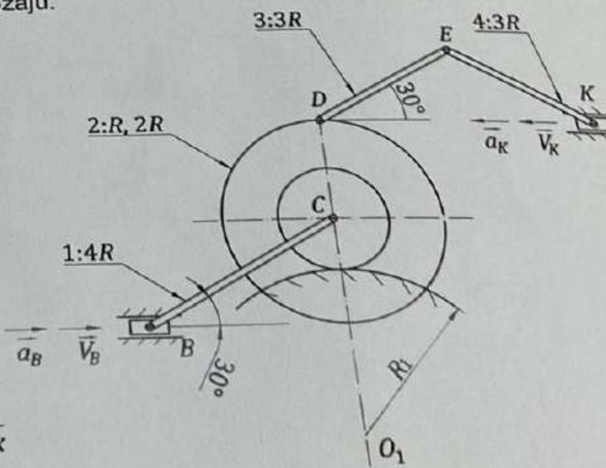
1. Cev AB, dužine $\overline{AB} = h$, kreće se po nepokretnoj podlozi duž pravca ose Ox i ostaje paralelna osi Oy tokom kretanja. U početnom trenutku, položaj cevi se poklapao sa osom Oy. Brzina tačke A, za sve vreme kretanja, data je sa $\vec{V}_A = \pi\vec{i}$. Unutar cevi AB kreće se kuglica M po zakonu $\overline{AM} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\cos(\pi t)$. Dato je $h = 1$. Sve veličine su u osnovnim jedinicama *SI* sistema. Odrediti:

   a) konačne jednačine kretanja tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem Oxy,
   b) trajektoriju tačke M (skicirati),
   c) hodograf brzine tačke M (skicirati),
   d) vektor ubrzanja i poluprečnik krivine trajektorije tačke M u trenutku kada intenzitet brzine ima najmanju vrednost.

2. Mehanizam se sastoji od: klizača B, štapa 1 (BC) dužine $\overline{BC} = 4R$, koaksijalnog diska 2 poluprečnika R i $2R$, štapa 3 (DE) dužine $\overline{DE} = 3R$, štapa 4 (EK) dužine $\overline{EK} = 3R$ i klizača K. Koaksijalni disk se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj cilindričnoj površi poluprečnika $R_1 = 3R$. Veze u tačkama B, C, D, E i K su zglobne. Ako su u položaju mehanizma prikazanom na slici, brzina i ubrzanje klizača B intenziteta $V_B = 2\omega_0 R$ i $a_B = \omega_0^2 R$, smera kao na slici, a brzina i ubrzanje klizača K intenziteta $V_K = 6\omega_0 R$ i $a_K = 4\omega_0^2 R$, smera kao na slici, odrediti ugaone brzine i ugaona ubrzanja svih tela mehanizma u datom položaju.

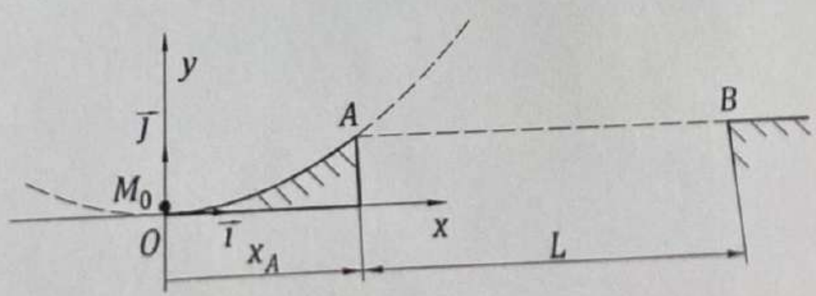


Slika uz zadatak 1.



Slika uz zadatak 2.

3. Po idealno glatkoj skakaonici, oblika dela parabole $y = {}^1\!/_4\, x^2$ [m], koja se nalazi u vertikalnoj ravni (Oy osa je vertikalna), kreće se iz početnog položaja $M_0(0,0)$ materijalna tačka M mase m. Odrediti početnu brzinu koju treba saopštiti tački, kako bi ona nakon napuštanja veze (skakaonice) u tački A, premostila jaz dužine $L = 8$ m i stigla u tačku B. Otpor sredine zanemariti. Dužina skakaonice je $x_A = 2$ m. Odrediti poluprečnik krivine skakaonice u tački A.



Slika uz zadatak 3.

januar 2022.

① $\overline{AB} = h$

t_0: cev se poklapala sa Oy

$\vec{v}_A = \pi \cdot \vec{i}$ – brzina cevi

$\overline{AM} = \frac{h}{2} - \frac{h}{2}\cos(\pi t)$

$h = 1$

1) j-ne kretanja tačke M ?

2) trajektorija tačke M (skica) ?

3) hodograf brzine tačke M (skicirati) ?

4) $\vec{a}(t_1)$? ; $R_K(t_1)$?

t_1 – trenutak kada je v_{min}

$\dot{x}_M = v_A = \pi \quad / \int dt$

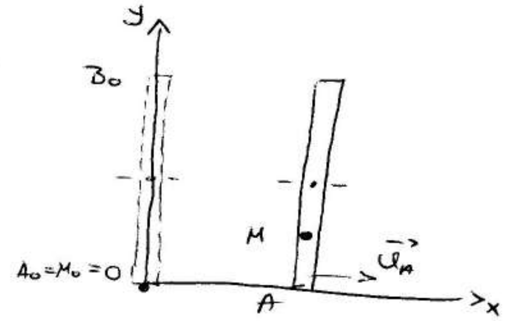
$x_M = \pi t + c_1$

$x_M(t_0 = 0) = 0 + c_1 = 0$

$\underline{x_M = \pi t}$

$y_M = \overline{AM}$

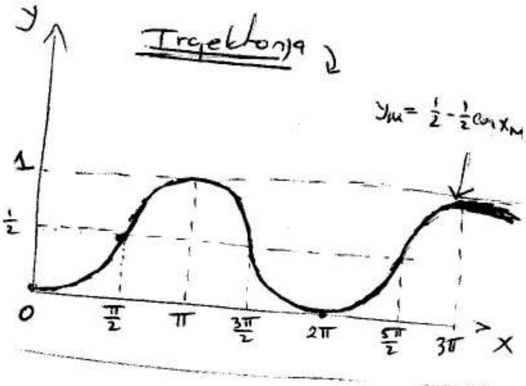
$\underline{y_M = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi t)$}



j-ne kretanja

$$\boxed{\begin{aligned} x_M &= \pi t \\ y_M &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\pi t) \end{aligned}}$$

$y_M = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x_M$ – linija putanje

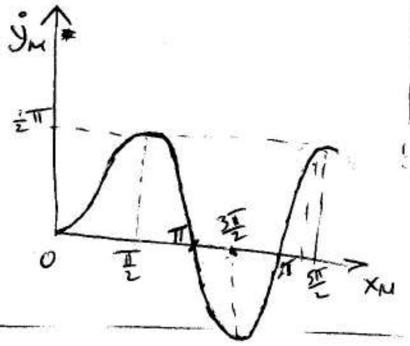


$\dot{x}_M = \pi$

$\dot{y}_M = \frac{1}{2}\pi \sin(\pi t)$

$\Rightarrow \dot{y}_M = \frac{1}{2}\pi \sin(x_M)$

↳ hodograf brzine



---

v_{min} – tražimo trenutak t_1 kada je v_{min} $\quad v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2}$

$\dot{x}_M = const \Rightarrow v$ zavisi samo od $\dot{y}_M$, minimalno je kada je $\dot{y}_M = 0$

$\Rightarrow \underline{t_1 = 0}$

$\dot{x}_M(t_1 = 0) = \pi$

$\dot{y}_M(t_1 = 0) = 0$

$\ddot{x}_M = 0$

$\ddot{y}_M = \frac{1}{2}\pi^2 \cos(\pi t)$

$\ddot{x}_M(t_1 = 0) = 0$

$\ddot{y}_M(t_1 = 0) = \frac{1}{2}\pi^2$

$$\boxed{\vec{a}(t_1 = 0) = 0 \cdot \vec{i} + \frac{1}{2}\pi^2 \cdot \vec{j}}$$

$$R_K = \frac{v^3}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$$

$$R_K(t_1 = 0) = \frac{\pi^3}{|\pi \cdot \frac{1}{2}\pi^2 - 0|} = \frac{\cancel{\pi^3}}{\frac{1}{2}\cancel{\pi^3}} = 2$$

$$\boxed{R_K(t_1 = 0) = 2}$$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

МЕХАНИКА 2

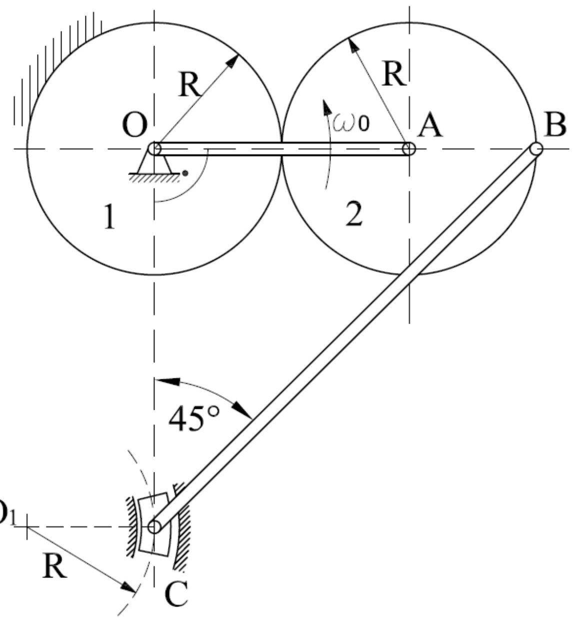
МЕХ 210-1172

06. септембар 2021.

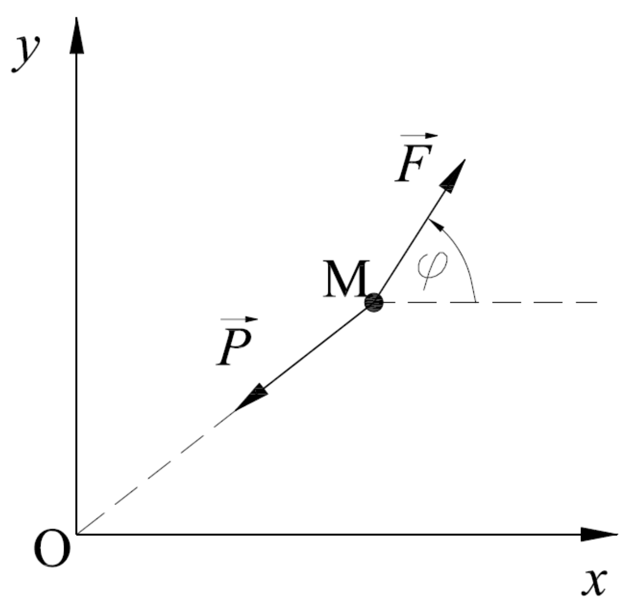
1. Тачка M креће се у равни xOy сагласно коначним једначинама кретања: $x(t) = 3t\,[\mathrm{m}]$ и $y(t) = t^2 + 3t\,[\mathrm{m}]$. Време t мери се у секундама. Одредити полупречник кривине трајекторије тачке у тренутку када је њена секторска брзина $\vec{S}(t_1) = 6\vec{k}\,[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$.

2. Механизам, приказан на слици 1, састоји се од криваје OA, штапа BC, клизача C и диска 2 полупречника R (слика 1). Диск 2 котрља се без клизања по непомичном диску 1 полупречника R. Клизач C креће се по кружним вођицама полупречника R. Криваја OA обрће се константном угаоном брзином ω_0. Везе у тачка O, A, B и C су зглобне. Одредити, у положају приказаном на слици, угаону брзину и угаоно убрзање штапа BC као и брзину и убрзање клизача C.

3. Материјална тачка M, масе m, креће се по глаткој хотизонталној равни xOy под дејством сила $\vec{P}$ и $\vec{F}$ (слика 2). Сила $\vec{P}$ сразмерна је растојању тачке M од координатног почетка O са коефицијентом сразмере mk^2 и стално је усмерена ка тачки O, при чему је k позитивна константа. Сила $\vec{F}$ константног је интензитета F_0, њена линија дејства лежи у хоризонталној равни, а угао између позитивног смера осе Ox и ње мења се по закону $\varphi = \omega t$, при чему је ω позитивна константа ($\omega \neq k$). Ако је у почетном тренутку тачка мировала у координатном почетку, одредити коначне једначине кретања тачке.



Слика 1



Слика 2

oktobar 2021

(1) $x = 3t$

$y = t^2 + 3t$

$R_K(t_1)$? , t_1 - trenutak kada je $\vec{S} = 6\vec{k}$

$S = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$

$x = 3t$ $\qquad \dot{x} = 3$ $\qquad \ddot{x} = 0$

$y = t^2 + 3t$ $\qquad \dot{y} = 2t + 3$ $\qquad \ddot{y} = 2$

$S = \frac{1}{2}\left(3t(2t+3) - (t^2+3t)\cdot 3\right) = \frac{1}{2}(6t^2 + 9t - 3t^2 - 9t) = \frac{1}{2}3t^2 = \frac{3}{2}t^2$

$S(t_1) = \frac{3}{2}t_1^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad t_1^2 = \frac{6\cdot 2}{3} = 4 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_1 = 2}}$

$R_K = \frac{v^3}{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}$

$\dot{x}(t_1 = 2) = 3$ $\qquad \ddot{x}(t_1 = 2) = 0$

$\dot{y}(t_1 = 2) = 4 + 3 = 7$ $\qquad \ddot{y}(t_1 = 2) = 2$

$R_K(t_1 = 2) = \frac{\left(\sqrt{3^2 + 7^2}\right)^3}{|3\cdot 2 - 7\cdot 0|} = \frac{\left(\sqrt{58}\right)^3}{6} = \frac{58\sqrt{58}}{6} = \frac{29\sqrt{58}}{3}$

$$\boxed{R_K(t_1 = 2) = \frac{29\sqrt{58}}{3}}$$

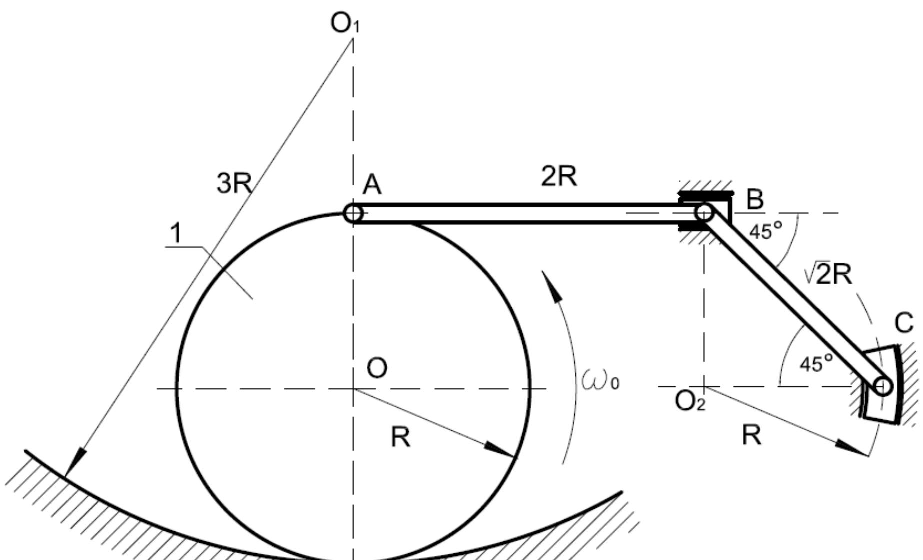
УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

МЕХАНИКА 2

МЕХ 210-1172
19. август 2021.
Прва група

1. Тачка M креће се по кружници полупречника $R = 12\text{m}$ тако да јој је пројекција брзине на правац тангенте $V_T(t) = 2\pi t[\text{m/s}]$. Одредити угао између брзине и убрзања тачке M у тренутку када њен пређени пут износи $S(t_1) = 9\pi[\text{m}]$.

2. Диск 1, полупречника R, котрља се без клизања по унутрашњости непомичне цилиндричне површи облика кружног цилиндра полупречника $3R$ константном угаоном брзином ω_0 (слика 1). За тачку A диска зглобно је везан штап A, дужине $2R$, чији је крај B зглобно везан за клизач који се креће дуж праволинијских вођица. Тачка C штапа BC дужине $\sqrt{2}R$, зглобно је везана за клизач који се креће по кружним вођицама полупречника R. Одредити брзину и убрзање клизача C, као и угаоне брзине и угаона убрзања свих чланова механизма у положају приказаним на слици.



Слика 1

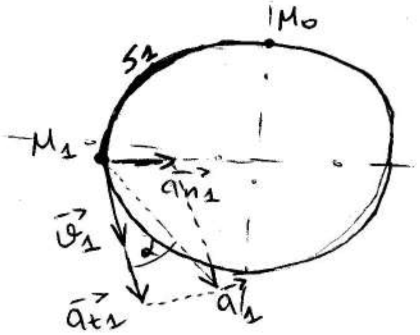
3. Материјална тачка M, јединичне масе, креће се по глаткој правој датој једначинама $2x + y + z = 0$ и $x + 2y - 4z = 0$. На тачку делује сила Земљине теже и сила вискозног трења $\vec{F}_{TV} = -k\vec{V}$, где је k позитивна константа. Ако је тачка започела кретање из координатног почетка из стања мировања, одредити коначне једначине кретања тачке. Оса Oz усмерена је вертикално навише.

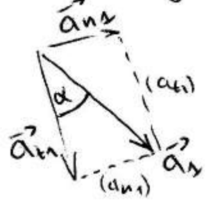
septembar 2021.

① kretanje po kružnici $R = 12$

$v = 2\pi t$

$\sphericalangle(\vec{v}(t_1), \vec{a}(t_1)) = ?$, t_1 - trenutak kada pređeni put iznosi 9π





traži se ugao α (između $\vec{v}_1$ i $\vec{a}_1$)

tehnički gledano, to je ugao između $\vec{a}_{t1}$ i $\vec{a}_1$

=> nađemo a_{t1} i a_{n1} i dobili smo $tg\,\alpha = \frac{a_{n1}}{a_{t1}}$

=> $\alpha_1 = \text{arctg}\left(\frac{a_{n1}}{a_{t1}}\right)$

=> $\underline{\underline{a_{t1} = ?}}$, $\underline{\underline{a_{n1} = ?}}$

$$s = \int v\,dt = \int 2\pi t\,dt = \pi t^2 + \cancel{c_1}^{\,=0} = \pi t^2$$

(početni pređeni put je nula: $s(t_0=0) = \pi \cdot 0 + c_1 = 0$ => $c_1 = 0$)

$v = 2\pi t$

$a_t = 2\pi$

$$a_n = \frac{v^2}{R_k} = \frac{4\pi^2 t^2}{R} = \frac{4\pi^2 t^2}{12} = \frac{\pi^2 t^2}{3}$$

treba nam t_1. s obzirom da tačka ne menja smer kretanja, pređeni put je uvek jednak s koordinati, pa možemo pisati

$s(t_1) = \pi t_1^2 = 9\pi$ => $t_1^2 = 9$ => $\underline{\underline{t_1 = 3}}$

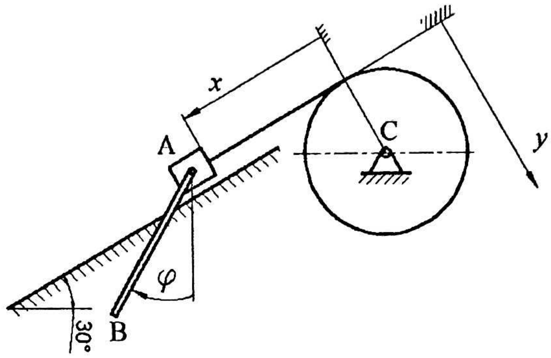
$a_{t1} = 2\pi$, $a_{n1} = \frac{\pi^2 \cdot 3^2}{3} = 3\pi^2$

$$\alpha = \text{arctg}\left(\frac{3\pi^2}{2\pi}\right) = \text{arctg}\left(\frac{3\pi}{2}\right) \approx 78^\circ$$

$\boxed{\alpha = 78^\circ}$

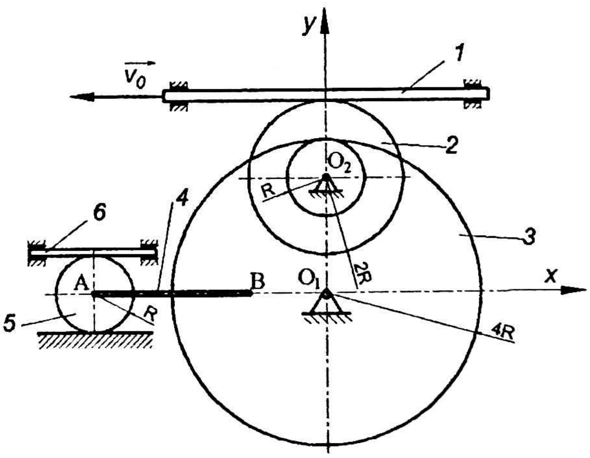
Mehanika 2, G1, jun 2021.

1. Klizač A zanemarljivih dimenzija kreće se po zakonu $x = \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$ $[m]$ po strmoj ravni kao na slici. Za klizač je zglobno vezan štap AB dužine l koji može da se obrće oko tačke A po zakonu $\varphi = 2t$ $[rad]$ kao na slici. Odrediti liniju putanje tačke B ($f(x_B, y_B)=0$), kao i intenzitet brzine, ubrzanja i poluprečnik krivine trajektorije tačke B u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{6}$ $[s]$.



Slika uz zadatak 1

2. Štap 1 kreće se konstantom brzinom v_0 i paralelan je sa osom O_1x. Veze u tačkama O_1, O_2, A i B su zglobne. Zupčasti štap 1 dovodi u kretanje koakcijalni zupčasti disk 2, poluprečnika R i 2R, a on dovodi u kretanje ozubljeni disk 3 poluprečnika 4R. Štap 4 je na osi O_1x. Disk 5 poluprečnika R može da se kotrlja bez klizanja po nepokretnoj podlozi paralelnoj osi O_1x i dovodi u kretanje štap 6. Između pokretnih elemenata sistema nema klizanja. Odrediti brzinu i ubrzanje štapa 6 u prikazanom položaju. AB=4R, BO_1=2R.



Slika uz zadatak 2

3. Materijalna tačka M, mase m kreće se u polju Zemljine teže po glatkoj nepokretnoj ravni čija je jednačina u odnosu na Dekartov pravougli koordinatni sistem Oxyz kod koga je osa Oz orijentisana vertikalno naviše data sa $x + y + 2z = 4$. U početnom trenutku tačka je bila u položaju $M_0(0,0,2)$ i imala je početnu brzinu $\vec{v_0} = 2\vec{i}$. Odrediti konačne jednačine kretnja tačke M i intenzitet reakcije veze.

jun 2021

(1.) $x_A = \sin(2t + \frac{\pi}{6})$

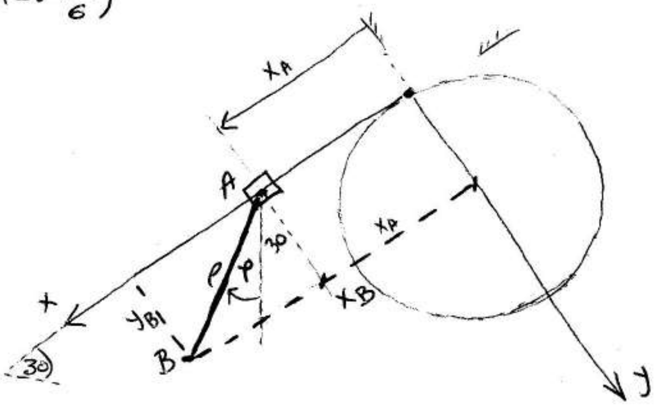
$\overline{AB} = \ell$

$\varphi = 2t$

linija putanje tačke B?

$v_B(t_1)$? $a_B(t_1)$? $R_K(t_1)$? , $t_1 = \frac{\pi}{6}$

$$x_B = x_A + \ell \sin(\varphi + 30) = \sin(2t + \frac{\pi}{6}) + \ell \sin(2t + \frac{\pi}{6})$$
$$y_B = \ell \cos(\varphi + 30) = \ell \cos(2t + \frac{\pi}{6})$$



$$\dot{x}_B = 2\cos(2t + \frac{\pi}{6}) + 2\ell \cos(2t + \frac{\pi}{6})$$
$$\dot{y}_B = -2\ell \sin(2t + \frac{\pi}{6})$$

$$\ddot{x}_B = -4\sin(2t + \frac{\pi}{6}) - 4\ell \sin(2t + \frac{\pi}{6})$$
$$\ddot{y}_B = -4\ell \cos(2t + \frac{\pi}{6})$$

linija putanje:

$$x_B = \sin(2t + \frac{\pi}{6})(1 + \ell) \Rightarrow \sin(2t + \frac{\pi}{6}) = \frac{x_B}{1+\ell}$$
$$y_B = \ell \cos(2t + \frac{\pi}{6}) \Rightarrow \cos(2t + \frac{\pi}{6}) = \frac{y_B}{\ell}$$

$\Rightarrow$ linija putanje $\boxed{\left(\frac{x_B}{1+\ell}\right)^2 + \left(\frac{y_B}{\ell}\right)^2 = 1}$

$$\dot{x}_B(t_1 = \frac{\pi}{6}) = 2 \cdot \cos(\frac{\pi}{2}) + 2\ell \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$\dot{y}_B(t_1 = \frac{\pi}{6}) = -2\ell \sin(\frac{\pi}{2}) = -2\ell$$

$\Rightarrow \boxed{v_B(t_1 = \frac{\pi}{6}) = 2\ell}$ $\left(v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2}\right)$

$$\ddot{x}_B(t_1 = \frac{\pi}{6}) = -4 \cdot 1 - 4 \cdot \ell = -4(1+\ell)$$
$$\ddot{y}_B(t_1 = \frac{\pi}{6}) = -4\ell \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow \boxed{a_B(t_1 = \frac{\pi}{6}) = 4(1+\ell)}$ $\left(a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2}\right)$

$$R_K(t_1 = \frac{\pi}{6}) = \frac{(2\ell)^3}{|0 - (-2\ell)\cdot(-4(1+\ell))|} = \frac{8\ell^3}{8\ell(1+\ell)} = \frac{\ell^2}{1+\ell}$$

$$\boxed{R_K(t_1 = \frac{\pi}{6}) = \frac{\ell^2}{1+\ell}}$$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35

http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

МЕХАНИКА 2

МЕХ 210-1172

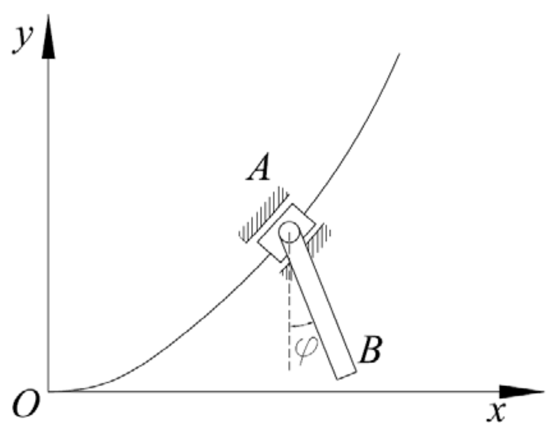
30. јануар 2021.

Прва група

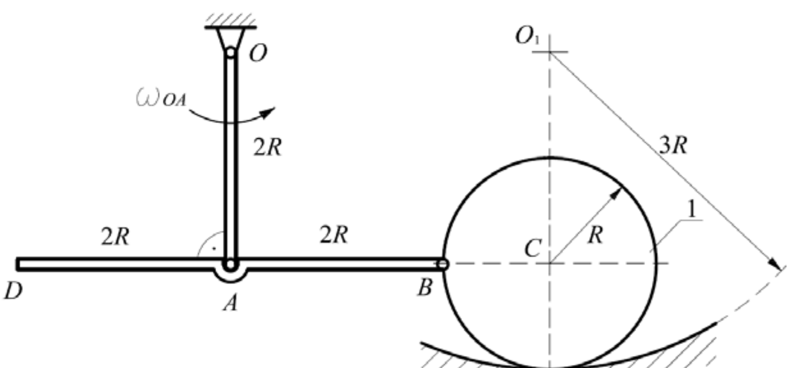
1. Клизач A креће се у равни Oxy дуж вођица које имају облик $y = x^2\,[\mathrm{m}]$ тако да пројекција убрзања на осу Ox износи $\ddot{x}_A = 0$ (слика 1). За клизач A зглобно је везан штап AB дужине $\overline{AB} = 1\mathrm{m}$. Угао између штапа AB и правца паралелног оси Oy мења се по закону $\varphi = t\,[\mathrm{rad}]$. У почетном тренутку клизач је био у координатном почетку и имао брзину интензитета $V_0 = 2\mathrm{m/s}$.
Одредити:

1) коначне једначине кретања B,
2) интензитет брзине тачке B у тренутку $t_1 = \pi/2\,\mathrm{s}$,
3) интензитет убрзања тачке B у тренутку $t_1 = \pi/2\,\mathrm{s}$,
4) полупречник кривине трајекторије B у тренутку $t_1 = \pi/2\,\mathrm{s}$.

2. Штап OA обрће се константном угаоном брзином $\omega_{OA} = \omega_0$ око непокретне осе која пролази кроз тачку O (слика 2). У тачки A за штап OA зглобно је везан штап BD, који је крајем B зглобно везан диск 1 полупречника R. Диск се котрља без клизања по кружној подлози полупречника $3R$. За положај приказан на слици, одредити брзину и убрзање тачке D. Дато је: $\overline{OA} = 2R$, $\overline{AD} = \overline{AB} = 2R$.

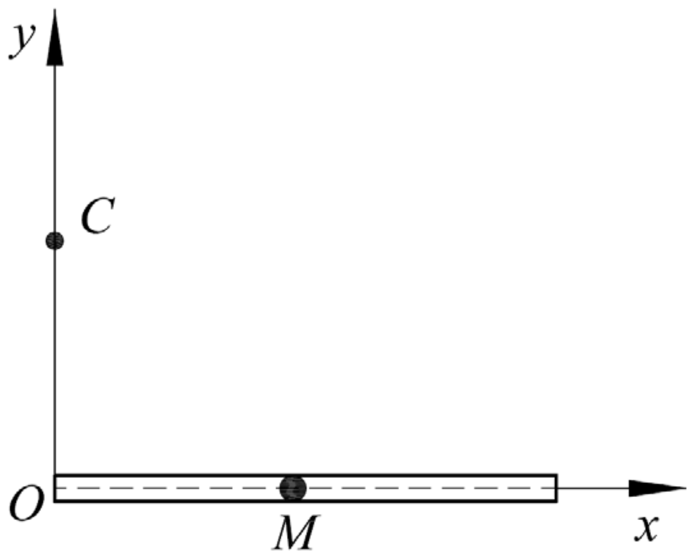


Слика 1



Слика 2

3. Куглица M, масе m, налази се у хоризонталној храпавој цеви (слика 3). Коефицијент трења између куглице и цеви је μ ($\mu < 1$). На куглицу дејствује одбојна сила са центром у тачки C пропорционална растојању куглице M од тачке C са коефицијентом пропорционалности $\frac{mg}{b}$, где је b позитивна константа. Тачка C се креће дуж осе Oy константном брзином $\vec{V}_C = \sqrt{gb}\,\vec{j}$. У почетном тренутку куглица M је била у положају $x(0) = 2b$ у стању мировања, а тачка C у координатном почетку. Одредити коначну једначину кретања куглице M. Оса Oy оријентисана је вертикално навише.



Слика 3

februar 2021.

(1.) klizač A se kreće po vodici oblika $y=x^2$

$\ddot{x}_A = 0$

$\overline{AB} = 1$

$\varphi = t$

t_0: A je u koord poč.

$v_A(t_0) = v_0 = 2$

1) j-ne kretanja tačke B ?

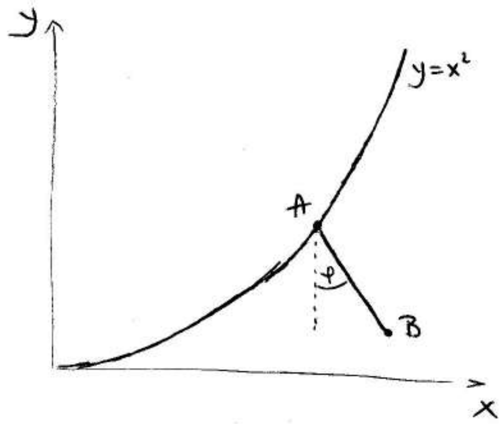
2) $v_B\ (t_1 = \frac{\pi}{2})$?

3) $a_B\ (t_1 = \frac{\pi}{2})$?

4) $R_{KB}\ (t_1 = \frac{\pi}{2})$?

$x_B = x_A + \overline{AB}\sin\varphi = x_A + \sin t$

$y_B = y_A - \overline{AB}\cos\varphi = y_A - \cos t$ $\Big\}$ $x_A = ?$, $y_A = ?$



$\ddot{x}_A = 0$ $\quad /\int dt$

$\dot{x}_A = \text{const.} = v_0 = 2$ $\quad /\int dt$

$x_A = 2t + c_1$

$x_A(t_0=0) = 0 + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

$x_A = 2t$

$y_A = x_A^2 = 4t^2$

$$\boxed{\begin{aligned} x_B &= 2t + \sin t \\ y_B &= 4t^2 - \cos t \end{aligned}}$$

j-ne kretanja

$\dot{x}_B = 2 + \cos t$

$\dot{y}_B = 8t + \sin t$

$\ddot{x}_B = -\sin t$

$\ddot{y}_B = 8 + \cos t$

$\dot{x}_B\ (t_1 = \frac{\pi}{2}) = 2 + 0 = 2$

$\dot{y}_B\ (t_1 = \frac{\pi}{2}) = \frac{8\pi}{2} + 1 = 4\pi + 1$ $\Big\} \Rightarrow$ $\boxed{v_B(t_1 = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{4 + (4\pi+1)^2}}$ $\quad (v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2})$

$\ddot{x}_B\ (t_1 = \frac{\pi}{2}) = -1$

$\ddot{y}_B\ (t_1 = \frac{\pi}{2}) = 8$ $\Big\} \rightarrow$ $\boxed{a_B\ (t_1 = \frac{\pi}{2}) = \sqrt{65}}$ $\quad (a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2})$

$$R_K\ (t_1 = \frac{\pi}{2}) = \frac{\left(\sqrt{4 + (4\pi+1)^2}\right)^3}{|2 \cdot 8 - (-1)(4\pi+1)|} = \frac{\left(\sqrt{4 + (4\pi+1)^2}\right)^3}{|16 + 4\pi + 1|}$$

$$\boxed{R_K\ (t_1 = \frac{\pi}{2}) = \frac{\left(\sqrt{4 + (4\pi+1)^2}\right)^3}{17 + 4\pi}}$$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35

http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

МЕХАНИКА 2

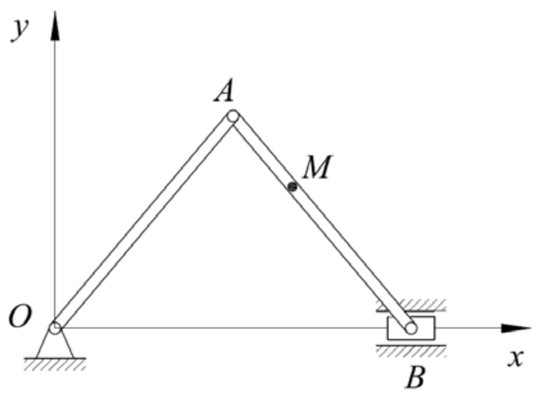
МЕХ 210-1172
13. јануар 2021.
Прва група

1. Клизач B, механизма приказаног на слици 1, почиње да се креће из положаја $x_B(0) = 6$ m без почетне брзине, са убрзањем $\ddot{x}_B = -24\cos(2t)$ $\left[\text{m/s}^2\right]$. $\overline{OA} = \overline{AB} = 3\text{m}$ и $\overline{AM} = 1\text{m}$. Везе у тачкама O, A и B су зглобне.

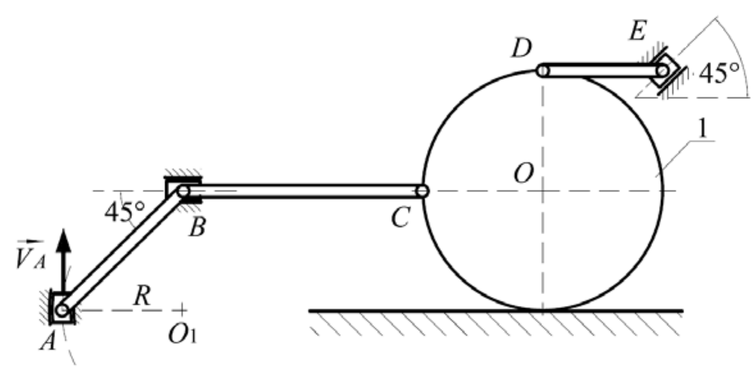
Одредити:

1) коначне једначине кретања и линију путање тачке M,
2) интензитет брзине тачке M у тренуцима када је $x_B = 0\text{m}$,
3) интензитет убрзања тачке M у тренуцима када је $x_B = 0\text{m}$,
4) полупречник кривине трајекторије тачке M у тренуцима када је $x_B = 0\text{m}$.

2. Клизач A креће се брзином константног интензитета $V_A = R\omega_0$ по кружници полупречника R са центром у тачки O_1 (слика 2). За клизач зглобно је везан штап AB, чији је крај B зглобно везан за клизач који се креће дуж праволинијских вођица. Штап BC зглобно је везан тачком C за диск 1, полупречника R, који се котрља без клизања по равној подлози. Штап DE, дужине R, зглобно је везан за диск и за клизач E који се креће дуж праволинијских вођица. За положај приказан на слици, одредити брзину и убрзање клизача E. Дато је: $\overline{AB} = \sqrt{2}R$, $\overline{BC} = 2R$, $\overline{DE} = R$.



Слика 1

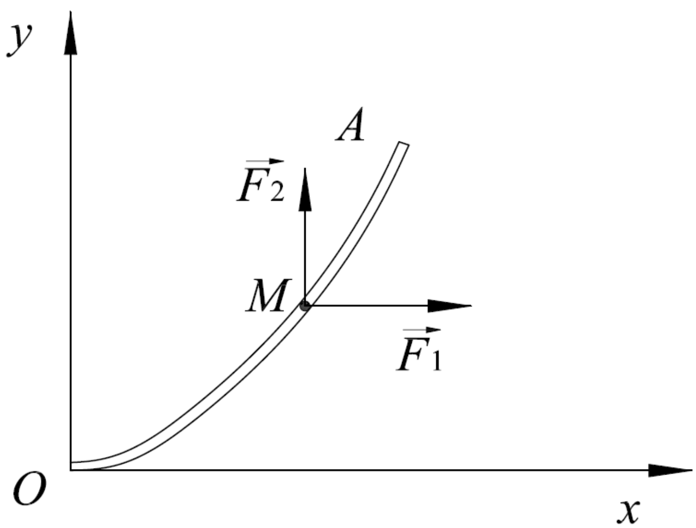


Слика 2

3. Куглица M, масе m, креће се у вертикалној равни унутар глатке цеви која има облик параболе $y = \frac{1}{b}x^2$, где је b позитивна константа (оса Oy усмерена је вертикално навише) (слика 3). На куглицу делују и две силе: $\vec{F}_1 = \frac{2mg}{b}x\vec{i}$ и $\vec{F}_2 = \frac{4mg}{b}y\vec{j}$. У положају $A(x_A = b)$ дејство везе престаје (за $x_A > b$ веза не постоји) и куглица се даље може кретати слободно. При слободном кретању куглице, дејство сила $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ **не престаје**. У почетном тренутку куглица је била у положају O без почетне брзине.

Одредити:

1) реакцију цеви у функцији координате x,
2) коначне једначине слободног кретања куглице.



Слика 3

januar 2021.

1. $t_0 = 0$: $x_B(t_0=0) = 6$, $v_B(t_0=0) = 0$

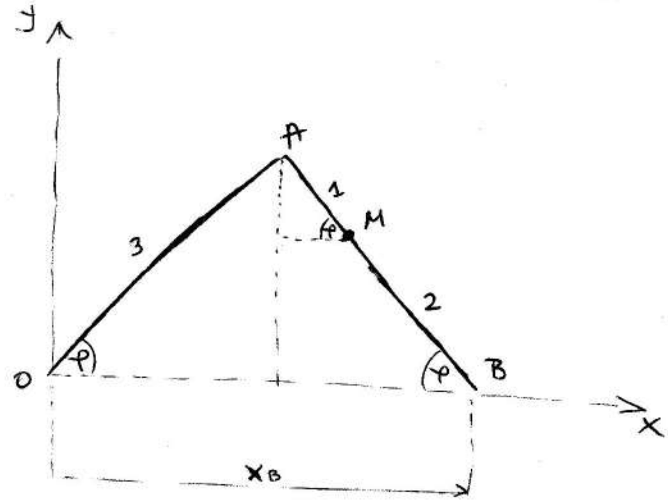
$\ddot{x}_B = -24\cos(2t)$

$\overline{OA} = \overline{AB} = 3$, $\overline{AM} = 1$

1) j-ne kretanja tačke M i linija putanje ?
2) $v_M(t_1)$?
3) $a_M(t_1)$?
4) $R_{KM}(t_1)$?

t_1 - trenutak kada je $x_B = 0$

$$\left.\begin{aligned} x_M &= 3\cos\varphi + 1\cos\varphi = 4\cos\varphi \\ y_M &= 3\sin\varphi - 1\sin\varphi = 2\sin\varphi \end{aligned}\right\} \varphi = ?$$



$\ddot{x}_B = -24\cos(2t) \quad / \int dt$

$$\dot{x}_B = \int -24\cos(2t)\,dt = \left\{ \begin{matrix} u = 2t \\ du = 2dt \end{matrix} \right\} = -24\int \cos u \frac{du}{2} =$$
$$= -12\sin u + C_1 = -12\sin 2t + C_1$$

$\dot{x}_B(t_0=0) = 0 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_1 = 0}}$

$\dot{x}_B = -12\sin 2t \quad / \int dt$

$$x_B = \int -12\sin(2t)\,dt = \left\{ \begin{matrix} u = 2t \\ du = 2dt \end{matrix} \right\} = -12\int \sin u \frac{du}{2} = +6\cos u + C_2 = 6\cos 2t + C_2$$

$x_B(t_0=0) = 6\cdot 1 + C_2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_2 = 0}}$

$x_B = 6\cos 2t$

$$\left.\begin{aligned} x_B &= 6\cos 2t \\ x_B &= 3\cos\varphi + 3\cos\varphi = 6\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \underline{\underline{\varphi = 2t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_M &= 4\cos 2t \\ y_M &= 2\sin 2t \end{aligned}}$$

j-ne kretanja

$\dot{x}_M = -8\sin 2t \qquad \ddot{x}_M = -16\cos 2t$

$\dot{y}_M = 4\cos 2t \qquad \ddot{y}_M = -8\sin 2t$

$x_B(t_1) = 6\cos(2t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(2t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t_1 = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_1 = \frac{\pi}{4}}}$

$$\boxed{\left(\frac{x_M}{4}\right)^2 + \left(\frac{y_M}{2}\right)^2 = 1}$$ - linija putanje

$\dot{x}_M (t_1 = \frac{\pi}{4}) = -8$

$\dot{y}_M (t_1 = \frac{\pi}{4}) = 0$

$\Big\} \Rightarrow \boxed{v_M (t_1 = \frac{\pi}{4}) = 8}$

$\ddot{x}_M (t_1 = \frac{\pi}{4}) = 0$

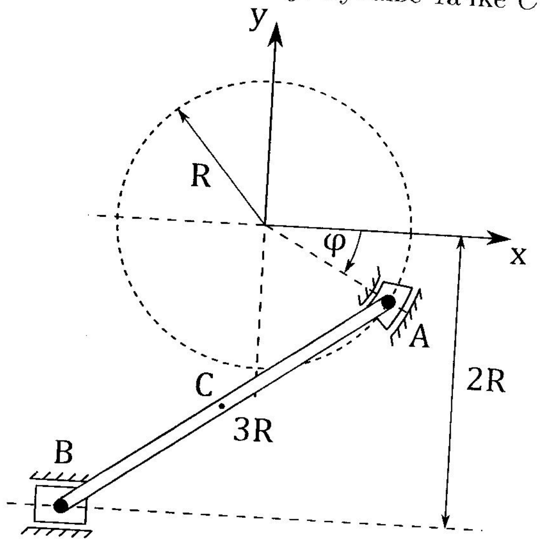
$\ddot{y}_M (t_1 = \frac{\pi}{4}) = -8$

$\Big\} \Rightarrow \boxed{a_M (t_1 = \frac{\pi}{4}) = 8}$

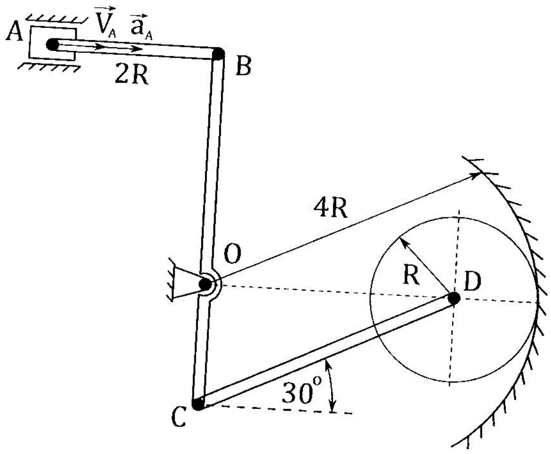
$$R_{KM} (t_1 = \frac{\pi}{4}) = \frac{8^3}{|64 - 0|} = 8 \Rightarrow \boxed{R_{KM} (t_1 = \frac{\pi}{4}) = 8}$$

Механика 2, 5.8.2020. група 1

1. Клизач A може да се креће по кружној вођици полупречника R, по закону $\varphi = 2t$. Штап AB дужине $3R$ је једним крајем везан за клизач A, а другим крајем за праволинијски клизач B, као што је приказано на Сл. 1. Ако је $\overline{AC} = \overline{CB}$, одредити:
а) брзину тачке C у почетном тренутку $t_0 = 0$ s,
б) убрзање тачке C у тренутку $t_0 = 0$ s и
в) полупречник кривине линије путање тачке C у тренутку $t_0 = 0$ s.



Слика 1

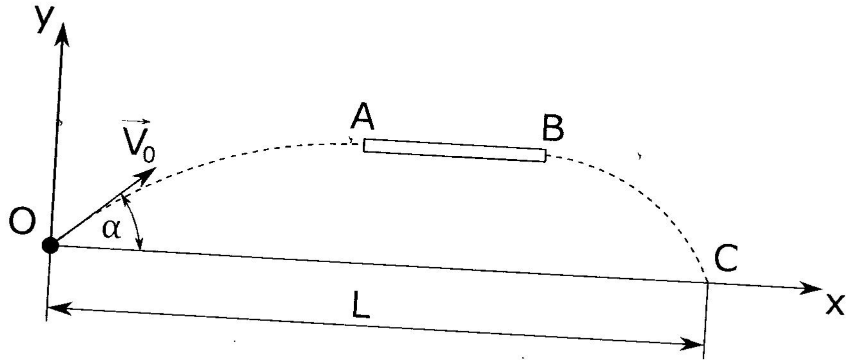


Слика 2

2. Механизам приказан на Сл. 2 састоји се од штапова AB, BC и CD, као и праволинијског клизача A и диска полупречника R који може да се котрља без клизања по унутрашњости цилиндричне површи полупречника $4R$. Везе у тачкама A, B, C и D су зглобне. Штап BC је у тачки O везан за непокретни ослонац. У приказаном тренутку, клизач A креће се брзином $V_A = V_0$ и убрзањем $a_A = \frac{V_0^2}{R}$. Познато је и да је $\overline{OB} = \overline{CD}$. Одредити брзину и убрзање тачке D, као и угаоно убрзање штапа AB, у датом тренутку.

$\underline{\underline{18R}}$

3. Куглица масе m је испаљена из координатног почетка са почетном брзином интензитета $V_0 = 2\sqrt{g}$, под углом $\alpha = 30°$. Када куглица достигне максималну висину (у тачки A), она улеће у хоризонталну храпаву цев $\left(\mu = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. При напуштању цеви (у тачки B), брзина куглице је дупло мања него при уласку у цев. Након напуштања цеви, куглица пада и зауставља се у тачки C. Колико је хоризонтално растојање L које куглица пређе од почетка до краја кретања?



Слика 3

oktobar 2020.

1. $\varphi = 2t$

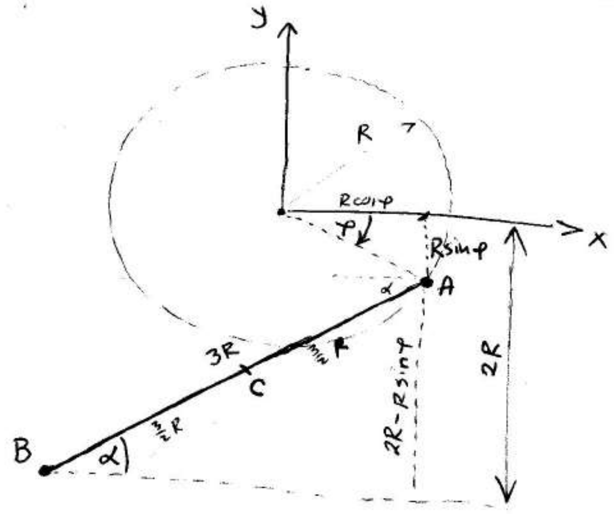
$\overline{AC} = \overline{CB}$

1) $v_c\ (t_0=0)$?

2) $a_c\ (t_0=0)$?

3) $R_{kc}\ (t_0=0)$?

$$x_c = R\cos\varphi - \frac{3}{2}R\cos\alpha$$
$$y_c = -R\sin\varphi - \frac{3}{2}R\sin\alpha \quad \Big\}\ \alpha = ?$$



$$\sin\alpha = \frac{2R - R\sin\varphi}{3R} = \frac{2-\sin 2t}{3}$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{4-4\sin 2t+\sin^2 2t}{9}} =$$
$$= \sqrt{\frac{5+4\sin 2t - \sin^2 2t}{9}} = \frac{\sqrt{5+4\sin 2t-\sin^2 2t}}{3}$$

$$x_c = R\cos 2t - \frac{\cancel{3}}{2}R\,\frac{\sqrt{5+4\sin 2t-\sin^2 2t}}{\cancel{3}} = R\cos 2t - \frac{1}{2}R\,(5+4\sin 2t-\sin^2 2t)^{\frac{1}{2}}$$

$$y_c = -R\sin 2t - \frac{3}{2}R\,\frac{2-\sin 2t}{\cancel{3}} = -R\sin 2t - R + \frac{1}{2}R\sin 2t$$

$$\dot{x}_c = -2R\sin 2t - \frac{1}{2}R\cdot\frac{1}{2}\,(5+4\sin 2t-\sin^2 2t)^{-\frac{1}{2}}\cdot(8\cos 2t - 2\sin 2t\cdot\cos(2t)\cdot 2)$$
$$\dot{y}_c = -2R\cos 2t + R\cos 2t$$

$$\ddot{x}_c = -4R\cos 2t - \frac{1}{4}R\cdot\Big(\big(-\tfrac{1}{2}\big)\cdot(5+4\sin 2t-\sin^2 2t)^{-\frac{3}{2}}\cdot 8\cos 2t - 2\sin 2t\cos 2t\cdot 2\cdot(8\cos 2t - 4\sin 2t\cos 2t)$$
$$+ (5+4\sin 2t - \sin^2 2t)^{\frac{1}{2}}\cdot(-16\sin 2t - 4\cos 2t\cos 2t\cdot 2 + 4\sin 2t\sin 2t\cdot 2\Big)$$

$$\ddot{y}_c = +4R\sin 2t - 2R\sin 2t$$

$$\dot{x}_c(t_0=0) = 0 - \frac{1}{4}R(5+0-0)^{-\frac{1}{2}}\cdot(8\cdot 1 - 0) = -\frac{2R}{\sqrt{5}}$$

$$\dot{y}_c(t_0=0) = -2R\cdot 1 + R\cdot 1 = -R$$

$$v(t_0=0) = \sqrt{\left(-\frac{2R}{\sqrt{5}}\right)^2 + (-R)^2} = \sqrt{\frac{4R^2}{5} + R^2} = \sqrt{\frac{4R^2}{5} + \frac{5R^2}{5}} = \frac{3R}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}\,R}{5}$$

$$\boxed{v(t_0=0) = \frac{3\sqrt{5}\,R}{5}}$$

$$\ddot{x}_c(t_0=0) = -4R\cdot 1 - \frac{1}{4}R\left(-\frac{1}{2}(5+0-0)^{-\frac{3}{2}}\cdot 8\cdot 1 - 2\cdot 0 + (5+0-0)^{\frac{1}{2}}(0-8+0)\right) =$$

$$= -4R + \frac{1}{4}R\left(-\frac{4}{5\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}}\right) = -4R + \frac{1}{4}R\left(\frac{4+40}{5\sqrt{5}}\right) =$$

$$= -\frac{20\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}R + \frac{11}{5\sqrt{5}}R = -\frac{-11+20\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}R$$

$$\ddot{y}_c(t_0=0) = 0 - 0 = 0$$

$$\boxed{a(t_0=0) = \frac{-11+20\sqrt{5}}{5\sqrt{5}}R}$$

$$R_k(t_0=0) = \frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}R\right)^3}{\left|0 - \frac{20\sqrt{5}-11}{5\sqrt{5}}R^2\right|} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}R\right)^3}{\frac{20\sqrt{5}-11}{5\sqrt{5}}R^2}$$

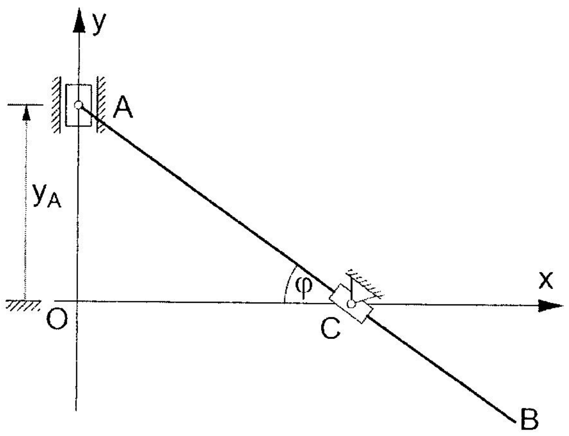
$$\boxed{R_k(t_0=0) = \frac{\left(\frac{3\sqrt{5}}{5}R\right)^3}{\frac{20\sqrt{5}-11}{5\sqrt{5}}R^2}}$$

1. Kraj A štapa AB dužine $2R$ kreće se pomoću vodjice duž ose Oy po zakonu $y_A = \overline{OA} = R\sin 2t$. Štap pri kretanju prolazi kroz obrtno klizno ležište C. Ako je $\overline{OC} = R$, odrediti:

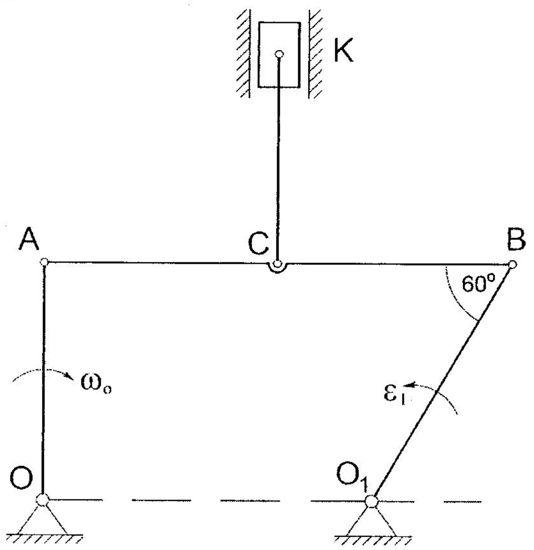
a) jednačine kretanja tačke B,

b) intenzitet brzine tačke B kada je $\varphi_1 = \frac{\pi}{4}$,

c) poluprečnik krivine trajektorije tačke B u trenutku $t_0 = 0$.



Zad.1



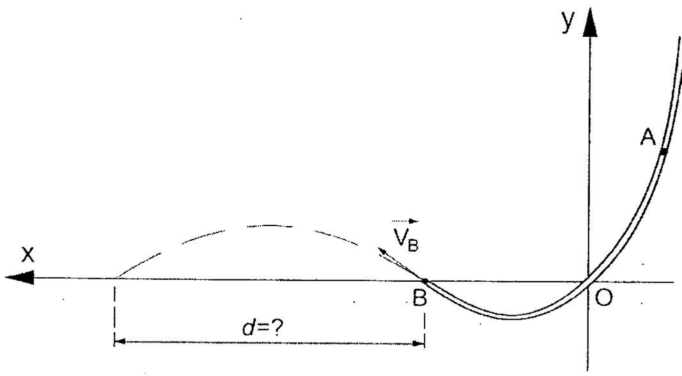
Zad.2

2. Mehanizam prikazan na slici sastoji se od četiri štapa i jednog klizača. Veze u tačkama O, A, B, C, O_1 i K su zglobne. Klizač K može da klizi duž pravolinijskih vodjica. Dato je: $\overline{OA} = \overline{AC} = \overline{CB} = \overline{CK} = \ell$, $\measuredangle CBO_1 = 60°$, $\measuredangle OAC = 90°$, $OO_1 \parallel AB$, $CK \perp AB$. Ugaona brzina štapa OA u položaju prikazanom na slici iznosi ω_0, a ugaono ubrzanje štapa O_1B iznosi $\varepsilon_1 = \sqrt{3}\omega_0^2$. Smerovi za ω_0 i ε_1 su prikazani na slici. Odrediti brzinu i ubrzanje klizača K u datom trenutku.

3. Tačka M mase m kreće se u vertikalnoj ravni unutar glatke cevi savijene u obliku parabole opisane sa $y = x(x-2)$ (Oxy predstavlja Dekartov inercijalni koordinatni sistem). Tačka započinje kretanje bez početne brzine iz položaja A(-1,?). U položaju B(?,0) tačka napušta cev i nastavlja da se kreće slobodno u polju Zemljine teže. Odrediti:

a) reakciju cevi u tački B, tj. neposredno pre nego što tačka napusti vezu,

b) domet d pri slobodnom kretanju tačke M (videti sliku).

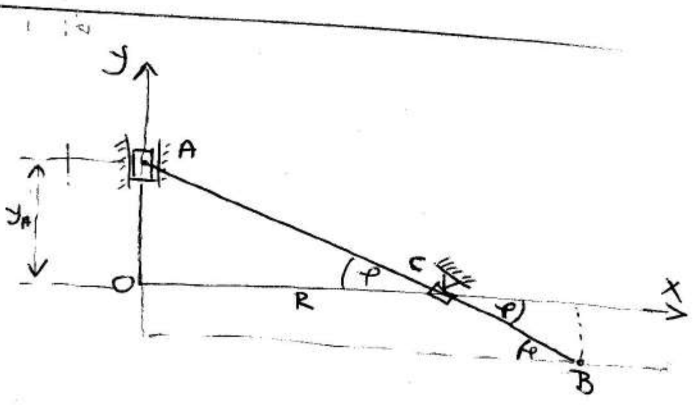


septembar 2020

(1.) $\overline{AB} = 2R$ 1) j-ne kretanja tačke B ?

$y_A = R\sin 2t$ 2) $v_B(t_1)$? , t_1 – trenutak kada je $\varphi = \frac{\pi}{4}$

$\overline{OC} = R$ 3) $R_{KB}(t_0 = 0)$?



$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y_A}{R} = \frac{R\sin 2t}{R} = \sin 2t$$

$$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\sin 2t}{\sqrt{1+\sin^2 2t}}$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 2t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_B &= 2R\cos\varphi = \frac{2R}{\sqrt{1+\sin^2 2t}} \\ y_B &= y_A - 2R\sin\varphi = R\sin 2t - 2R\frac{\sin 2t}{\sqrt{1+\sin^2 2t}} \end{aligned}}$$ – j-ne kretanja

$$\dot{x}_B = \frac{0 - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot(1+\sin^2 2t)^{-\frac{1}{2}}\cdot \overbrace{2\sin 2t\cdot\cos 2t}^{\sin(4t)}\cdot\cancel{2}\cdot 2R}{1+\sin^2 2t} = -\frac{\sin(4t)\cdot 2R}{(1+\sin^2 2t)^{3/2}}$$

$$\dot{y}_B = 2R\cos 2t - 2R\,\frac{2\cos 2t\cdot(1+\sin^2 2t)^{\frac{1}{2}} - \sin 2t\cdot\frac{1}{\cancel{2}}(1+\sin^2 2t)^{-\frac{1}{2}}\cdot\overbrace{2\sin 2t\cos 2t}^{\sin 4t}\cdot\cancel{2}}{1+\sin^2 2t} =$$

$$= 2R\cos 2t - 2R\,\frac{2\cos 2t + 2\cos 2t\sin^2 2t - \sin 2t\cdot\sin 4t}{(1+\sin^2 2t)^{3/2}}$$

$$\ddot{x}_B = -2R\,\frac{4\cos 4t\cdot(1+\sin^2 2t)^{3/2} - \sin(4t)\cdot\frac{3}{\cancel{2}}(1+\sin^2 2t)^{1/2}\cdot\overbrace{2\sin 2t\cos 2t}^{\sin 4t}\cdot\cancel{2}}{(1+\sin^2 2t)^3}$$

$$\ddot{y}_B = -4R\sin 2t - 2R\left(\frac{(-4\sin 2t - \cancel{2}4\sin^3 t + 4\cos 2t\sin 2t\cos 2t\cdot 2 - 2\cos 2t\sin 4t - 4\sin 2t\cos 4t)\cdot(1+\sin^2 2t)^{3/2}}{(1+\sin^2 2t)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{(2\cos 2t + 2\cos 2t\sin^2 2t - \sin 2t\sin 4t)\cdot\left(\frac{3}{\cancel{2}}(1+\sin^2 2t)^{\frac{1}{2}}\cdot\overbrace{2\sin 2t\cos 2t}^{\sin 4t}\cdot\cancel{2}\right)}{(1+\sin^2 2t)^3}\right)$$

$\varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad tg\,\varphi_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin 2t_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\pi}{4}$

$$\dot{x}_B\left(t_1 = \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\dot{y}_B\left(t_1 = \frac{\pi}{4}\right) = 0 - 2R\,\frac{0 + 0 - 0}{(1 + 1^2)^{3/2}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{v_B(t_1) = 0}$$

$$\dot{x}_B(t_1 = 0) = 0$$

$$\dot{y}_B(t_1 = 0) = 2R - 2R\,\frac{2 + 0 - 0}{(1 + 0)^{3/2}} = 2R - 4R = -2R$$

$$\ddot{x}_B(t_1 = 0) = -2R\,\frac{4(1+0)^{3/2} - 0}{(1+0)^3} = -8R$$

$$\ddot{y}_B(t_1 = 0) = 0 - 2R\left(\frac{(0 - 0 + 0 - 0 - 0)(1+0)^{3/2} - (2 + 0 - 0)\,3(1+0)^{1/2}\cdot 0}{(1+0)^3}\right) = 0$$

$$R_K(t_0 = 0) = \frac{(2R)^3}{|0\cdot 0 - (-2R)(-8R)|} =$$

$$R_K(t_0 = 0) = \frac{8R^3}{16R^2} = \frac{R}{2}$$

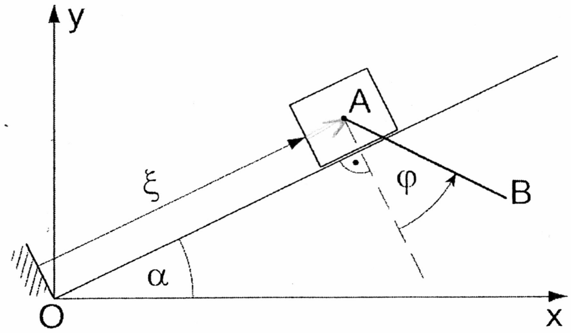
$$\boxed{R_K(t_0 = 0) = \frac{R}{2}}$$

1. Prizmatično telo kreće se po strmoj ravni nagiba $\alpha = 30°$ po zakonu $\xi(t) = \ell + \ell\cos(\pi t)$, gde je ℓ poznata konstanta. Za telo je zglobno vezan u tački A štap AB dužine ℓ. Štap se rotira oko ose koja prolazi kroz tačku A po zakonu $\varphi = \pi t$. Ugao φ meri se od pravca upravnog na strmu ravan, kao što je prikazano na slici. Odrediti u odnosu na nepokretni koordinatni sistem Oxy:

a) jednačine kretanja tačke B,

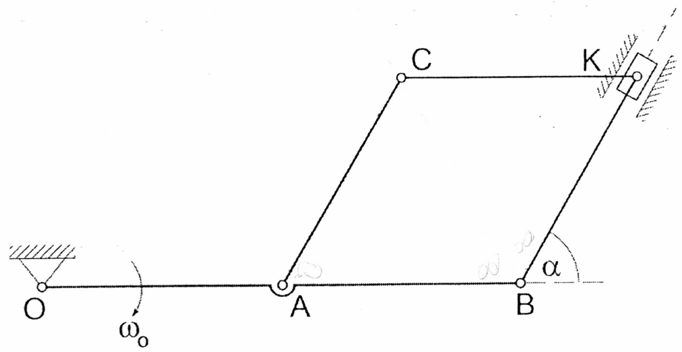
b) poluprečnik krivine trajektorije tačke B u trenutku $t_1 = 1\text{s}$,

c) liniju putanje tačke B.

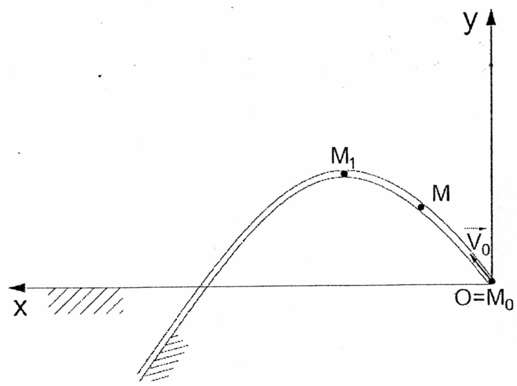


Zad.1

2. Za mehanizam prikazan na slici u datom položaju odrediti brzinu i ubrzanje tačke C. Mehanizam se sastoji od četiri štapa i klizača K, pri čemu je $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{AC} = \overline{CK} = \overline{BK} = R$, $AC \parallel BK$, i $\alpha = 60°$. Štap OB obrće se oko nepokretnog oslonca O konstantnom ugaonom brzinom ω_0 u naznačenom smeru. Klizač K može da klizi duž pravolinijskih vodjica. Veze u tačkama O, A, B, C i K su zglobne.



Zad.2



Zad.3

3. Tačka M mase m kreće se u vertikalnoj ravni unutar glatke cevi savijene u obliku parabole oblika $y(x) = x(2-x)$, gde je Oxy nepokretni Dekartov koordinatni sistem. U početnom trenutku tačka M se nalazila u koordinatnom početku, i imala početnu brzinu intenziteta $V_O = 2\sqrt{g}$, kao što je prikazano na slici. Odrediti:

a) zavisnost brzine tačke M od njenog položaja duž koordinate x, tj. $V(x) = ?$

b) intenzitet reakcije veze u trenutku kada se kuglica nađe u najvišem položaju (položaj M_1).

jun 2020

1. $\xi = \ell + \ell\cos(\pi t)$

$\overline{AB} = \ell$

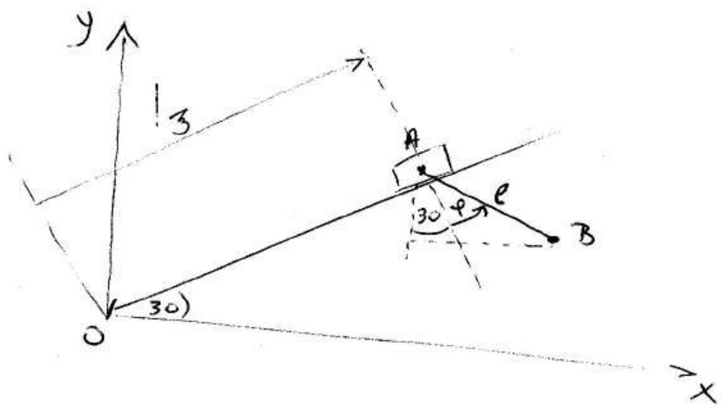
$\varphi = \pi t$

1) j-ne kretanja tačke B ?

2) R_{KB} $(t=1)$?

3) linija putanje tačke B ?

$$x_B = \xi\cos 30 + \ell\sin(\varphi + 30) =$$
$$= (\ell + \ell\cos(\pi t))\cos 30 + \ell\sin(\pi t + 30) =$$
$$= \ell\frac{\sqrt3}{2} + \ell\frac{\sqrt3}{2}\cos(\pi t) + \ell\sin(\pi t + 30)$$



$$y_B = \xi\sin 30 - \ell\cos(\varphi + 30) =$$
$$= (\ell + \ell\cos(\pi t))\cdot\frac12 - \ell\cos(\varphi + 30) =$$
$$= \frac12\ell + \frac12\ell\cos(\pi t) - \ell\cos(\pi t + 30)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_B &= \ell\frac{\sqrt3}{2} + \ell\frac{\sqrt3}{2}\cos(\pi t) + \ell\sin(\pi t + 30) \\ y_B &= \frac12\ell + \frac12\ell\cos(\pi t) - \ell\cos(\pi t + 30)\end{aligned}}$$ j-ne kretanja

$$\dot x_B = -\ell\frac{\sqrt3}{2}\cdot\pi\sin(\pi t) + \ell\cdot\pi\cos(\pi t + 30)$$
$$\dot y_B = -\frac12\ell\pi\sin(\pi t) + \ell\pi\sin(\pi t + 30)$$

$$\ddot x_B = -\ell\frac{\sqrt3}{2}\pi^2\cos(\pi t) - \ell\pi^2\sin(\pi t + 30)$$
$$\ddot y_B = -\frac12\ell\pi^2\cos(\pi t) + \ell\pi^2\cos(\pi t + 30)$$

$$\dot x_B(t=1) = 0 + \ell\pi\cdot\left(-\frac{\sqrt3}{2}\right) = -\frac{\sqrt3}{2}\ell\pi$$
$$\dot y_B(t=1) = 0 - \ell\pi\cdot\left(-\frac12\right) = +\frac12\ell\pi$$

$$\ddot x_B(t=1) = +\ell\frac{\sqrt3}{2}\pi^2\cdot 1 + \ell\pi^2\cdot\frac12 = \ell\pi^2\cdot\frac{\sqrt3+1}{2}$$
$$\ddot y_B(t=1) = +\frac12\ell\pi^2\cdot 1 - \ell\pi^2\cdot\frac{\sqrt3}{2} = -\ell\pi^2\frac{\sqrt3-1}{2}$$

$$R_{KB}(t=1) = \frac{\sqrt{\frac34\ell^2\pi^2 + \frac14\ell^2\pi^2}^{\,3}}{\left|\ell^2\pi^3\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3-1}{2} - \ell^2\pi^3\cdot\frac12\cdot\frac{\sqrt3+1}{2}\right|} = \frac{\ell^2\pi^2}{\ell^2\pi^3\cdot\left|\frac{3-\sqrt3+\sqrt3+1}{4}\right|}$$

$$R_{KB}(t=1) = \frac{1}{1} \implies \boxed{R_{KB}(t=1) = 1}$$

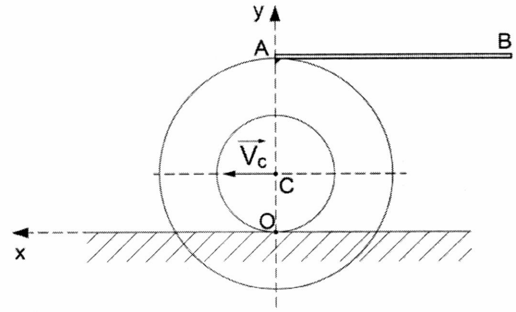
MEHANIKA 2 **1.**GRUPA FEBRUAR 2020

1. Koaksijalni cilindar poluprečnika R i $2R$ kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj pravolinijskoj podlozi. Za cilindar je u tački A kruto spojen štap AB pod pravim uglom u odnosu na pravac CA. Središte cilindra C kreće se konstantnom brzinom intenziteta $V_C = 1\frac{m}{s}$. Ako je $\overline{AB} = 2R$, i ako je na slici prikazan početni položaj sistema, odrediti u odnosu na dati nepokretni koordinatni sistem Oxy:

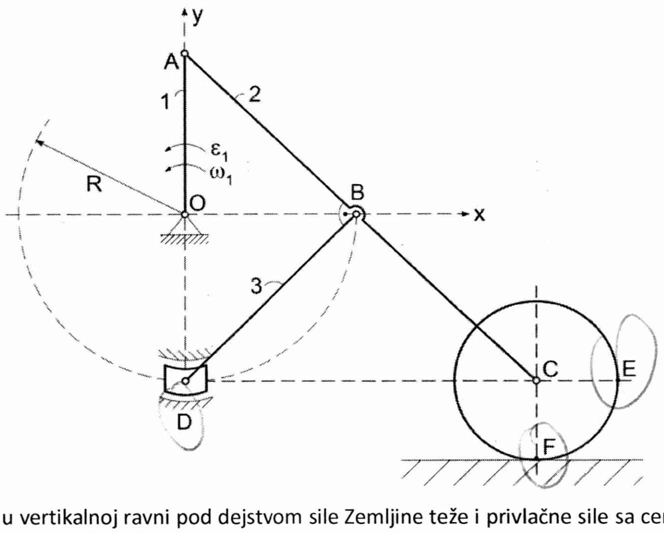
a) jednačine kretanja tačke B,

b) poluprečnik krivine trajektorije tačke B u trenutku $t_1 = \frac{R\pi}{2}$,

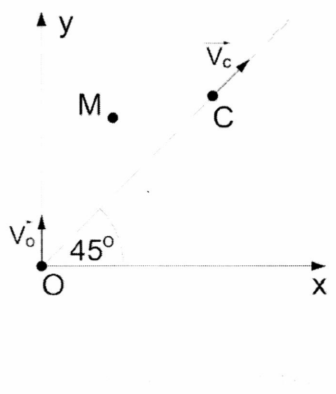
c) vektor ubrzanja tačke B u trenutku kada intenzitet brzine tačke B prvi put dostiže maksimalnu vrednost.



2. Za mehanizam u položaju prikazanom na slici odrediti brzinu i ubrzanje tačaka: D, E i F. Mehanizam se sastoji od tri štapa, klizača D i diska, pri čemu je $\overline{OA} = \overline{OB} = R$. Štap OA obrće se oko nepokretnog oslonca O i u datom trenutku ima ugaonu brzinu $\omega_1 = \omega_0$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon_1 = \omega_0^2$ u naznačenom smeru. Disk poluprečnika $0.5R$ kotrlja se bez klizanja po nepokretnoj podlozi, a klizač D se kreće po kružnici poluprečnika R sa centrom u tački O. Veze u tačkama O, A, B, C i D su zglobne.



3. Tačka M mase m kreće se u vertikalnoj ravni pod dejstvom sile Zemljine teže i privlačne sile sa centrom privlačenja u tački C. Za koordinatni sistem usvojiti nepokretni Dekartov koordinatni sistem Oxy, pri čemu je osa Oy usmerena vertikalno naviše. Privlačni centar C kreće se brzinom konstantnog intenziteta $V_C = \sqrt{2}\frac{m}{s}$ duž prave koja sa osom Ox zaklapa ugao od 45°. Privlačna sila centra C proporcionalna je rastojanju tačke M od centra C sa koeficijentom proporcionalnosti mk^2, gde je k poznata pozitivna konstanta. U početnom trenutku centar C i tačka M nalazili su se u koordinatnom početku, a početna brzina tačke M iznosila je $V_0 = 2\frac{m}{s}$ i imala pravac i smer kao što je prikazano na slici. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.



februar 2020

① $R, 2R$

$\overline{AB} = 2R$

$v_c = 1$

t_0: položaj na slici

1) j-ne kretanja tačke B

2) R_{KB} $\left(t_1 = \frac{R\pi}{2}\right)$

3) $\vec{a}_B(t_2)$?, t_2 - kada je v_B prvi put max.

$$\dot{x}_c = R\dot{\varphi} = 1 \qquad (x_c = 1t + x_1^0 = t)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{R} \Rightarrow \varphi = \frac{t}{R}$$

dokaz da je $\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$:

neka se krug zarotirao za ugao φ

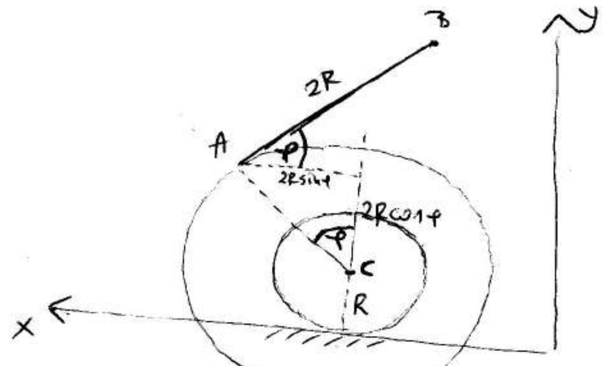
$$s = R\varphi \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$\dot{s} = R\dot{\varphi}$$

$$\dot{x}_c = R\dot{\varphi}$$

$$x_B = x_C + 2R\sin\varphi - 2R\cos\varphi = $$
$$= t + 2R\left(\sin\frac{t}{R} - \cos\frac{t}{R}\right)$$

$$y_B = R + 2R\cos\varphi + 2R\sin\varphi = $$
$$= R + 2R\cos\frac{t}{R} + 2R\sin\frac{t}{R}$$



$$\boxed{\begin{aligned} x_B &= 1 + 2R\sin\frac{t}{R} - 2R\cos\frac{t}{R} \\ y_B &= R + 2R\cos\frac{t}{R} + 2R\sin\frac{t}{R} \end{aligned}}$$

j-ne kretanja

$$\dot{x}_B = 1 + 2\cos\frac{t}{R} + 2\sin\frac{t}{R}$$

$$\dot{y}_B = -2\sin\frac{t}{R} + 2\cos\frac{t}{R}$$

$$\ddot{x}_B = -\frac{2}{R}\sin\frac{t}{R} + \frac{2}{R}\cos\frac{t}{R}$$

$$\ddot{y}_B = -\frac{2}{R}\cos\frac{t}{R} - \frac{2}{R}\sin\frac{t}{R}$$

$$\dot{x}_B\left(t_1 = \frac{R\pi}{2}\right) = 1 + 0 + 2 = 3$$

$$\dot{y}_B\left(t_1 = \frac{R\pi}{2}\right) = -2 + 0 = -2$$

$$\ddot{x}_B\left(t = \frac{R\pi}{2}\right) = -\frac{2}{R} + 0 = -\frac{2}{R}$$

$$\ddot{y}_B\left(t = \frac{R\pi}{2}\right) = 0 - \frac{2}{R} = -\frac{2}{R}$$

$$R_{KB}\left(t_1 = \frac{R\pi}{2}\right) = \frac{\left(\sqrt{3^2 + (-2)^2}\right)^3}{\left|-\frac{3\cdot 2}{R} - \frac{2\cdot 2}{R}\right|} = \frac{\left(\sqrt{13}\right)^3}{\frac{10}{R}} = \frac{13\sqrt{13}}{\frac{10}{R}} \Rightarrow \boxed{R_{KB}\left(t_1 = \frac{R\pi}{2}\right) = \frac{13\sqrt{13}}{10}R}$$

$t_2 = ?$

$$v(t) = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{1 + 4\cos^2\frac{t}{R} + 4\sin^2\frac{t}{R} + 4\cos\frac{t}{R} + 4\sin\frac{t}{R} + \cancel{8\sin\frac{t}{R}\cos\frac{t}{R}} + 4\sin^2\frac{t}{R} - \cancel{8\sin\frac{t}{R}\cos\frac{t}{R}} + 4\cos^2\frac{t}{R}}$$

$$v(t) = \sqrt{1 + 4 + 4 + 4\left(\sin\frac{t}{R} + \cos\frac{t}{R}\right)} = \sqrt{9 + 4\left(\sin\frac{t}{R} + \cos\frac{t}{R}\right)}$$

v_{max} je kada je $\left(\sin\frac{t_2}{R} + \cos\frac{t_2}{R}\right)$ maksimalan $\Rightarrow \frac{t_2}{R} = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{R\pi}{4}$

$$\boxed{\vec{a}\left(t = \frac{R\pi}{4}\right) = 0\vec{i} - \frac{2\sqrt{2}}{R}\vec{j}}$$

PRVA GRUPA

UNIVERZITETUBEOGRADU
MAŠINSKIFAKULTET
KATEDRAZAMEHANIKU
ul. KraljiceMarije 16, 11120 Beograd 35
http://nastava.mas.bg.ac.rs/nastava/viewforum.php?f=64+

MEHANIKA 2

MEX 210-1172

22. avgust 2019.godine

1. Mehanizam prikazan na slici čine: štap AB dužine $2l$, štap CM dužine l, kao i klizači A i B, zanemarljivih dimenzija, koji se kreću duž osa Oy i Ox respektivno. Klizač A kreće se ubrzanjem $\vec{a}_A = -2l\pi^2 \sin(\pi t)\vec{j}$. Veze u tačkama A i B su zglobne, dok je štap CM zavaren pod pravim uglom u odnosu na štap AB u tački C. Ako je stanje klizača A, u početnom trenutku $t_0 = 0$, određeno $y_A(t_0) = 0$ i $\dot{y}_A(t_0) = 2l\pi$, odrediti:

   a) liniju putanje i hodograf brzine tačke M,

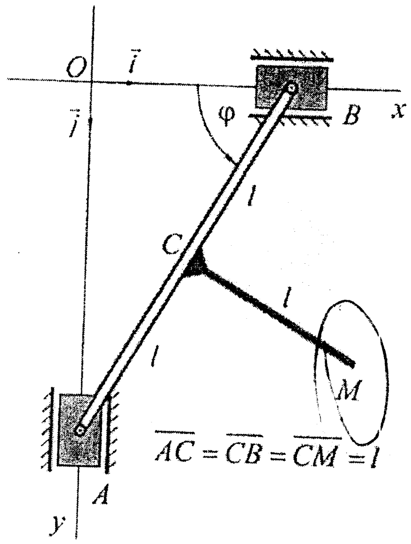
   b) zakon $\varphi = \varphi(t)$,

   c) prvi trenutak koji odgovara najudaljenijem položaju tačke M u odnosu na koordinatni početak O, kao i koordinate tačke M u tom trenutku,

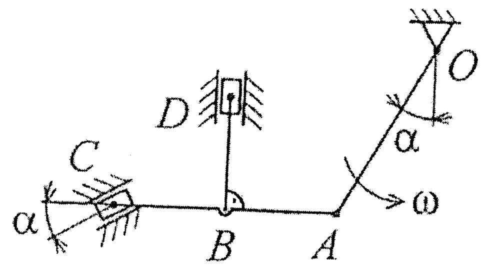
   d) poluprečnik krivine trajektorije tačke M,

   e) ubrazanje tačke M u trenutku u kome je brzina tačke M maksimalna,

   f) predjeni put tačke M od početnog trenutka do prvog trenutka u kome je brzina tačke M maksimalna.



2. Za mehanizam u položaju prikazanog na slici odrediti intenzitet brzine i ubrzanja klizača D, ako se štap OA obrće ugaonom brzinom konstantnog intenziteta ω, smera prikazanog na slici. Dato je $\overline{OA} = L\sqrt{3}$, $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{BD} = L$ i $\alpha = 30°$.



V_D, a_D

3. Materijalna tačka M, mase m, počinje u trenutku $t_0 = 0$ da se kreće iz položaja $M_0(0,b)$, gde je $b = const$, sa početnom brzinom $V_{M_0}(v_0, 0)$ u odnosu na Dekartov nepomični koordinatni sistem Oxy Na tačku dejstvuju privlačna sila $\overline{F_O}$ i konstantna sila $\vec{F_c}(mc^2b, 0)$. Privlačna sila $\overline{F_O}$ srazmerna je rastojanju tačke M do nepokretnog centra privlačenja O koji je smešten u koordinatnom početku. Koeficijent srazmere je $4mc^2$, $c = const$. Odrediti konačne jednačine kretanja tačke.

septembar 2019

(1.) $\overline{AB} = 2\ell$

$\overline{CM} = \ell$

$\vec{a}_A = -2\ell\pi^2 \sin(\pi t)\vec{j}$

t_0: $y_A(t_0=0) = 0$

$\dot{y}_A(t_0=0) = 2\ell\pi$

1) linija putanje ; hodograf brzine tačke M ?

2) $\varphi(t)$?

3) prvi trenutak t_1 u kojem je M najudaljenija ; koordinate M u tom trenutku

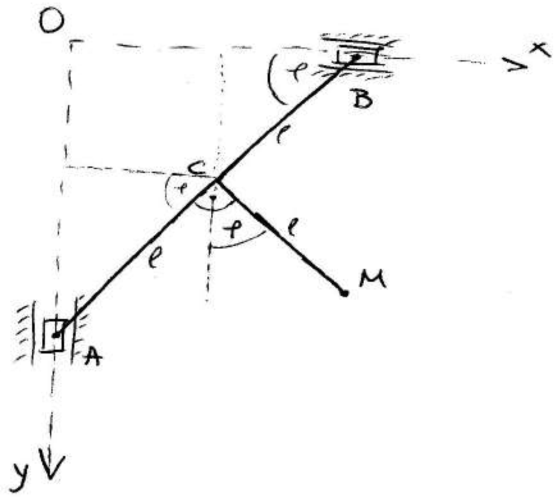
4) R_{KM} ?

5) $a_M(t_2)$? , t_2 - trenutak kada je a_M max. ?

6) pređeni put tačke M od t_0 do t_2 ?

$x_M = \ell\cos\varphi + \ell\sin\varphi$

$y_M = \ell\sin\varphi + \ell\cos\varphi$ $\Big\}$ $\varphi = ?$



$\ddot{y}_A = -2\ell\pi^2 \sin(\pi t) \quad / \int dt$

$\dot{y}_A = \int -2\ell\pi^2 \sin(\pi t)\,dt = \left\{ \begin{matrix} \mu = \pi t \\ d\mu = \pi dt \end{matrix} \right\} =$

$= -2\ell\pi^2 \int \sin\mu \frac{d\mu}{\pi} = +2\ell\pi \cos\mu + c_1 =$

$= 2\ell\pi\cos(\pi t) + c_1$

$\dot{y}_A(t_0=0) = 2\ell\pi \cdot 1 + c_1 = 2\ell\pi \quad \Rightarrow \quad c_1 = 0$

$\dot{y}_A = 2\ell\pi\cos(\pi t) \quad / \int dt$

$y_A = \int 2\ell\pi\cos(\pi t)\,dt = \left\{ \begin{matrix} \mu = \pi t \\ d\mu = \pi dt \end{matrix} \right\} = 2\ell\pi \cdot \int \cos\mu \frac{d\mu}{\pi} = 2\ell\sin\mu + c_2 = 2\ell\sin(\pi t) + c_2$

$y_A(t_0=0) = 0 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c_2 = 0}}$

$y_A = 2\ell\sin(\pi t)$

$y_A = 2\ell\sin(\pi t)$

$y_A = 2\ell\sin\varphi$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\varphi = \pi t} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} x_M = \ell\cos\pi t + \ell\sin\pi t \\ y_M = \ell\cos\pi t + \ell\sin\pi t \end{matrix}}$

$\boxed{x_M = y_M}$ – linija putanje (prava)

$\dot{x}_M = -\ell\pi\sin(\pi t) + \ell\pi\cos(\pi t)$

$\dot{y}_M = -\ell\pi\sin(\pi t) + \ell\pi\cos(\pi t)$ $\Big\} \Rightarrow \boxed{\dot{x}_M = \dot{y}_M}$ – hodograf brzine

$\ddot{x}_M = -\ell\pi^2\cos(\pi t) - \ell\pi^2\sin(\pi t)$

$\ddot{y}_M = -\ell\pi^2\cos(\pi t) - \ell\pi^2\sin(\pi t)$

$$d = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} \overset{(x_M = y_M)}{=} \sqrt{2x_M^2} = x_M\sqrt{2}$$ – rastojanje tačke M od koord. poč.

d je max. kada je x_M max, dakle za $\overset{ugao}{\frac{\pi}{4}}$, tj. $\boxed{t_1 = \frac{1}{4}}$

$$\left.\begin{aligned} x_M(t_1) &= \ell\frac{\sqrt{2}}{2} + \ell\frac{\sqrt{2}}{2} = \ell\sqrt{2} \\ y_M(t_1) &= \ell\frac{\sqrt{2}}{2} + \ell\frac{\sqrt{2}}{2} = \ell\sqrt{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{M(\ell\sqrt{2}, \ell\sqrt{2})}$$ – najudaljeniji položaj

$$\boxed{R_{KM} = \infty}$$ – pravolinijska putanja (linija putanje je prava $y_M = x_M$)

$t_2 = ?$ – kada je v_{max}

$$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{\ell^2\pi^2(\sin^2\pi t - 2\sin\pi t\cos\pi t + \cos^2\pi t + \sin^2\pi t + 2\sin\pi t\cos\pi t + \cos^2\pi t)} =$$

$$v_M = \ell\pi\sqrt{1 + 1 - 4\sin\pi t\cos\pi t} = \ell\pi\sqrt{2 - 2\sin 2\pi t} = \sqrt{2}\,\ell\pi\sqrt{1 - \sin(2\pi t)}$$

$v_{M\,max}$ je za $\sin(2\pi t_2) = -1 \Rightarrow 2\pi t_2 = +\frac{3}{2}\pi \Rightarrow \underline{\underline{t_2 = +\frac{3}{4}}}$

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x}_M\left(t_2 = \tfrac{3}{4}\right) &= +\ell\pi^2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \ell\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ \ddot{y}_M\left(t_2 = \tfrac{3}{4}\right) &= +\ell\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} - \ell\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{a_M\left(t_2 = \tfrac{3}{4}\right) = 0}$$

pređeni put:

$$S = \int_0^{t_2 = \frac{3}{4}} |v|\,dt, \quad v = \sqrt{2}\,\ell\pi\sqrt{1 - \sin(2\pi t)}$$

$\Rightarrow 1 - \sin(2\pi t) = 0$

$\Rightarrow \sin(2\pi t) = 1$

$\Rightarrow \underline{t = \frac{1}{4},\ t = \frac{5}{4},\ t = \frac{9}{4}, \ldots}$

trenuci kada brzina menja znak

$$S = |s_1| + |s_2| + \ldots$$

$$S = \left|\int_0^{1/4} v\,dt\right| + \left|\int_{1/4}^{3/4} v\,dt\right|,$$

$\int v\,dt = \int \sqrt{2}\,\ell\pi\sqrt{1 - \sin(2\pi t)} = ?$

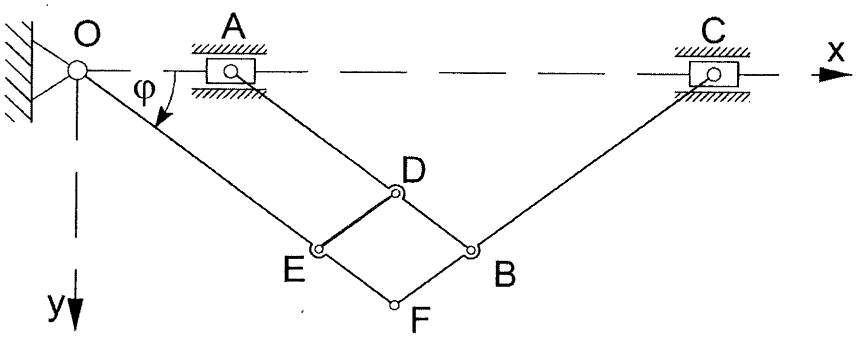
(ko će ovo da računa?)

$$\left.\begin{aligned} t_0 = 0 &\Rightarrow d_0 = x_{M0}\sqrt{2} = (\ell\cdot 1 + 0)\sqrt{2} = \ell\sqrt{2} \\ t_1 = \tfrac{1}{4} &\Rightarrow d_1 = x_{M1}\sqrt{2} = \left(\ell\frac{\sqrt{2}}{2} + \ell\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = 2\ell \end{aligned}\right\} s_1 = 2\ell - \ell\sqrt{2}$$

$$\left.\begin{aligned} t_1 = \tfrac{1}{4} &\Rightarrow d_1 = 2\ell \\ t_2 = \tfrac{3}{4} &\Rightarrow d_2 = x_{M2}\sqrt{2} = -\ell\frac{\sqrt{2}}{2} + \ell\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{aligned}\right\} s_2 = 0 - 2\ell = -2\ell$$

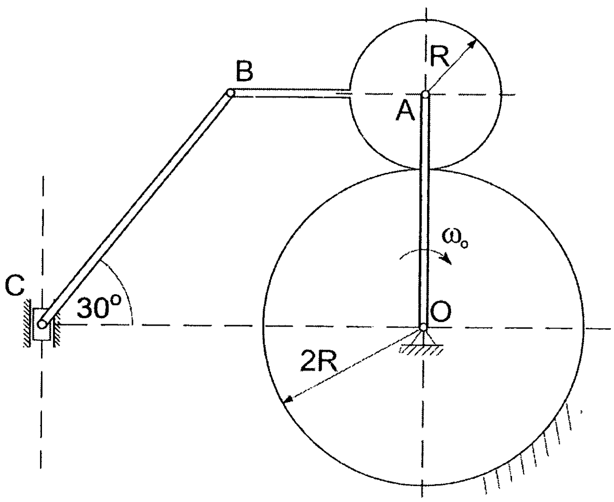
$$S = |s_1| + |s_2| = (2\ell - \ell\sqrt{2}) + 2\ell = 4\ell - \ell\sqrt{2} \Rightarrow \boxed{S = 4\ell - \ell\sqrt{2}}$$

1. Mehanizam prikazan na slici sastoji se od četiri štapa (AB, OF, ED i FC) i dva klizača (A i C). Klizači mogu da se kreću pravolinijski duž x-ose. Veze u tačkama O, A, B, C, D, E i F su zglobne. Štap OF obrće se oko nepokretne tačke O po zakonu $\varphi = \pi t$. Ako važi: $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OE} = 3R$, $\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB} = R$, i $AB \parallel OF$, odrediti:
a) trajektoriju tačke D, b) hodograf brzina tačke D, c) vektor ubrzanja tačke D u prvom pozitivnom trenutku kada je brzina maksimalna, d) poluprečnik krivine trajektorije tačke D u trenutku $t_1 = 1$.

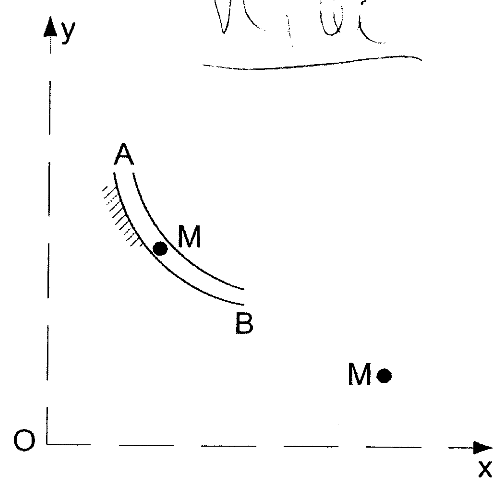


2. U datom položaju mehanizma odrediti: a) brzinu i ubrzanje klizača C, b) ugaono ubrzanje poluge BC. Veze u tačkama O, A, B i C su zglobne. Krivaja OA obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_0, i dovodi u kretanje disk poluprečnika R (disk je sa ispustom $\overline{AB} = \sqrt{3}R$), koji se kotrlja bez klizanja po nepomičnom disku poluprečnika $2R$. Poluga BC ($\overline{BC} = 6R$) dovodi u kretanje klizač C.

Vc, ac



Zad. 2



Zad. 3

3. U vertikalnoj ravni Oxy (Oxy je inercijalni sistem) postavljena je idealno glatka nepomična cev AB, cev je opisana jednačinom $y = \frac{1}{x}$. U početnom trenutku, puštena je u cev iz položaja $A\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, bez početne brzine, tačka M mase m. U položaju $B(1,1)$ tačka M napušta cev i kreće se slobodno u vertikalnoj ravni. Odrediti trajektoriju slobodnog kretanja tačke M. Zadate veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema.

oktobar 2018.

(1) $\varphi = \pi t$

$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{OE} = 3R$

$\overline{BD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FB} = R$

$\overline{FB} \parallel \overline{OF}$

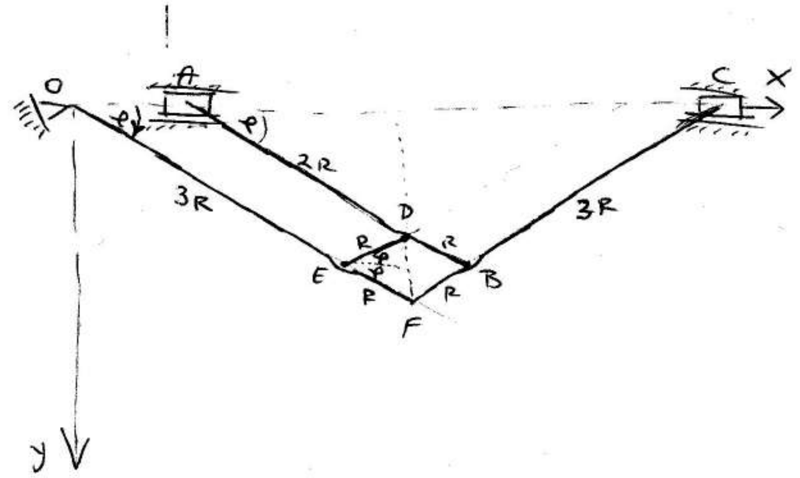
1) trajektorija tačke D ?
2) hodograf brzina tačke D ?
3) $\vec{a}_D\,(t_2)$? , t_2 - prvi pozitivan trenutak kada je v_D max.
4) $R_{KD}\,(t_1 = 1)$?

$x_D = 4R\cos\varphi = 4R\cos\pi t$

$y_D = 2R\sin\varphi = 2R\sin\pi t$

$$\boxed{\left(\frac{y_D}{2R}\right)^2 + \left(\frac{x_D}{4R}\right)^2 = 1}$$

trajektorija (elipsa)



$\dot{x}_D = -4R\pi\sin\pi t$

$\dot{y}_D = 2R\pi\cos\pi t$

$$\Rightarrow \boxed{\left(\frac{\dot{y}_D}{2R\pi}\right)^2 + \left(\frac{\dot{x}_D}{4R\pi}\right)^2 = 1}$$

hodograf brzina

$\ddot{x}_D = -4R\pi^2\cos\pi t$

$\ddot{y}_D = -2R\pi^2\sin\pi t$

$\Rightarrow v_D = \sqrt{\dot{x}_D^2 + \dot{y}_D^2} = \sqrt{16R^2\pi^2\sin^2\pi t + 4R^2\pi^2\cos^2\pi t} =$

$v_D = 2R\pi\sqrt{4\sin^2\pi t + \cos^2\pi t} = 2R\pi\sqrt{3\sin^2\pi t + 1}$

v_D je max. za $\sin^2\pi t_2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{t_2 = \frac{1}{2}}}$

$\ddot{x}_D(t_2 = \frac{1}{2}) = 0$

$\ddot{y}_D(t_2 = \frac{1}{2}) = -2R\pi^2$

$$\Rightarrow \boxed{a_D(t_2 = \tfrac{1}{2}) = 2R\pi^2}$$

$\dot{x}_D(t_1 = 1) = 0$

$\dot{y}_D(t_1 = 1) = -2R\pi$

$\ddot{x}_D(t_1 = 1) = 4R\pi^2$

$\ddot{y}_D(t_1 = 1) = 0$

$$R_{KD}(t_1 = 1) = \frac{(2R\pi)^3}{|0 + 8R^2\pi^3|} = \frac{8R^3\pi^3}{8R^2\pi^3} = R$$

$$\boxed{R_{KD}(t_1 = 1) = R}$$

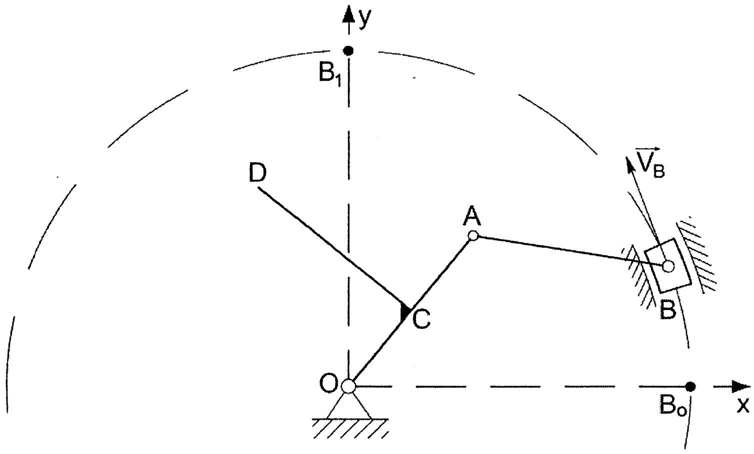
1. Klizač B kreće se brzinom konstantnog intenziteta $V_B = \omega_0 R$ po kružnoj vodjici poluprečnika $\overline{OB} = \sqrt{3}R$. Za klizač je vezan zglobni mehanizam koji se sastoji od tri štapa, pri čemu je $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{CD} = 2\overline{OC} = R$. Veze u tačkama O, A i B su zglobne, dok je štap CD kruto spojen pod pravim uglom sa štapom OA. U početnom trenutku klizač B se nalazio u položaju B_0. Odrediti:

a) jednačine kretanja tačke D,

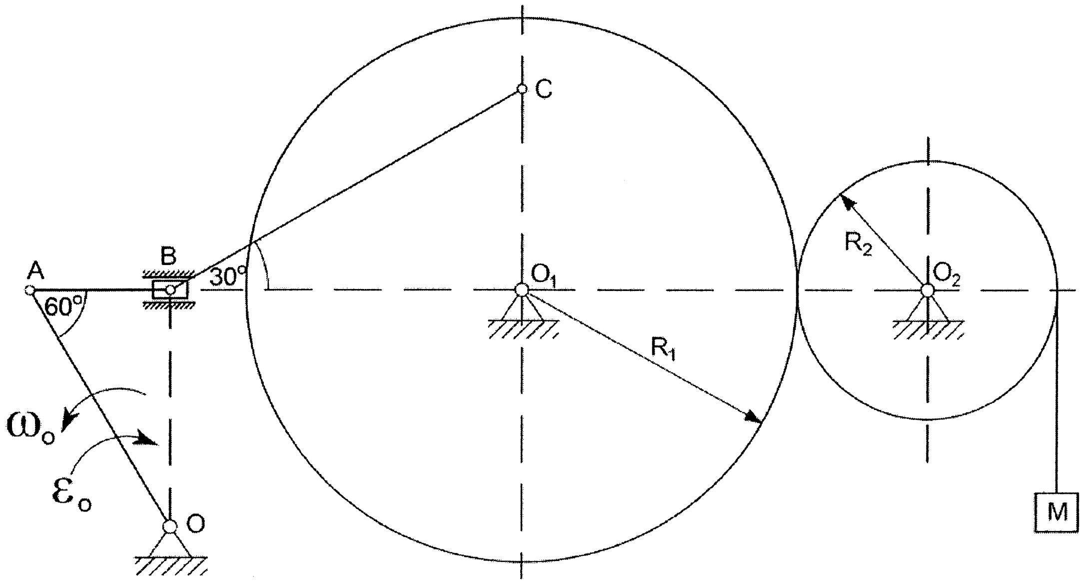
b) liniju putanje i hodograf brzina tačke D,

c) vektor ubrzanja tačke D u trenutku kada se klizač nadje u položaju B_1,

d) poluprečnik krivine trajektorije tačke D u trenutku kada klizač zaklapa ugao od $\frac{\pi}{4}$ sa pozitivnim pravcem ose Ox.



2. Za mehanizam u položaju prikazanom na slici, naći brzinu i ubrzanje tereta M. Štap OA u datom trenutku ima ugaonu brzinu ω_0 i ugaono ubrzanje $\varepsilon_0 = \sqrt{3}\omega_0^2$, a smerovi su označeni na slici. Dati su sledeći podaci: $\overline{OA} = \sqrt{3}R$, $\overline{O_1C} = R$, $R_1 = \sqrt{3}R$, $R_2 = 0.8R$, i $\measuredangle OBA = 90°$. Veze u tačkama O, A, B, C, O_1 i O_2 su zglobne. Izmedju diskova nema proklizavanja.

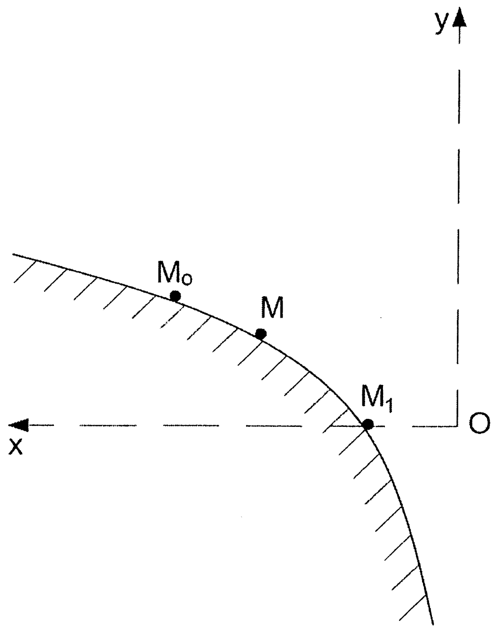


3. Tačka M mase m kreće se u vertikalnoj ravni Oxy (Oxy je inercijalni koordinatni sistem) po glatkoj nepokretnoj površi. Jednačina površi opisana je sa $y = \ln x$. U početnom trenutku $t_0 = 0$, tačka se nalazila u položaju $M_0(e, y_0)$, i imala početnu brzinu intenziteta V_0 (niz strmu ravan). Odrediti:

a) brzinu tačke M u zavisnosti od koordinate x,

b) intenzitet početne brzine V_0 da bi se tačka, u položaju $M_1(x_1, 0)$, odvojila od površi.

Zadate veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema.



jun 2018

(1.) $v_B = \omega_0 R$

$\overline{OB} = \sqrt{3}R$

$\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{CD} = 2\overline{OC} = R$

t_0: B je bio u B_0

1) j-ne kretanja tačke B ?

2) linija putanje i hodograf brzina tačke B ?

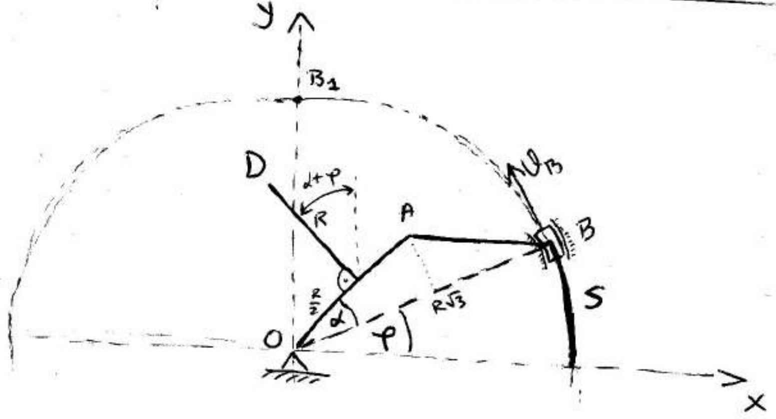
3) $\vec{a}_D\,(t_1)$? , t_1 – trenutak kada je B u B_1

4) $R_{KD}\,(t_2)$? , t_2 – trenutak kada B zaklapa ugao $\frac{\pi}{4}$ sa pozitivnim delom x-ose

---

$s = \int v_B\,dt = \int \omega_0 R\,dt = \omega_0 R t + \cancel{C_1}^{\,0}$

$\varphi = \dfrac{s}{R\sqrt{3}} = \dfrac{\omega_0 R t}{\sqrt{3}R} = \dfrac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}$



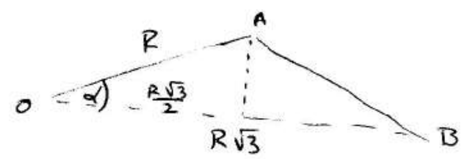
$x_D = \frac{R}{2}\cos(\alpha+\varphi) - R\sin(\alpha+\varphi) =$

$$\boxed{x_D = \frac{R}{2}\cos\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right) - R\sin\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right)}$$

$y_D = \frac{R}{2}\sin(\alpha+\varphi) + R\cos(\alpha+\varphi) =$

$$\boxed{y_D = \frac{R}{2}\sin\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right) + R\cos\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right)}$$

j-ne kretanja



$\cos\alpha = \dfrac{\frac{R\sqrt{3}}{2}}{R} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30}}$

$x_D^2 + y_D^2 = \frac{R^2}{4}\left(\cancel{\sin^2+\cos^2}^{\,1}\right) + R^2\left(\cancel{\sin^2+\cos^2}^{\,1}\right) + 0 = \frac{5}{4}R^2$

$$\boxed{x_D^2 + y_D^2 = \frac{5}{4}R^2}$$ – linija putanje (krug)

$\dot{x}_D = -\frac{R\omega_0}{2\sqrt{3}}\sin\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{R\omega_0}{\sqrt{3}}\cos\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right)$

$\dot{y}_D = \frac{R\omega_0}{2\sqrt{3}}\cos\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{R\omega_0}{\sqrt{3}}\sin\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right)$

$\ddot{x}_D = -\frac{R\omega_0^2}{6}\cos\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right) + \frac{R\omega_0^2}{3}\sin\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right)$

$\ddot{y}_D = -\frac{R\omega_0^2}{6}\sin\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right) - \frac{R\omega_0^2}{3}\cos\left(30+\frac{\omega_0 t}{\sqrt{3}}\right)$

za t_1 važi da je $\varphi_1 = 90 \Rightarrow \frac{\omega_0 t_1}{\sqrt{3}} = 90$,

$\ddot{x}_D(t_1) = -\frac{R\omega_0^2}{6}\cos(120) + \frac{R\omega_0^2}{3}\sin(120) = +\frac{R\omega_0^2}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{R\omega_0^2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{R\omega_0^2}{12}(2\sqrt{3}+1)$

$\ddot{y}_D(t_1) = -\frac{R\omega_0^2}{6}\sin(120) - \frac{R\omega_0^2}{3}\cos(120) = -\frac{R\omega_0^2}{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{R\omega_0^2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{R\omega_0^2}{12}(2-\sqrt{3})$

$$\boxed{\vec{a}_D(t_1) = \frac{R\omega_0^2}{12}(2\sqrt{3}+1)\,\vec{i} + \frac{R\omega_0^2}{12}(2-\sqrt{3})\,\vec{j}}$$

s obzirom da je linija putanje krug poluprečnika $\frac{\sqrt{5}}{2}R \Rightarrow R_{KD} = \frac{\sqrt{5}}{2}R$ (u svakom trenutku)

$$\boxed{R_{KD}(t_2) = \frac{\sqrt{5}}{2}R}$$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
http://www.mas.bg.ac.yu/obrazovanje/katedre/mehanika/vesti.html

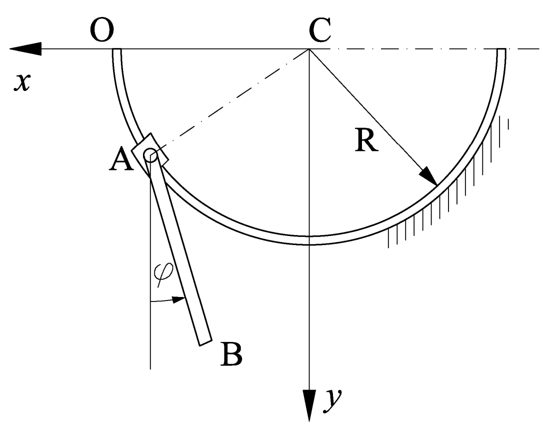
МЕХАНИКА 2

МЕХ 210-1108
8. фебруар 2018.
Прва група

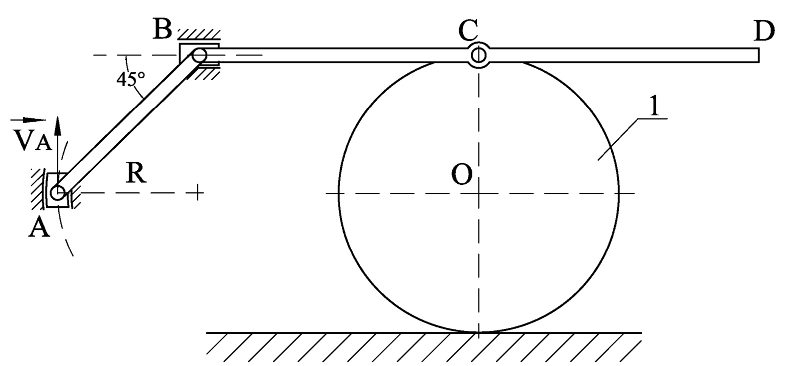
1. Клизач A креће се дуж непокретне вођице, савијене у облику кружнице полупречника R, брзином константног интензитета V_0 (слика 1). За клизач A зглобно је везан штап AB, дужине r. Угао који штап заклапа са правцем паралелним оси Cy мења се по закону $\varphi = \omega_0 t$, где је ω_0 константа. Ако је клизач у почетном тренутку био у положају O, одредити полупречник кривине трајекторије тачке B у тренутку када њена брзина први пут достигне максималну вредност.

2. Клизач A креће се брзином константног интензитета $V_A = R\omega_0$ по кружници полупречника R (слика 2). За клизач зглобно је везан штап AB дужине $\sqrt{2}R$ чији је крај B зглобно везан за клизач који се креће по праволинијској вођици. Штап BD, дужине $4R$, својим средиштем C зглобно је везан за обод диска 1, полупречника R који се котрља без клизања по равној подлози. Одредити брзину и убрзање тачке D као и угаоно убрзање диска 1.

3. Слободна материјална тачка M масе m креће се по закону $s = b\ln(ct+1)$ где су b и c позитивне константе. Одредити силу F која делује на тачку у функцији лучне координате да би се тачка кретала по кружници полупречника R.



Слика 1



Слика 2

februar 2018.

(1.) klizač A: $v_0 = \text{const.}$

$R,\ r$

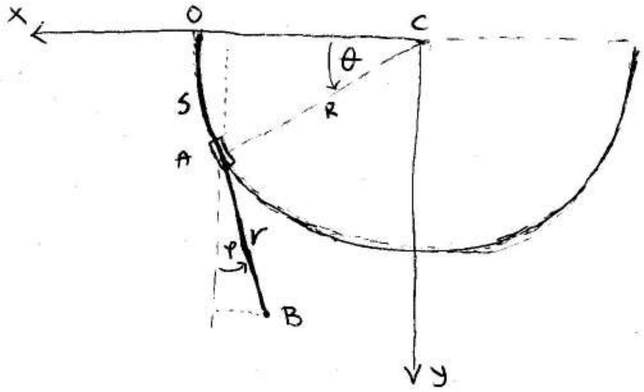
$\varphi = \omega_0 t$

t_0: A je bio u O

$R_{KB}(t_1)$? , t_1 - trenutak kada je v_B prvi put max.

$$S = \int v_A\,dt = \int v_0\,dt = v_0 t + \cancel{C_1}^{\,0}$$

$$\theta = \frac{S}{R} = \frac{v_0 t}{R}$$



$$x_B = R\cos\theta - r\sin\varphi = R\cos\frac{v_0 t}{R} - r\sin\omega_0 t$$

$$y_B = R\sin\theta + r\cos\varphi = R\sin\frac{v_0 t}{R} + r\cos\omega_0 t$$

$$\dot{x}_B = -v_0\sin\frac{v_0 t}{R} - r\omega_0\cos\omega_0 t$$

$$\dot{y}_B = v_0\cos\frac{v_0 t}{R} - r\omega_0\sin\omega_0 t$$

$$\ddot{x}_B = -\frac{v_0^2}{R}\cos\frac{v_0 t}{R} + r\omega_0^2\sin\omega_0 t$$

$$\ddot{y}_B = -\frac{v_0^2}{R}\sin\frac{v_0 t}{R} - r\omega_0^2\cos\omega_0 t$$

$$v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{v_0^2(\underbrace{\sin^2 + \cos^2}_{1}) + r^2\omega_0^2(\underbrace{\sin^2 + \cos^2}_{1}) + 2v_0 r\omega_0\left(\sin\frac{v_0 t}{R}\cos\omega_0 t - \cos\frac{v_0 t}{R}\sin\omega_0 t\right)}$$

$$v_B = \sqrt{v_0^2 + r^2\omega_0^2 + 2v_0 r\omega_0\sin\left(\frac{v_0 t}{R} - \omega_0 t\right)}$$

v_B je max kada je $\sin\left(\frac{v_0 t_1}{R} - \omega_0 t_1\right) = 1 \Rightarrow \frac{v_0 t_1}{R} - \omega_0 t_1 = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow t_1\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{2\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)}$$

$$R_K(t_1) = \frac{v(t_1)^2}{a_N(t_1)}\ ,\quad a_N(t_1) = \sqrt{a(t_1)^2 - a_t(t_1)^2}\ ,\quad a_t = \frac{dv}{dt}$$

$$a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2} = \sqrt{\frac{v_0^4}{R^2} + r^2\omega_0^4 + 2\frac{v_0^2}{R}r\omega_0^2\left(\sin\frac{v_0 t}{R}\cos\omega_0 t - \cos\frac{v_0 t}{R}\sin\omega_0 t\right)} =$$

$$a_B = \sqrt{\frac{v_0^4}{R^2} + r^2\omega_0^4 + 2\frac{v_0^2}{R}r\omega_0^2\sin\left(\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)t\right)}$$

$$a_{Bt} = \frac{dv_B}{dt} = \frac{1}{\cancel{2}}\left(v_0^2 + r^2\omega_0^2 + 2v_0 r\omega_0\sin\left(\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)t\right)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2}v_0 r\omega_0\cos\left(\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)t\right)\cdot\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)$$

$$a_{Bt} = \frac{v_0 r\omega_0\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)\cdot\cos\left(\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)t\right)}{\sqrt{v_0^2 + r^2\omega_0^2 + 2v_0 r\omega_0\sin\left(\left(\frac{v_0}{R} - \omega_0\right)t\right)}}$$

$$a_B\left(t_1=\frac{\pi}{2\left(\frac{v_0}{R}-\omega_0\right)}\right)=\sqrt{\frac{v_0^4}{R^2}+r^2\omega_0^4+2\frac{v_0^2}{R}r\omega_0^2\underbrace{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{1}}=\sqrt{\left(\frac{v_0^2}{R}+r\omega_0^2\right)^2}=$$

$$a_B\left(t_1=\frac{\pi}{2\left(\frac{v_0}{R}-\omega_0\right)}\right)=\frac{v_0^2}{R}+r\omega_0^2$$

$$a_{Bt}\left(t_1=\frac{\pi}{2\left(\frac{v_0}{R}-\omega_0\right)}\right)=\frac{v_0 r\omega_0\left(\frac{v_0}{R}-\omega_0\right)\underbrace{\cancel{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{0}}{\dots}=0$$

$$a_{Bn}\left(t_1=\frac{\pi}{2\left(v_0/R-\omega_0\right)}\right)=\sqrt{a_B(t_1)^2-a_{Bt}(t_1)^2}=\frac{v_0^2}{R}+r\omega_0^2$$

$$v_B\left(t_1=\frac{\pi}{2\left(v_0/R-\omega_0\right)}\right)=\sqrt{v_0^2+r^2\omega_0^2+2v_0 r\omega_0\underbrace{\cancel{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}}_{1}}=\sqrt{(v_0+r\omega_0)^2}=(v_0+r\omega_0)$$

$$\boxed{R_K\left(t_1=\frac{\pi}{2\left(v_0/R-\omega_0\right)}\right)=\frac{(v_0+r\omega_0)^2}{\frac{v_0^2}{R}+r\omega_0^2}}$$

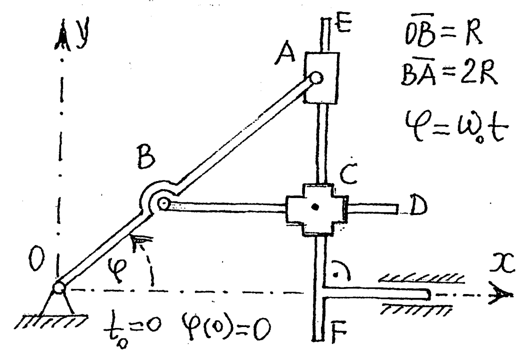
1. Za mehanizam prikazan na slici odrediti za tačku (klizač) C:

a) liniju putanje i hodograf brzina,

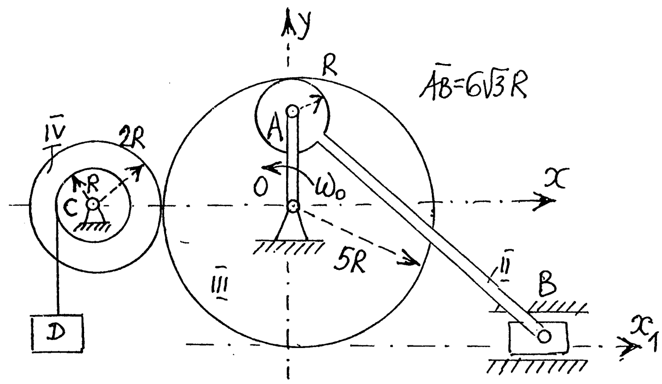
b) prvi trenutak kada je ubrzanje tačke C maksimalno, kao i intenzitet ubrzanja u tom trenutku,

c) poluprečnik krivine trajektorije u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{6\omega_0}$.

Štap OA obrće se oko ose koja prolazi kroz nepokretni oslonac O po zakonu $\varphi(t) = \omega_0 t$, $\omega_0 = \text{const.}$ Klizač A može da klizi duž štapa EF, a klizač C može istovremeno da klizi duž štapova EF i BD. Štap EF kruto je spojen pod pravim uglom sa drugim štapom koji može da klizi duž pravolinijske vodjice u pravcu ose Ox. Veze u tačkama O, A i B su zglobne. Dati su sledeći podaci: $\overline{OB} = R, \overline{BA} = 2R$.



2. Mehanizam se sastoji iz krivaje OA (koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_0), tela II (disk poluprečnika R sa ispustom, $\overline{AB} = 6\sqrt{3}R$), diska III (poluprečnika $5R$), klizača B, koaksijalnog diska IV (poluprečnika R i $2R$), i tereta D. Veze u tačkama O, A, B i C su zglobne. U datom položaju (krivaja OA je na Oy osi) odrediti brzinu i ubrzanje tereta D. Izmedju diskova nema proklizavanja. Zadate veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema.

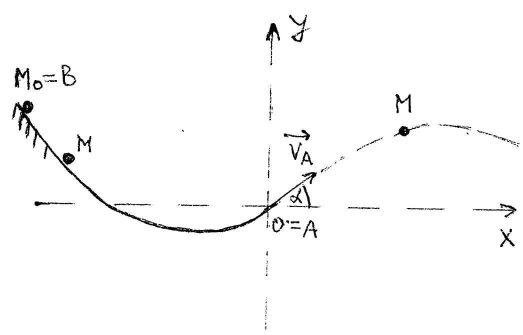


3. U vertikalnoj ravni Oxy (Oxy je inercijalni koordinatni sistem) postavljena je idealna glatka nepokretna cev $\widehat{BA}$. Jednačina cevi opisana je sa $y = x^2 + 2x$, i pritom je $B(-3,3)$, $A(0,0)$. U početnom trenutku $t_0 = 0$, bez početne brzine, puštena je iz položaja B u cev tačka M mase m. U položaju A tačka M napušta cev i kreće se slobodno. Pri slobodnom kretanju na tačku dejstvuje i otporna sila $\vec{F}_o = -mb\vec{V}$, gde je b poznata i pozitivna konstanta. Odrediti:

a) brzinu tačke M u položaju A, b) konačne jednačine slobodnog kretanja tačke M,

c) konačne jednačine slobodnog kretanja tačke M, ako koeficijent $b \to 0$.

Zadate veličine su date u osnovnim jedinicama SI sistema.



januar 2018.

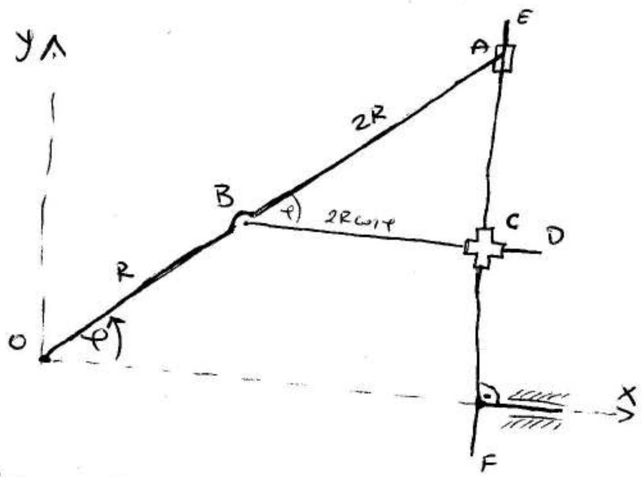
(1.) $\varphi(t) = \omega_0 t$

$\overline{OB} = R, \quad \overline{BA} = 2R$

1) linija putanje ; hodograf brzina tačke C ?

2) $a_C(t_1)$? , t_1 - prvi trenutak kada je a_C max

3) $R_{KC}(t_2 = \frac{\pi}{6\omega_0})$?



$$\boxed{\begin{aligned} x_C &= R\cos\varphi + 2R\cos\varphi = 3R\cos\omega_0 t \\ y_C &= y_B = R\sin\varphi = R\sin\omega_0 t \end{aligned}}$$

$$\boxed{\left(\frac{x_C}{3R}\right)^2 + \left(\frac{y_C}{R}\right)^2 = 1}$$

linija putanje (elipsa)

$$\dot{x}_C = -3R\omega_0\sin\omega_0 t \qquad \ddot{x}_C = -3R\omega_0^2\cos\omega_0 t$$

$$\dot{y}_C = R\omega_0\cos\omega_0 t \qquad \ddot{y}_C = -R\omega_0^2\sin\omega_0 t$$

$$\boxed{\left(\frac{\dot{x}_C}{3R\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_C}{R\omega_0}\right)^2 = 1}$$

hodograf brzina (elipsa)

$$a_C = \sqrt{\ddot{x}_C^2 + \ddot{y}_C^2} = \sqrt{9R^2\omega_0^4\cos^2\omega_0 t + R^2\omega_0^4\sin^2\omega_0 t} = R\omega_0^2\sqrt{1 + 8\cos^2(\omega_0 t)}$$

a_C je max za $\cos^2(\omega_0 t_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_1 = 0}$

$a_C(t_1) = R\omega_0^2\sqrt{1 + 8\cdot 1} = 9R\omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{C\max} = 9R\omega_0^2}$

$$\dot{x}_C(t_2) = -3R\omega_0\cdot\frac{1}{2} = -\frac{3}{2}R\omega_0 \qquad \ddot{x}_C(t_2) = -3R\omega_0^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}R\omega_0^2$$

$$\dot{y}_C(t_2) = R\omega_0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega_0 \qquad \ddot{y}_C(t_2) = -R\omega_0^2\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}R\omega_0^2$$

$$R_K(t_2) = \frac{\left(\sqrt{\frac{9}{4}R^2\omega_0^2 + \frac{3}{4}R^2\omega_0^2}\right)^3}{\left|\frac{3}{4}R^2\omega_0^3 + \frac{9}{4}R^2\omega_0^3\right|} = \frac{\left(R\omega_0\sqrt{3}\right)^3}{3R^2\omega_0^3} = \frac{R^{\cancel{3}}\cancel{\omega_0^3}\cancel{3}\sqrt{3}}{\cancel{3}\cancel{R^2}\cancel{\omega_0^3}} = R\sqrt{3}$$

$$\boxed{R_K\left(t_2 = \frac{\pi}{6\omega_0}\right) = R\sqrt{3}}$$

Mehanika 2

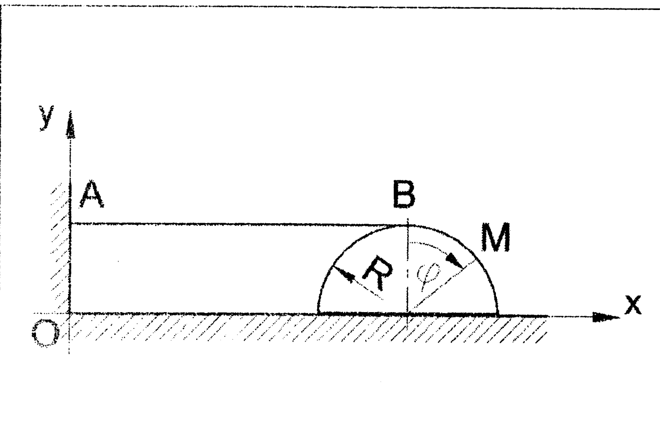
14. septembar 2017.
Prva grupa

1. Preko polucilindra poluprečnika R prebačena je neistegljiva nit koja je u tački A vezana za vertikalni zid tako da je deo AB horizontalan, pravca ose Ox kao na pripadajućoj slici. Za drugi kraj niti vezana je tačka M. Polucilindar se kreće po horizontalnoj ravni brzinom konstantnog intenziteta v_0 pravca i smera kao osa Ox. Tačka M kreće se po površi polucilindra u ravni upravnoj na ravan izvodnice polucilindra. U početnom trenutku tačka M je dodirivala horizontalnu ravan. Odrediti:
   a) intenzitete brzine i ubrzanja tačke M u funkciji od ugla φ zadatog na slici; $a_M(\varphi)$
   b) Poluprečnik krivine trajektorije u funkciji od ugla φ zadatog na slici. $V_M(\varphi)$

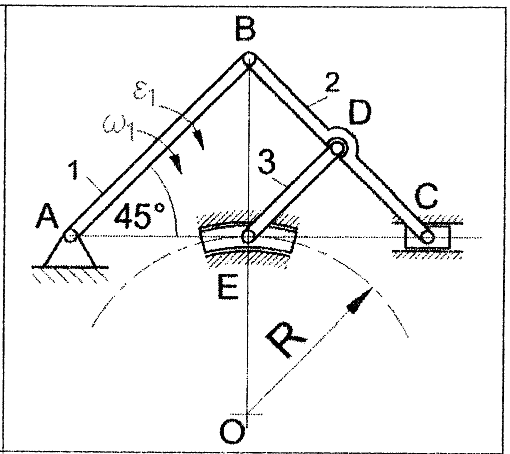
$R_K(\varphi)$

2. Štap AB, dužine $2b$ zglobno je vezan za podlogu u tački A, dok je u tački B zglobno vezan za štap BC dužine $2b$. Štap BC je u tački C zglobno vezan za klizač koji se kreće po horizontalnoj vođici, a svojim središtem D zglobno vezan za štap ED dužine b. Drugim krajem štap ED zglobno je vezan za klizač E, koji se kreće po kružnoj vođici poluprečnika $R = b\sqrt{2}$. Ako u prikazanom položaju štap AB ima ugaonu brzinu $\omega_1 = \omega$ i ugaono ubrzanje $\varepsilon_1 = \varepsilon$ odrediti ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje štapa ED i brzinu i ubrzanje klizača E. Veličine b, ω i ε smatrati poznatim i $\sphericalangle BEC = 90°$.

3. U temenu $A\left(\frac{1}{2}, 1, 4\right)$ nalazi se nepomičan centar privlačenja materijalne tačke M, mase m, dok se u tački $B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\right)$ nalazi nepomični centar odbijanja materijalne tačke M, mase m, koja se kreće u polju Zemljine teže. Sila privlačenja tačke ka centru A proporcionalna je rastojanju tačke od centra privlačenja sa koeficijentom privlačenja mk^2. Sila odbijanja tačke od centra B proporcionalna je rastojanju tačke od centra odbijanja sa koeficijentom $2mk^2$. Ako je u početnom trenutku tačka M mirovala u tački sa koordinatama (2,3,0) odrediti konačne jednačine kretanja tačke M.



1



2

Овај папир обавезно предати са испитном свеском!
Желимо Вам успешан рад!

oktobar 2017.

① Brzina polucilindra je $v_0 = const.$

t_0: M dodirivala podlogu

1) $v_M(\varphi)$? $a_M(\varphi)$?

2) $R_{KM}(\varphi)$?

Rešenje: pogledati septembar 2023. !

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд

МЕХАНИКА 2

24. август 2017.

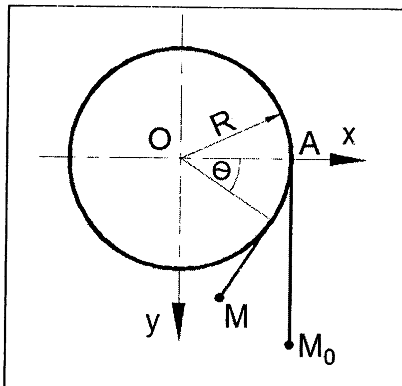
Прва група

1. У тачки A кружног цилиндра полупречника R, обешено је гипко, неистегљиво уже, дужине $2R$. У почетном тренутку ($\theta=0$) у тачки M, која је везана за слободни крај ужета саопшти се почетна брзина v_0 у негативном смеру осе Ox, тако да уже почиње да се намотава на цилиндар. Сматрајући да је интензитет вектора брзине тачке M у току намотавања ужета константан, одредити убрзање тачке M, полупречник кривине трајекторије, као и величине $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ у функцији угла намотавања ужета, θ. У току кретања тачке у равни уже је стално затегнуто.

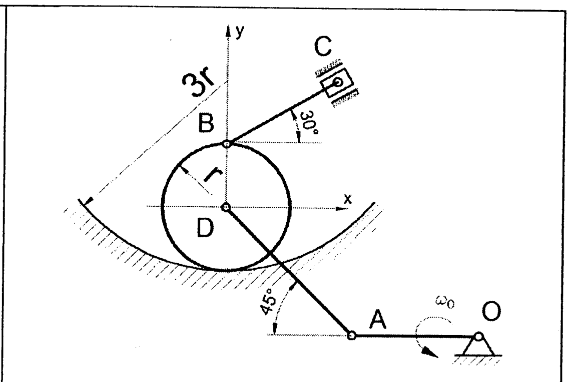
2. Механизам је састављен од штапа OA дужине $2r$ који се обрће константном угаоном брзином ω_0 око осе Oz, штапа AD дужине $2r\sqrt{2}$, цилиндра D полупречника r који се котрља без клизања по цилиндричној површи полупречника $3r$ и штапа BC дужине $2r$ који је за цилиндар везан крајем B, а крајем C за праволинијске вођице као на слици. Везе у тачкама O, A, D, C и B су зглобне. У положају приказаном на слици одредити брзину и убрзање тачке B и брзину тачке C.

3. Тачка M, масе m креће се у пољу теже по глаткој непокретној равни, чија је једначина у односу на Декартов правоугли координатни систем Oxyz, код кога је оса Oz оријентисана вертикално навише дата са x+3y+4z=3. У почетном тренутку тачка је била у положају $M_0(1,\frac{1}{3},\frac{1}{4})$ и имала почетну брзину $\vec{v_0} = \vec{j}$. Одредити:

   a) Коначне једначине кретања тачке M;
   b) Интензитет реакције везе.



1



2

Овај папир обавезно предати са испитном свеском!
Желимо Вам успешан рад!

septembar 2017.

(1) uže dužine $2R$

$t_0 = 0$: $\theta = 0$

M ima brzinu v_0 u negativnom smeru x-ose

$v_M = const.$

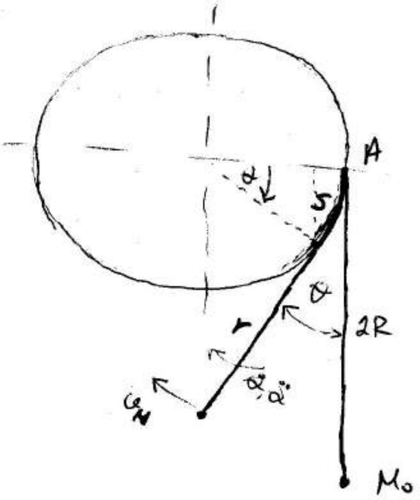
$a_M(\theta)$? $R_K(\theta)$? $\dot\theta(\theta)$? $\ddot\theta(\theta)$?

$\ell(t_0) = \ell(t)$

$2R = s + r$

$2R = R\theta + r$

$r = 2R - R\theta$



$x_M = R\cos\theta - r\sin\theta = R\cos\theta - (2R - R\theta)\sin\theta$

$y_M = R\sin\theta + r\cos\theta = R\sin\theta + (2R - R\theta)\cos\theta$

$v_M = r \cdot \dot\theta$

$v_0 = (2R - R\theta)\,\dot\theta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot\theta = \frac{v_0}{2R - R\theta}}$

$$\ddot\theta = \frac{0 - v_0(0 - R\dot\theta)}{(2R - R\theta)^2} = \frac{v_0 R \frac{v_0}{2R - R\theta}}{(2R - R\theta)^2} \Rightarrow \boxed{\ddot\theta = \frac{v_0^2 R}{(2R - R\theta)^3}}$$

$\dot x_M = \cancel{-R\dot\theta\sin\theta} - \cancel{(0 - R\dot\theta)\sin\theta} - (2R - R\theta)\dot\theta\cos\theta$

$\dot y_M = \cancel{R\dot\theta\cos\theta} + \cancel{(0 - R\dot\theta)\cos\theta} + (2R - R\theta)(-\dot\theta\sin\theta) = -(2R - R\theta)\dot\theta\sin\theta$

$= -(2R - R\theta)\dot\theta\cos\theta$

$\ddot x_M = -(-R\dot\theta)\dot\theta\cos\theta - (2R - R\theta)\ddot\theta\cos\theta + (2R - R\theta)\dot\theta^2\sin\theta$

$\ddot y_M = -(-R\dot\theta)\dot\theta\sin\theta - (2R - R\theta)\ddot\theta\sin\theta - (2R - R\theta)\dot\theta^2\cos\theta$

$v_M = \sqrt{\dot x_M^2 + \dot y_M^2} = \sqrt{(2R - R\theta)^2\dot\theta^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \Rightarrow \boxed{v_M = (2R - R\theta)\dot\theta}$

$a_M = \sqrt{\ddot x_M^2 + \ddot y_M^2} = \ldots\ldots \Rightarrow \boxed{a_M = \ldots}$

$R_{KM} = \frac{v_M^3}{|\dot x_M \ddot y_M - \dot y_M \ddot x_M|} = \ldots\ldots \Rightarrow \boxed{R_{KM} = \ldots}$

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
КАТЕДРА ЗА МЕХАНИКУ
ул. Краљице Марије 16, 11120 Београд

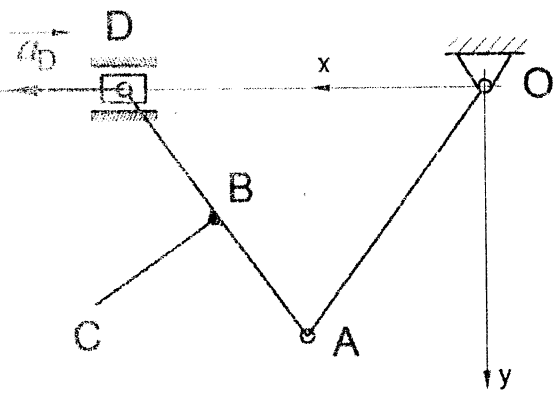
МЕХАНИКА 2

19. јануар 2017.
Прва група

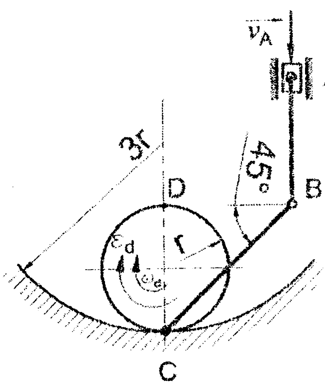
1. Клизач D, механизма приказаног на слици креће се убрзањем $a_D = 8\left[\frac{m}{s^2}\right]$, без почетне брзине из положаја у коме су штапови OA и DA вертикални (тачка D поклапа се са тачком O). Ако је $\overline{OA} = \overline{DA} = 2\overline{BC} = 2l, l = 1[m]$ и $BC \perp DA$ и $\overline{AB} = \overline{BD}$, одредити коначне једначине кретања тачке C и полупречник кривине трајекторије тачке C у тренутку када је $x_D = 2\,[m]$.

2. Механизам се састоји од клизача A, штапова AB дужине $2r$ и BC дужине $2r\sqrt{2}$ и диска полупречника r, као на слици, при чему је $r=1$[m]. Везе у тачкама A, B и C су зглобне. Ако је $v_A = 2$[m/s], $\omega_d = 2\,[s^{-1}]$ и $\varepsilon_d = 1[s^{-2}]$, одредити угаоне брзине штапова AB и BC, као и брзину и убрзање тачке D на диску, у положају приказаном на слици.

3. Тачка M, масе m, може да се креће по идеално глаткој (склерономној, задржавајућој) вези која је представљена пресеком двеју равни $x+2y+z=0$ и $2x+y+2z=0$, под дејством силе Земљине теже. Ако је у почетном тренутку тачка била у положају $M_0(0,0,0)$, са почетном брзином $\vec{v_0} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$, одредити коначне једначине кретања тачке M и реакције веза. Све величине дате су у основним јединицама SI система.



Слика уз задатак 1



Слика уз задатак 2

Овај папир обавезно предати са испитном свеском!
Желимо Вам успешан рад!

januar 2017.

(1.) $a_D = 8$

$t_0 = 0$: OA i DA su vertikalni

D bez početne brzine

$\overline{OA} = \overline{DA} = 2\overline{BC} = 2\ell$, $\ell = 1$

$BC \perp DA$, $\overline{AB} = \overline{BD}$

j-ne kretanja tačke D ?

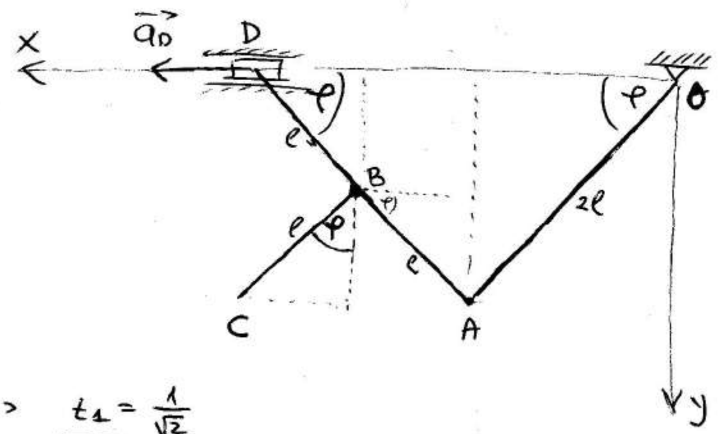
$R_{KD}(t_1)$?, t_1 - trenutak kada je $x_D = 2$

$$\ddot{x}_D = 8 \quad / \int dt$$

$$\dot{x}_D = 8t + c_1$$

$$\dot{x}_D(t_0 = 0) = 0 + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c_1 = 0}}$$

$$\dot{x}_D = 8t \quad / \int dt$$



$$x_D = 4t^2 + c_2$$

$$x_D(t_0 = 0) = 0 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{c_2 = 0}}$$

$$x_D = 4t^2 \quad , \quad x_D = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}}}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_D = 4\ell\cos\varphi = 4\cos\varphi \\ x_D = 4t^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\cos\varphi = t^2}} \Rightarrow \sin\varphi = \sqrt{1-\cos^2\varphi} \Rightarrow \underline{\underline{\sin\varphi = \sqrt{1-t^4}}}$$

$$x_C = 2\ell\cos\varphi + \ell\cos\varphi + \ell\sin\varphi = 3\cos\varphi + \sin\varphi = 3t^2 + \sqrt{1-t^4}$$

$$y_C = \ell\sin\varphi + \ell\cos\varphi = t^2 + \sqrt{1-t^4}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_C = 3t^2 - \sqrt{1-t^4} \\ y_C = t^2 + \sqrt{1-t^4} \end{array}}$$

j-ne kretanja

$$\dot{x}_C = 6t - \frac{1}{2}(1-t^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4t^3) = 6t + \frac{2t^3}{\sqrt{1-t^4}}$$

$$\dot{y}_C = 2t + \frac{1}{2}(1-t^4)^{-\frac{1}{2}}(-4t^3) = 2t - \frac{2t^3}{\sqrt{1-t^4}}$$

$$\ddot{x}_C = 6 + \frac{6t^2 \cdot \sqrt{1-t^4} - 2t^3 \cdot \frac{1}{2}(1-t^4)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-4t^3)}{(1-t^4)} =$$

$$= 6 + \frac{6t^2(1-t^4) + 4t^6}{(1-t^4)^{3/2}}$$

$$\ddot{y}_C = 2 - \frac{6t^2(1-t^4) + 4t^6}{(1-t^4)^{3/2}}$$

$$\dot{x}_C\left(t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{6}{\sqrt{2}} + \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\dot{y}_C\left(t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\ddot{x}_C\left(t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 6 + \frac{3(1-\frac{1}{4}) + 4 \cdot \frac{1}{8}}{(1-\frac{1}{4})^{3/2}} =$$

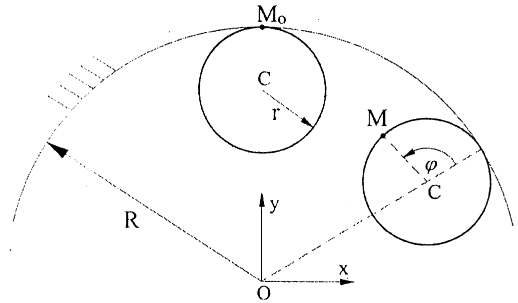
$$= 6 + \frac{\frac{9}{4} + \frac{1}{2}}{\frac{3}{4}\frac{\sqrt{3}}{2}} = 6 + \frac{\frac{11}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}}$$

$$\ddot{y}_C\left(t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \quad \frac{\frac{11}{4}}{\frac{3\sqrt{3}}{8}} = 2 \quad \frac{11 \cdot 2}{3\sqrt{3}}$$

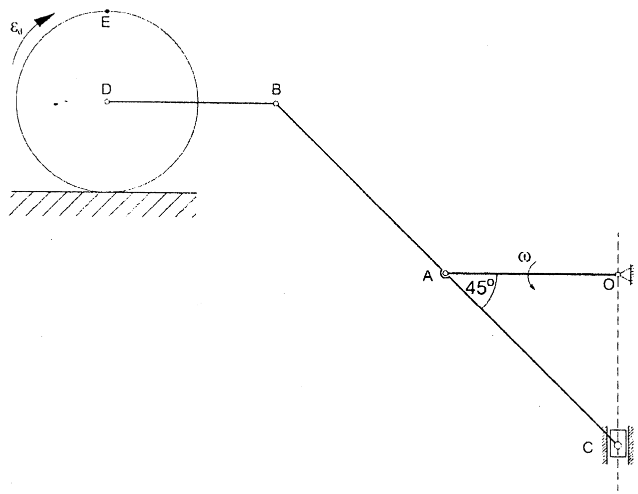
$$\boxed{R_K\left(t_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left.\frac{\left(\sqrt{\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2}\right)^3}{|\dot{x}_C\ddot{y}_C - \dot{y}_C\ddot{x}_C|}\right|_{t = \frac{1}{\sqrt{2}}} = \dots}$$

MEHANIKA 2 — **2.** GRUPA — SEPTEMBAR 2016

1. Po nepokretnom disku poluprečnika R=3 [m] kotrlja se bez klizanja drugi disk poluprečnika r=1 [m] po zakonu $\varphi = \omega t$ [rad], gde je $\omega =$ const, a vreme t je dato u sekundama. Tačka M se nalazi na obodu manjeg diska, i u početnom trenutku se nalazila na osi Oy. Odrediti poluprečnik krivine putanje tačke M u trenutku kada je njena brzina maksimalna.

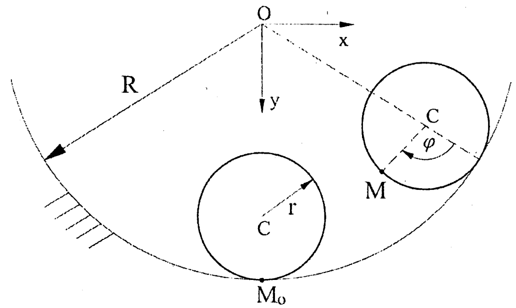


2. Za dati mehanizam u položaju prikazanom na slici odrediti intenzitet brzine tačke E i ugaono ubrzanje diska ε_d. Veze u tačkama O, A, B, C i D su zglobne. Štap OA obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω. Klizač C kreće se po pravolinijskoj vodjici. Štap CAB zglobno je spojen u tački A za štap OA. Dato je: $\overline{OA} = \overline{BD} = R$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{DE} = 0.5R$.

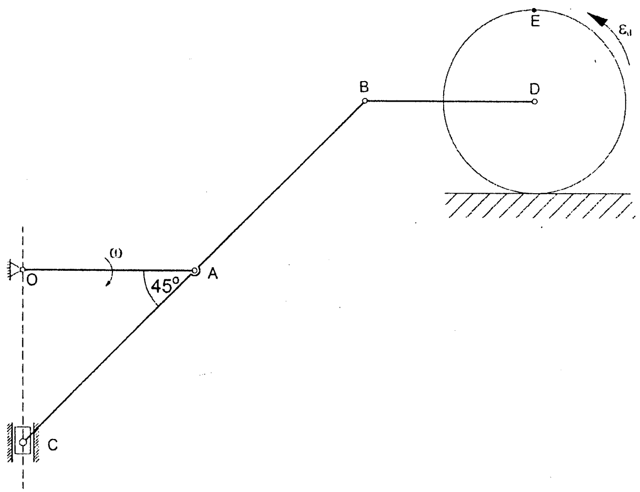


MEHANIKA 2 — **1.** GRUPA — SEPTEMBAR 2016

1. Po nepokretnom disku poluprečnika R=3 [m] kotrlja se bez klizanja drugi disk poluprečnika r=1 [m] po zakonu $\varphi = \omega t$ [rad], gde je $\omega =$ const, a vreme t je dato u sekundama. Tačka M se nalazi na obodu manjeg diska, i u početnom trenutku se nalazila na osi Oy. Odrediti poluprečnik krivine putanje tačke M u trenutku kada je njena brzina maksimalna.

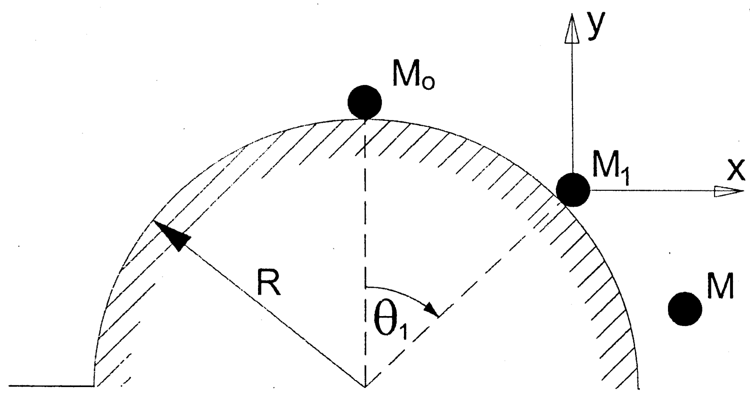


2. Za dati mehanizam u položaju prikazanom na slici odrediti intenzitet brzine tačke E i ugaono ubrzanje diska ε_d. Veze u tačkama O, A, B, C i D su zglobne. Štap OA obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω. Klizač C kreće se po pravolinijskoj vodjici. Štap CAB zglobno je spojen u tački A za štap OA. Dato je: $\overline{OA} = \overline{BD} = R$, $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\overline{DE} = 0.5R$.



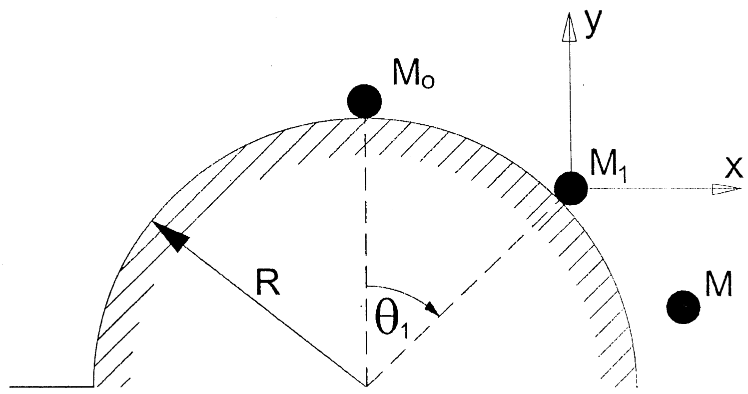
3. Tačka M mase m može da se kreće u vertikalnoj ravni po glatkom polucilindru poluprečnika $R = 1.5[m]$. U početnom trenutku tačka je bila u najvišem položaju. Odrediti ugao θ_1 pri kome će se tačka odvojiti od polucilindra, ako je iz početnog položaja tačka krenula brzinom zanemarljivog intenziteta ($V_0 \approx 0$).

Ako se u tački odvajanja postavi nepokretni pravougli koordinatni sistem xM_1y, odrediti konačne jednačine slobodnog kretanja tačke. Uzeti da je ubrzanje Zemljine teže g.



3. Tačka M mase m može da se kreće u vertikalnoj ravni po glatkom polucilindru poluprečnika $R = 6[m]$. U početnom trenutku tačka je bila u najvišem položaju. Odrediti ugao θ_1 pri kome će se tačka odvojiti od polucilindra, ako je iz početnog položaja tačka krenula brzinom zanemarljivog intenziteta ($V_0 \approx 0$).

Ako se u tački odvajanja postavi nepokretni pravougli koordinatni sistem xM_1y, odrediti konačne jednačine slobodnog kretanja tačke. Uzeti da je ubrzanje Zemljine teže g.



<u>septembar 2016.</u>

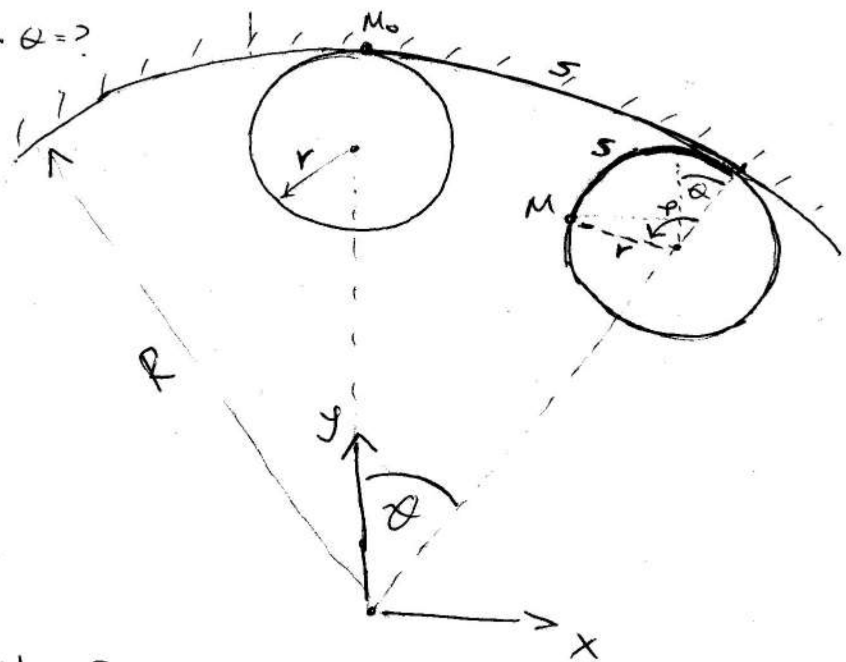
(1.) $R=3$

$r=1$

$\varphi=\omega t$

$R_K(t_1)$? , t_1 - trenutak kada je v_M max.

$$\left.\begin{aligned} x_M &= (R-r)\sin\theta - r\sin(\varphi-\theta) \\ y_M &= (R-r)\cos\theta + r\cos(\varphi-\theta) \end{aligned}\right\} \theta=?$$



$$\left.\begin{aligned} s &= r\varphi = 1\cdot\omega t = \omega t \\ s &= R\theta = 3\cdot\theta \end{aligned}\right\} \underline{\underline{\theta = \frac{\omega t}{3}}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_M &= 2\sin\left(\frac{\omega t}{3}\right) - \sin\left(\frac{2}{3}\omega t\right) \\ y_M &= 2\cos\left(\frac{\omega t}{3}\right) + \cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right) \end{aligned}}$$

$$\dot{x}_M = \frac{2}{3}\omega\cos\left(\frac{\omega t}{3}\right) - \frac{2}{3}\omega\cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right) = \frac{2}{3}\omega\left(\cos\left(\frac{\omega t}{3}\right) - \cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right)\right)$$

$$\dot{y}_M = -\frac{2}{3}\omega\sin\left(\frac{\omega t}{3}\right) - \frac{2}{3}\omega\sin\left(\frac{2}{3}\omega t\right) = -\frac{2}{3}\omega\left(\sin\left(\frac{\omega t}{3}\right) + \sin\left(\frac{2}{3}\omega t\right)\right)$$

$$\ddot{x}_M = \frac{2}{3}\omega\left(-\frac{\omega}{3}\sin\left(\frac{\omega t}{3}\right) + \frac{2}{3}\omega\sin\left(\frac{2\omega t}{3}\right)\right) = -\frac{2}{9}\omega^2\left(\sin\left(\frac{\omega t}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{2}{3}\omega t\right)\right)$$

$$\ddot{y}_M = -\frac{2}{3}\omega\left(\frac{\omega}{3}\cos\left(\frac{\omega t}{3}\right) + \frac{2}{3}\omega\cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right)\right) = -\frac{2}{9}\omega^2\left(\cos\left(\frac{\omega t}{3}\right) + 2\cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right)\right)$$

$$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\omega\right)^2\left(\underline{\cos^2\left(\frac{\omega t}{3}\right)} - 2\cos\left(\frac{\omega t}{3}\right)\cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right) + \underline{\underline{\cos^2\left(\frac{2}{3}\omega t\right)}} + \underline{\sin^2\left(\frac{\omega t}{3}\right)} + 2\sin\left(\frac{\omega t}{3}\right)\sin\left(\frac{2}{3}\omega t\right) + \underline{\underline{\sin^2\left(\frac{2}{3}\omega t\right)}}\right)}$$

$$v_M = \frac{2}{3}\omega\sqrt{1+1-2\left(\cos\left(\frac{\omega t}{3}\right)\cos\left(\frac{2}{3}\omega t\right) - \sin\left(\frac{\omega t}{3}\right)\sin\left(\frac{2}{3}\omega t\right)\right)} = \frac{2}{3}\omega\sqrt{2-2\cos\left(\frac{\omega t}{3}+\frac{2\omega t}{3}\right)}$$

$v_M = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega\sqrt{1-\cos(\omega t)}$, v_M je max za $\cos(\omega t_1) = -1 \Rightarrow \omega t_1 = \pi \Rightarrow \underline{\underline{t_1 = \frac{\pi}{\omega}}}$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_M\left(t_1=\frac{\pi}{\omega}\right) &= \frac{2}{3}\omega\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}\omega \\ \dot{y}_M\left(t_1=\frac{\pi}{\omega}\right) &= -\frac{2}{3}\omega\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3}\omega \end{aligned}\right\} v_M\left(t_1=\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\omega\cdot\sqrt{1+1} = \frac{4}{3}\omega$$

$$\ddot{x}_M\left(t_1=\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{2}{9}\omega^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{2}{9}\omega^2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}\omega^2$$

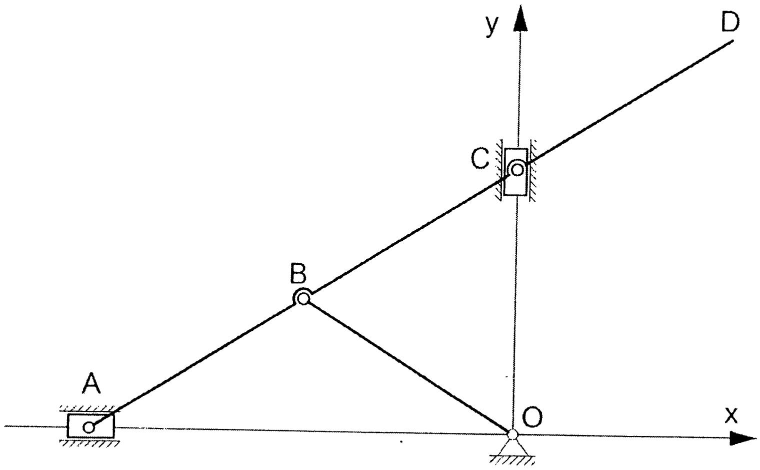
$$\ddot{y}_M\left(t_1=\frac{\pi}{\omega}\right) = -\frac{2}{9}\omega^2\left(\frac{1}{2} - 2\cdot\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{9}\omega^2\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{9}\omega^2$$

$$R_K\left(t_1=\frac{\pi}{\omega}\right) = \frac{\left(\frac{4}{3}\right)^3\omega^3}{\left|\frac{2}{3}\omega\cdot\frac{1}{9}\omega^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\omega\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}\omega^2\right|} = \frac{\frac{64}{27}\omega^3}{\omega^3\left|\frac{2+6}{27}\right|} = \frac{64}{8} = 8$$

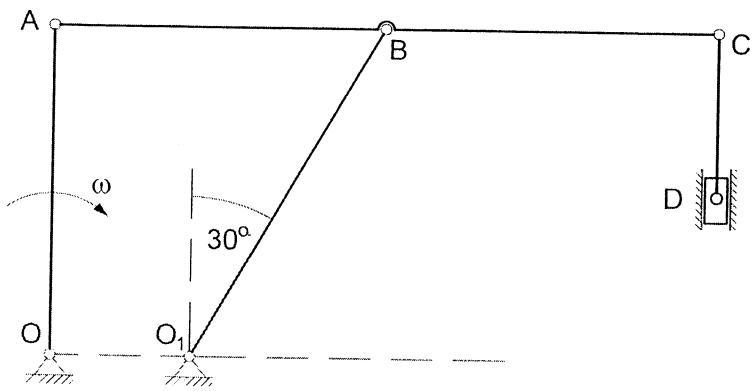
$$\boxed{R_K\left(t_1=\frac{\pi}{\omega}\right) = 8}$$

MEHANIKA 2 **1.** GRUPA JUL 2016

1. Štap *ABCD*, *AB*=*BC*=*CD*=*R*, zglobno je vezan u tačkama *A* i *C* za klizače koji se kreću po vodjicama koje medjusobno zaklapaju ugao od 90°. Veze u tačkama *O* i *B* takodje su zglobne, i *OB*=*R*. Ako se klizač *A* kreće duž ose *Ox* ubrzanjem $a_A = 18R\cos(3t)$, odrediti za tačku *D*: a) liniju putanje, b) brzinu i ubrzanje u funkciji vremena, c) hodograf brzine, d) poluprečnik krivine trajektorije u trenutku $t_1 = \frac{\pi}{2}$. U početnom trenutku $t_0 = 0$, klizač A je mirovao u položaju $x_A(0) = -2R$.



2. Za dati mehanizam u datom položaju odrediti brzinu klizača *D*, i ubrzanje tačke *C*. Veze u tačkama *O*, *O₁*, *A*, *B*, *C* i *D* su zglobne. Poluga *OA* obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω. Dato je *OA*=*AB*=*BC*=*R*, *CD*=0.5*R*.



3. Tačka *M* mase *m*=1 kg kreće se u vertikalnoj ravni u homogenom polju teže pod dejstvom privlačne sile čiji je intenzitet srazmeran rastojanju od nepokretnog centra privlačenja u koordinatnom početku Dekartovog sistema *xOy* (koeficijent proporcionalnosti je *k*=4 N/m). Ako je u početnom trenutku tačka bila u koordinatnom početku i imala brzinu intenziteta $V_0 = 2\,\frac{m}{s}$ u pozitivnom smeru ose *Ox*, odrediti jednačine kretanja i trajektoriju tačke. Odrediti prvi trenutak t_1 $(t_1 \neq 0)$ kada će tačka ponovo proći kroz početni položaj. Uzeti da je ubrzanje polja teže $g = 4\,\frac{m}{s^2}$. Osa *Oy* usmerena je vertikalno naviše.

jul 2016.

(1.) $AB = BC = CD = R$, $\overline{OB} = R$

$a_A = 18R\cos(3t)$

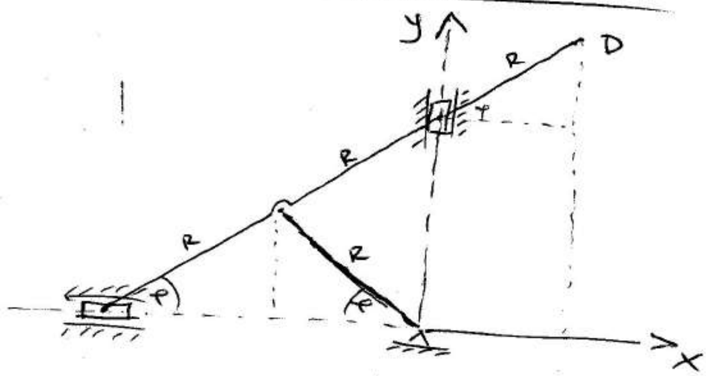
$t_0 = 0$: A je mirovao u položaju $x_A(t_0) = -2R$

1) linija putanje tačke D?

2) $v_D(t)$? $a_D(t)$?

3) hodograf brzine?

4) $R_K(t_1 = \frac{\pi}{2})$?



$\ddot{x}_A = 18R\cos(3t)$ $\quad / \int dt$

$\dot{x}_A = \int 18R\cos(3t)\,dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 3t \\ du = 3dt \end{array} \right\} =$

$= 18R \int \cos u \frac{du}{3} = 6R\sin 3t + c_1$

$\dot{x}_A(t_0 = 0) = 0 + c_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{c_1 = 0}$

$\dot{x}_A = 6R\sin 3t$ $\quad / \int dt$

$x_A = \int 6R\sin 3t\,dt = \left\{ \begin{array}{l} u = 3t \\ du = 3dt \end{array} \right\} = 6R \int \sin u \frac{du}{3} = -2R\cos 3t + c_2$

$x_A(t_0 = 0) = -2R \cdot 1 + c_2 = -2R \quad \Rightarrow \quad \underline{c_2 = 0}$

$x_A = -2R\cos 3t$

$\left. \begin{array}{l} x_A = -2R\cos\varphi \\ x_A = -2R\cos 3t \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{\varphi = 3t}$

$\left. \begin{array}{l} x_D = R\cos\varphi = R\cos 3t \\ y_D = 3R\sin\varphi = 3R\sin 3t \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{x_D}{R}\right)^2 + \left(\frac{y_D}{3R}\right)^2 = 1}$

linija putanje (elipsa)

$\dot{x}_D = -3R\sin 3t$

$\dot{y}_D = 9R\cos 3t$

$\ddot{x}_D = -9R\cos 3t$

$\ddot{y}_D = -27R\sin 3t$

$\dot{x}_D(t_1 = \frac{\pi}{2}) = -3R$

$\dot{y}_D(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 0$

$\ddot{x}_D(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 0$

$\ddot{y}_D(t_1 = \frac{\pi}{2}) = -27R$

$R_K(t_1 = \frac{\pi}{2}) = \frac{(3R)^3}{|81R^2 - 0|} = \frac{27R^3}{81R^2} = \frac{1}{3}R$

$\boxed{R_K(t_1 = \frac{\pi}{2}) = \frac{R}{3}}$

MEHANIKA 2 **1.** GRUPA FEBRUAR 2016

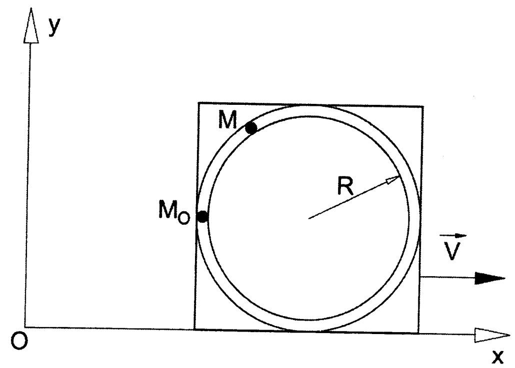
1. Kvadratna ploča stranice ~~R~~ $2R$ $= 1[m]$ kreće se duž ose Ox brzinom konstantnog intenziteta $V = \pi \left[\frac{m}{s}\right]$. Po ploči se kreće tačka M po kružnom žljebu poluprečnika R, saglasno zakonu $s = \widehat{M_oM} = R\pi t\ [m]$. U početnom trenutku tačka M se nalazila na osi Oy. Odrediti:

a) jednačine kretanja tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem Oxy,

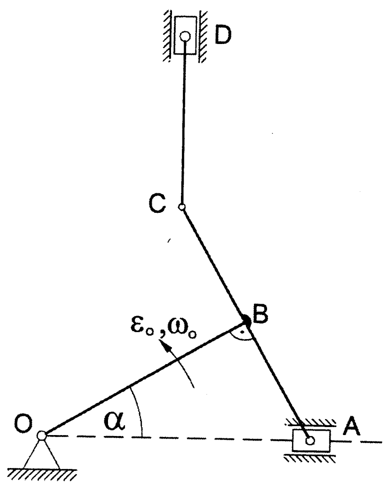
b) hodograf brzine tačke M,

c) prvi trenutak t^* kada je brzina tačke M maksimalna,

d) poluprečnik krivine tačke M u trenutku $t_1 = 1\ [sec]$.



2. Klipni mehanizam sastoji se iz krivaje OB, poluge ABC, štapa CD, i dva klizača A i D. Veze u tačkama O, A, B, C i D su zglobne. Ako je u položaju prikazanom na slici ugaona brzina krivaje ω_o, a ugaono ubrzanje $\varepsilon_o = \sqrt{3}\omega_o^2$, odrediti intenzitet brzine i ubrzanja klizača D. Dato je $\overline{OB} = \ell$, $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \ell$, $\alpha = 30°$ i $\measuredangle OBA = 90°$.



MEHANIKA 2 **1.** GRUPA FEBRUAR 2016

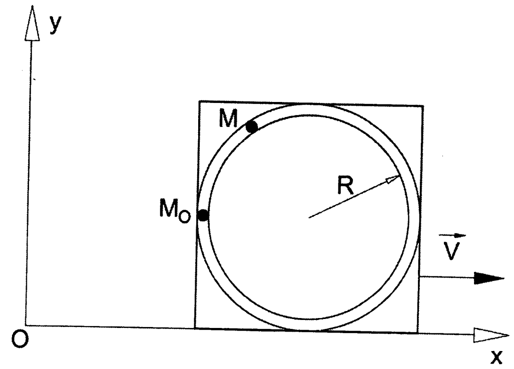
1. Kvadratna ploča stranice $R = 1[m]$ kreće se duž ose Ox brzinom konstantnog intenziteta $V = \pi \left[\frac{m}{s}\right]$. Po ploči se kreće tačka M po kružnom žljebu poluprečnika R, saglasno zakonu $s = \widehat{M_oM} = R\pi t\ [m]$. U početnom trenutku tačka M se nalazila na osi Oy. Odrediti:

a) jednačine kretanja tačke M u odnosu na nepokretni koordinatni sistem Oxy,

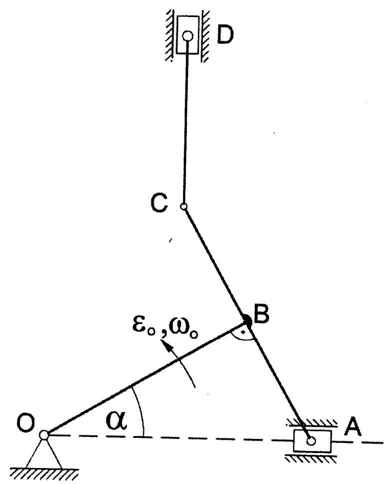
b) hodograf brzine tačke M,

c) prvi trenutak t^* kada je brzina tačke M maksimalna,

d) poluprečnik krivine tačke M u trenutku $t_1 = 1\ [sec]$.



2. Klipni mehanizam sastoji se iz krivaje OB, poluge ABC, štapa CD, i dva klizača A i D. Veze u tačkama O, A, B, C i D su zglobne. Ako je u položaju prikazanom na slici ugaona brzina krivaje ω_o, a ugaono ubrzanje $\varepsilon_o = \sqrt{3}\omega_o^2$, odrediti intenzitet brzine i ubrzanja klizača D. Dato je $\overline{OB} = \ell$, $\overline{AB} = \overline{BC}$, $\overline{CD} = \ell$, $\alpha = 30°$ i $\measuredangle OBA = 90°$.

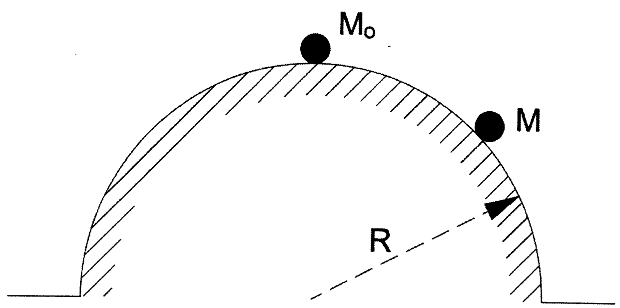


MEHANIKA 2 **1.** GRUPA FEBRUAR 2016

3. Tačka M mase m može da se kreće po glatkom polucilindru poluprečnika $R = 3[m]$. U početnom trenutku tačka je bila u najvišem položaju.

a) Odrediti položaj u kome će se tačka odvojiti od polucilindra, ako je iz početnog položaja tačka krenula brzinom zanemarljivog intenziteta ($V_O \approx 0$). Kolika je brzina tačke V_1 u trenutku napuštanja veze?

b) Kolika mora biti početna brzina V_O da bi tačka napustila polucilindar u početnom trenutku?

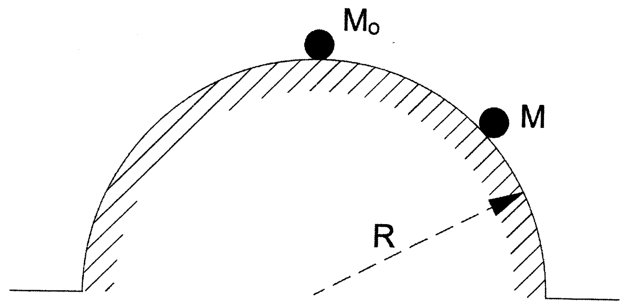


MEHANIKA 2 **1.** GRUPA FEBRUAR 2016

3. Tačka M mase m može da se kreće po glatkom polucilindru poluprečnika $R = 3[m]$. U početnom trenutku tačka je bila u najvišem položaju.

a) Odrediti položaj u kome će se tačka odvojiti od polucilindra, ako je iz početnog položaja tačka krenula brzinom zanemarljivog intenziteta ($V_O \approx 0$). Kolika je brzina tačke V_1 u trenutku napuštanja veze?

b) Kolika mora biti početna brzina V_O da bi tačka napustila polucilindar u početnom trenutku?



februar 2016.

(1.) $R = 1$

$v = \pi$ - brzina ploče

$s = \widehat{M_0 M} = R\pi t$

t_0: M je na osi Oy

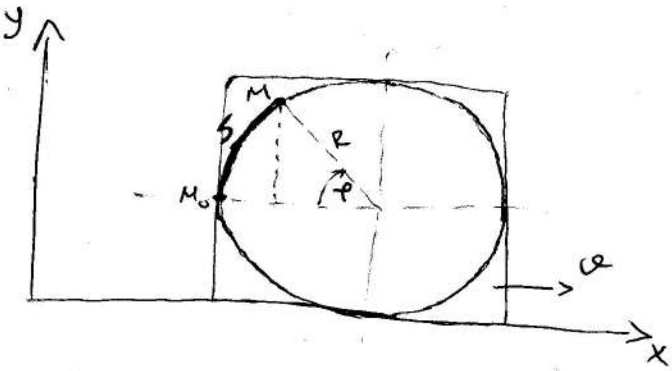
1) j-ne kretanja tačke M?

2) hodograf brzine tačke M?

3) prvi trenutak t^* kada je v_M max?

4) $R_{KM}(t_1 = 1)$?

$$\left.\begin{aligned} s &= R\pi t \\ s &= R\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \pi t}}$$



$$\left.\begin{aligned} x_M &= x_{M0} + R - R\cos\varphi \\ y_M &= R + R\sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad x_{M0} = ?$$

$$\dot{x}_{M0} = v = \pi \qquad // \int dt$$

$$x_{M0} = \pi t + c_1$$

$$x_{M0}(t_0 = 0) = 0 + c_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{c_1 = 0}}$$

$$\underline{\underline{x_{M0} = \pi t}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_M &= \pi t + R - R\cos(\pi t) \\ y_M &= R + R\sin(\pi t) \end{aligned}}$$

j-ne kretanja

$$\dot{x}_M = \pi + R\pi \sin \pi t \qquad \ddot{x}_M = R\pi^2 \cos \pi t$$

$$\dot{y}_M = R\pi \cos \pi t \qquad \ddot{y}_M = -R\pi^2 \sin \pi t$$

$(R = 1)$

$$\left.\begin{aligned} \sin(\pi t) &= \frac{\dot{x}_M - \pi}{R\pi} \\ \cos(\pi t) &= \frac{\dot{y}_M}{R\pi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\left(\frac{\dot{x}_M - \pi}{R\pi}\right)^2 + \left(\frac{\dot{y}_M}{R\pi}\right)^2 = 1}$$

hodograf brzina

$$v_M = \sqrt{\dot{x}_M^2 + \dot{y}_M^2} = \sqrt{\pi^2 + 2R\pi^2 \sin \pi t + R^2\pi^2 \sin^2 \pi t + R^2\pi^2 \cos^2 \pi t} = \sqrt{\pi^2 + 2R\pi^2 \sin \pi t + R^2\pi^2}$$

v_M je max za $\sin \pi t^* = 1 \Rightarrow \pi t^* = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{t^* = \frac{1}{2}}$

$$\dot{x}_M(t_1 = 1) = \pi + 0 = \pi \qquad \ddot{x}_M(t_1 = 1) = \pi^2 \cdot (-1) = -\pi^2$$

$$\dot{y}_M(t_1 = 1) = \pi \cdot (-1) = -\pi \qquad \ddot{y}_M(t_1 = 1) = -\pi^2 \cdot 0 = 0$$

$$R_K(t_1 = 1) = \frac{\left(\sqrt{\pi^2 + \pi^2}\right)^3}{|0 - \pi^3|} = \frac{(\pi\sqrt{2})^3}{\pi^3} = 2\sqrt{2}$$

$$\boxed{R_K(t_1 = 1) = 2\sqrt{2}}$$

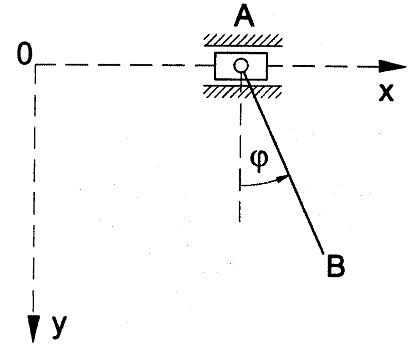
1. Mehanizam prikazan na slici sastoji se od klizača A zanemarljivih dimenzija, koji se kreće duž ose Ox ubrzanjem $\overrightarrow{a_A} = (-R\cos t + 4R\sin 2t)\vec{\imath}$, gde je $R = 1$. Štap AB obrće se oko klizača A po zakonu $\varphi = 2t$. Ako su u početnom trenutku $t_0 = 0$, položaj i brzina klizača $x_A(0) = 1$ i $\dot{x}_A(0) = -2$, odrediti:

a) liniju putanje i trajektoriju tačke B, **b)** hodograf brzine tačke B,

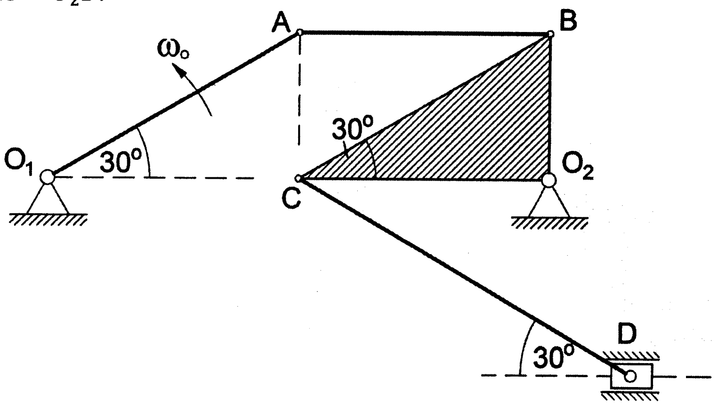
c) intenzitet brzine i ubrzanja tačke B u funkciji vremena,

d) poluprečnik krivine tačke B u trenutku $t_1 = 0.5\pi$. $\overline{AB} = R = 1$

Zadate veličine su date u osnovnim veličinama SI sistema.



2. Za mehanizam u položaju prikazanom na slici odrediti intenzitet brzine i ubrzanja klizača D. Štap O_1A obrće se ugaonom brzinom konstantnog intenziteta ω_0. Veze u tačkama O_1, O_2, A, B, C i D su zglobne. Dato je $\overline{O_2B} = R, \overline{CD} = 4R$, i $\overline{AC} = \overline{O_2B}$.



MEHANIKA 2 1. GRUPA JANUAR 2016

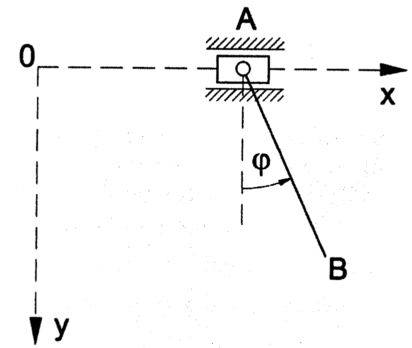
1. Mehanizam prikazan na slici sastoji se od klizača A zanemarljivih dimenzija, koji se kreće duž ose Ox ubrzanjem $\overrightarrow{a_A} = (-R\cos t + 4R\sin 2t)\vec{\imath}$, gde je $R = 1$. Štap AB obrće se oko klizača A po zakonu $\varphi = 2t$. Ako su u početnom trenutku $t_0 = 0$, položaj i brzina klizača $x_A(0) = 1$ i $\dot{x}_A(0) = -2$, odrediti:

a) liniju putanje i trajektoriju tačke B, **b)** hodograf brzine tačke B,

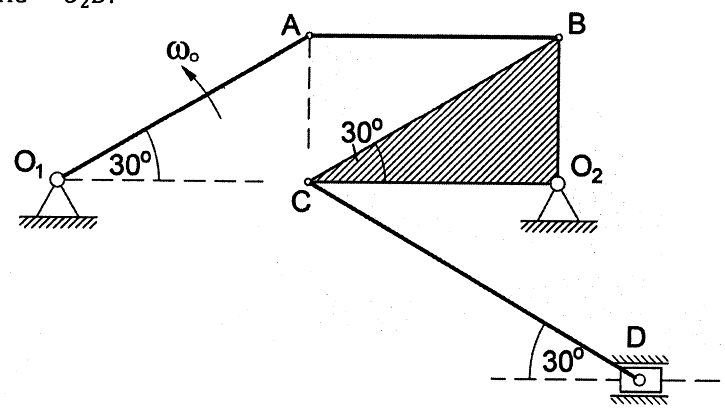
c) intenzitet brzine i ubrzanja tačke B u funkciji vremena,

d) poluprečnik krivine tačke B u trenutku $t_1 = 0.5\pi$.

Zadate veličine su date u osnovnim veličinama SI sistema.

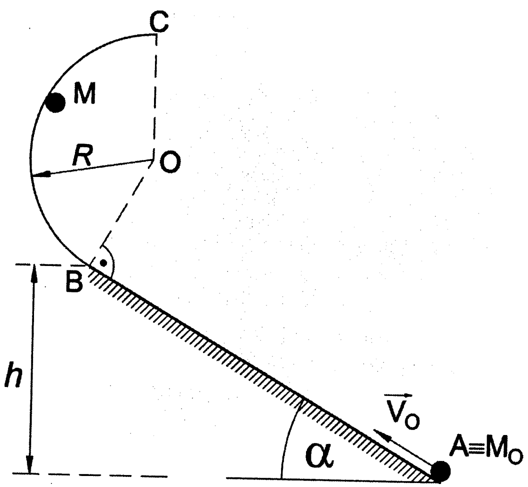


2. Za mehanizam u položaju prikazanom na slici odrediti intenzitet brzine i ubrzanja klizača D. Štap O_1A obrće se ugaonom brzinom konstantnog intenziteta ω_0. Veze u tačkama O_1, O_2, A, B, C i D su zglobne. Dato je $\overline{O_2B} = R, \overline{CD} = 4R$, i $\overline{AC} = \overline{O_2B}$.



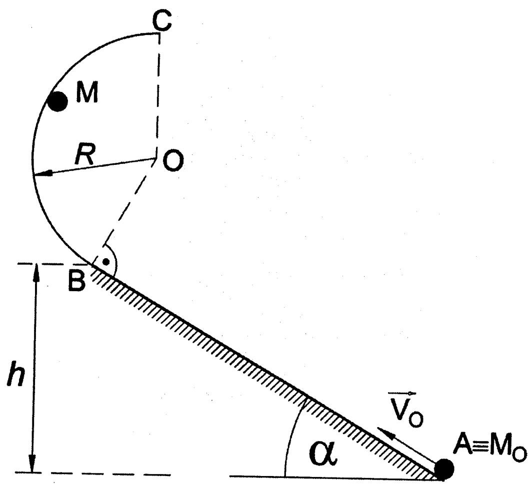
MEHANIKA 2 **1. GRUPA** JANUAR 2016

3. Uz hrapavu strmu ravan AB, visine h i nagibnog ugla α ($\sin\alpha = 0.6$) u odnosu na horizontalu, kreće se kuglica M mase m, iz položaja A početnom brzinom intenziteta $V_o^2 = 5.8gh$, gde je g ubrzanje Zemljine teže. U položaju B kuglica prelazi u glatki deo BC oblika kružnog cilindra poluprečnika $R = 0.5h$. Koeficijent trenja klizanja na delu AB je $\mu = 0.75$. Odrediti položaj kuglice kada dolazi do napuštanja veze i slobodnog kretanja tačke.



MEHANIKA 2 **1. GRUPA** JANUAR 2016

3. Uz hrapavu strmu ravan AB, visine h i nagibnog ugla α ($\sin\alpha = 0.6$) u odnosu na horizontalu, kreće se kuglica M mase m, iz položaja A početnom brzinom intenziteta $V_o^2 = 5.8gh$, gde je g ubrzanje Zemljine teže. U položaju B kuglica prelazi u glatki deo BC oblika kružnog cilindra poluprečnika $R = 0.5h$. Koeficijent trenja klizanja na delu AB je $\mu = 0.75$. Odrediti položaj kuglice kada dolazi do napuštanja veze i slobodnog kretanja tačke.



januar 2016.

(1.) $\vec{a}_A = (-R\cos t + 4R\sin(2t))\,\vec{i}$

$R = 1$

$\varphi = 2t$

$t_0 = 0: \quad x_A(t_0) = 1$

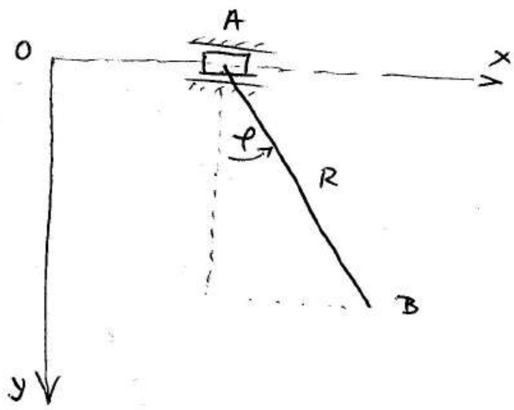
$\qquad \dot{x}_A(t_0) = -2$

1) linija putanje i trajektorija tačke B ?
2) hodograf brzina tačke B ?
3) $v_B(t)$?, $a_B(t)$?
4) $R_{KB}\ (t_1 = \frac{1}{2}\pi)$

$$\ddot{x}_A = -\cos t + 4\sin 2t \qquad /\int dt$$

$$\dot{x}_A = -\int \cos t\,dt + 4\int \sin 2t\,dt = \left\{ \begin{matrix} u = 2t \\ du = 2dt \end{matrix} \right\} =$$
$$= -\sin t + 4\int \sin u \frac{du}{2} = -\sin t - 2\cos 2t + C_1$$
$$\dot{x}_A(t_0=0) = 0 - 2 + C_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_1 = 0}}$$
$$\dot{x}_A = -\sin t - 2\cos 2t \qquad /\int dt$$

$$x_A = -\int \sin t\,dt - 2\int \cos 2t\,dt = \left\{ \begin{matrix} u = 2t \\ du = 2dt \end{matrix} \right\} =$$
$$= \cos t - 2\int \cos u \frac{du}{2} = \cos t - \sin 2t + C_2$$
$$x_A(t_0=0) = 1 - 0 + C_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{C_2 = 0}}$$
$$\underline{\underline{x_A = \cos t - \sin 2t}}$$



$$x_B = x_A + R\sin\varphi = \cos t - \sin 2t + \sin 2t = \cos t$$
$$y_B = R\cos\varphi = \cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$$

$\Rightarrow \quad \cos t = x_B, \quad \sin t = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sqrt{1 - x_B^2}$

$$y_B = x_B^2 - (1 - x_B^2) = 2x_B^2 - 1$$
$$\boxed{y_B = 2x_B^2 - 1} \quad \text{- linija putanje}$$

$$\dot{x}_B = -\sin t$$
$$\dot{y}_B = -2\sin 2t = -4\sin t\cos t$$

$\Rightarrow \quad \sin t = -\dot{x}_B, \quad \cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1 - \dot{x}_B^2}$

$$\boxed{\dot{y}_B = +4\dot{x}_B\sqrt{1 - \dot{x}_B^2}} \quad \text{- hodograf brzina}$$

$$\ddot{x}_B = -\cos t$$
$$\ddot{y}_B = -4\cos 2t$$

$$v_B = \sqrt{\dot{x}_B^2 + \dot{y}_B^2} = \sqrt{\sin^2 t + 4\sin^2 2t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_B = \sqrt{\sin^2 t + 4\sin^2 2t}}$$

$$a_B = \sqrt{\ddot{x}_B^2 + \ddot{y}_B^2} = \sqrt{\cos^2 t + 16\cos^2 2t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_B = \sqrt{\cos^2 t + 16\cos^2 2t}}$$

$\dot{x}_B(t_1 = \frac{\pi}{2}) = -1 \qquad \ddot{x}_B(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 0$

$\dot{y}_B(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 0 \qquad \ddot{y}_B(t_1 = \frac{\pi}{2}) = 4$

$$R_K(t_1 = \tfrac{\pi}{2}) = \frac{1^3}{|-4 - 0|} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_K(t_1 = \tfrac{\pi}{2}) = \frac{1}{4}}$$